الباب العاشر

كمية الحركة الزاوية المغزلية

(Spin Angular Momentum)

الباب العاشر

كمية الحركة الزاوية المغزلية

لكي تتضح الصورة بالنسبة لكمية الحركة الزاوية المغزلية لجسيم غير مرئي (إلكترون مثلاً)؛ دعونا نتكلم أولاً عن حركة جسم مرئي، كالأرض مثلاً. فهي بالإضافة إلى حركتها المدارية حول الشمس، يوجد لها أيضاً حركة دورانية (مغزلية) حول محور مار بمركز ثقلها. ومن ثم فإن كمية الحركة الزاوية الكلية ما هي إلا محصلة الجمع المتجه لكمية الحركة الزاوية الدورانية، وكمية الحركة الزاوية المغزلية.

قياساً على ذلك فإننا نستطيع أن نخمن (نفترض) أن إلكترون الذرة يمتلك هذه الخاصية الذاتية المغزلية. لكن، نتيجة عدم معرفتنا بالتركيبة الداخلية للإلكترون فإننا لا نستطيع وصف كنه الإلكترون على أنه جسيم كروي، ونتيجة لهذا فإننا لا نستطيع حساب كمية الحركة الزاوية المغزلية للإلكترون بنفس طريقة حساب كمية الحركة الزاوية المغزلية للأرض بدلالة نصف قطرها وسرعتها الزاوية. هذا التخمين (الافتراض) لم يأتِ من فراغ، بل جاء نتيجة تجارب معملية مكثفة، في بداية القرن الماضي، لأطياف لبعض العناصر الذرية. أهم هذه التجارب هي:

أ- تجربة شتيرن-جيرلاخ (Stern-Gerlach Experiment) ، وتم فيها دراسة تأثير مجال مغناطيسي غير متجانس (Inhomogeneous magnetic field) على إلكترون المستوى الأرضي للذرات الشبيهة بالهيدروجين. وفيها تم انقسام (Split) حزمة من ذرات الفضة إلى حزمتين.

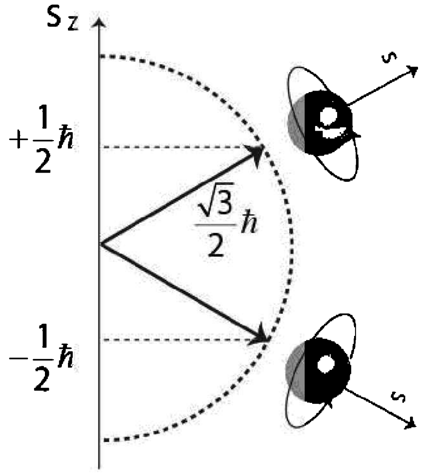
ب- تأثير زيمان (Zeeman effect) ، وتم فيها انقسام مستويات الطاقة بالذرات (من ثم الأطياف المصاحبة لها) نتيجة تأثير مجال مغناطيسي.

ج- التركيب الدقيق للمستويات الذرية (Fine structure of atomic levels) ، وتم فيها ملاحظة انقسام مستويات الطاقة بالذرات (من ثم الأطياف المصاحبة لها) نتيجة تأثير مجالات داخلية.

١- كمية الحركة الزاوية المغزلية لجسيم

نتيجة لنتائج التجارب المعملية السابقة وجد أن أعداد الكم الأساسية (n,l,m_l) غير كافية لشرح الانتقالات الطيفية بالذرات؛ ولهذا تم إضافة العدد الجديد (s,m_s) حيث s ترمز لعدد الكم المغزلي، ويرمز العدد m_s إلى مسقط المؤثر $\hat{S}_z$ على المحور Z. ومن علمنا بأن درجة الانتماء تحكمها المعادلة $d_s = 2s+1$ ، ومن نتائج تجربة شتيرن-جيرلاخ أن $d_s = 2$ وهذا يعطينا $s = \frac{1}{2}$ ومنها $m_s = \pm\frac{1}{2}$. من ثم نجد (وذلك مقارنةً بكمية الحركة الزاوية الدورانية) أن:

$$\begin{aligned}
&\hat{S}^2 \left|s,m_s\right\rangle = s(s+1)\hbar^2 \left|s,m_s\right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 \left|s,m_s\right\rangle; \\
&\hat{S}_z \left|s,m_s\right\rangle = m_s\hbar \left|s,m_s\right\rangle \\
&\hat{S}_z^2 \left|s,m_s\right\rangle = m_s^2\hbar \left|s,m_s\right\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2 \left|s,m_s\right\rangle
\end{aligned} \tag{1}$$



شكل (1) الحركة المغزلية لإلكترون يدور حول محوره المار بمركز ثقله، والاتجاهان المحتملان لمتجه كمية الحركة الزاوية المغزلية الذاتية S_z.

القيمتان المميزتان $m_s = \pm\frac{1}{2}$ تشيران إلى الاتجاهين المسموح بهما للدوران المغزلي، انظر شكل (١). وللاختصار فإن $m_s = \frac{1}{2}$ تصف اتجاه الحركة المغزلية نحو الأعلى (spin up (↑)) و$m_s = -\frac{1}{2}$ تصف اتجاه الحركة المغزلية نحو الأسفل (spin down (↓)) هذا بالرغم من أن الحركة المغزلية أصلاً لا تأخذ الاتجاه الموجب للمحور Z ولا حتى الاتجاه السالب.

وتُمثل الدالة المميزة لكمية الحركة الزاوية المغزلية أنماطًا عدة، منها مايلي:

$$\chi_{\pm} = |s, m_s> \equiv \begin{cases} \text{spin up } (\uparrow) \quad \equiv \chi_{+} \equiv \alpha \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}> \quad \equiv |+> \\ \text{spin down } (\downarrow) \equiv \chi_{-} \equiv \beta \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> \equiv |-> \end{cases} \tag{٢}$$

ومن أهم خواص هذه الدوال: المعيارية والتعامد. لهذا فإن حاصل الضرب الداخلي بينهما هو:

$$\begin{aligned} \langle + | + \rangle = \langle - | - \rangle = 1, \\ \langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 0 \end{aligned} \tag{٣}$$

بالرغم من تعدد أوجه الشبه بين كمية الحركة الزاوية المغزلية للإلكترون وبين كمية الحركة الزاوية المدارية، فإنهما يختلفان بشكل جوهري في الآتي:

أ- مؤثر كمية الحركة الزاوية المغزلية هو مؤثر كمي ولا يوجد له مثيل في الفيزياء الكلاسيكية، ومن ثم لا يمكن التعبير عنه بدلالة مؤثرات كلاسيكية ميكانيكية مثل مؤثرات المكان و كمية الحركة الخطية (linear momentum). وقد ظهر هذا الافتراض طبيعياً فقط عندما تعامل العالم ديراك نظرياً مع معادلة شرودنجر باستخدام النظرية النسبية (Theory of relativity).

ب- ونتيجةً للحقيقة الأولى فإن القيم المميزة لكمية الحركة الزاوية المغزلية s غير مقيدة بقيم صحيحة فقط (مثل كمية الحركة الزاوية المدارية l)، ولكنها تأخذ قيماً موجبة (صحيحة وأيضاً أنصاف قيم صحيحة).

ولنتوقف هنا لحظة لنتعرف على مدى أهمية الحركة المغزلية في دراستنا.

تظهر أهمية الحركة المغزلية بحالتين:

١- عندما نتعامل مع دالة شرودنجر الكلية. ولقد تعاملنا مع دالة شرودنجر لذرة الهيدروجين في الإحداثيات الكروية وكتبناها بالصورة:

$$\Psi \equiv \psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r) Y_{l,m_l}(\theta,\varphi) = |n,l,m_l\rangle$$

وبإدماج دالة الحركة المغزلية بدالة شرودنجر نجد أن الدالة الكلية تعرف بالتالي:

$$\Psi_{total} \equiv \psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)\chi_{\pm} = R_{nl}(r)Y_{l,m_l}(\theta,\varphi)\chi_{\pm} = |n,l,m_l,s,m_s\rangle = |n,l,m_l\rangle|s,m_s\rangle \qquad (٤)$$

وتصبح الحالة التي فيها الأعداد الكمية الثلاثة $|n,l,m_l\rangle$ ماهي إلا حالة خاصة من الحالة العامة بعد أن زادت الأعداد الكمية إلى خمسة $|n,l,m_l,s,m_s\rangle$.

٢- عندما نتعامل مع جهد التفاعل (interaction potential) حيث يظهر تفاعل الحركتين المغزلية والدورانية بالإضافة إلى التفاعلات الأخرى الداخلية (مثل التفاعل الكولومي) والخارجية (مثل المجال الكهربي أو المغناطيسي).

وبكلتا الحالتين سنضطر لاستخدام طرق تقريبية لحل معادلة شرودنجر.

وكما ذُكر سابقاً، ونظراً لوجود أوجه الشبه بين كمية الحركة الزاوية الدورانية للإلكترون، وكمية الحركة المغزلية فإننا نستطيع كتابة علاقات التبادل كالتالي:

$$\begin{aligned} \left[\hat{S}_x,\hat{S}_y\right] &= i\hbar\hat{S}_z, \\ \left[\hat{S}_y,\hat{S}_z\right] &= i\hbar\hat{S}_x, \\ \left[\hat{S}_z,\hat{S}_x\right] &= i\hbar\hat{S}_y \end{aligned} \qquad (٥)$$

وباستخدام التعريف العام للمؤثر التصاعدي $\hat{S}_+$ و التنازلي $\hat{S}_-$ بالصورة:

$$\hat{S}_{\pm} = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y \qquad (٦)$$

حيث

$$\hat{S}_{\pm}\,|\,s,m_s> = \hbar\sqrt{s(s+1)-m_s(m_s\pm1)}\;\;|\,s,m_s\pm1> \qquad (٧)$$

وكمثال نجد أن تأثيرهما على المستويين α و β يصبح:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}_+\alpha &= \hat{S}_+\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{(3/4)-(1/2)(3/2)}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0 \\
\hat{S}_+\beta &= \hat{S}_+\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{(3/4)-(-1/2)(1/2)}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\alpha \\
\hat{S}_-\alpha &= \hat{S}_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{(3/4)-(1/2)(-1/2)}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\beta \\
\hat{S}_-\beta &= \hat{S}_-\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{(3/4)-(-1/2)(-3/2)}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0
\end{aligned}
\qquad (٨)
$$

ولتفسير العلاقات بالمعادلة (٨)، فإننا نعلم أنه لا يوجد غير دالتين مميزتين فقط؛ الأولى هي الدالة المميزة α، التي لها أعلى قيمة مميزة $m_s = \frac{1}{2}$ ولا يوجد قيمة أعلى منها، ولذلك فإن تأثير $\hat{S}_+$ على α سوف يفنيها، بمعنى أن $\hat{S}_+\alpha = 0$. بالنسبة للدالة المميزة β التي لها أقل قيمة مميزة $m_s = -\frac{1}{2}$ فإنه لا يوجد قيمة أقل منها، ولذلك فإن تأثير $\hat{S}_-$ على β سوف يفنيها، بمعنى أن $\hat{S}_-\beta = 0$.

والجدول التالي يعطينا ملخصاً لبعض نتائج المؤثرات (وقد استخدمنا الوحدات الذرية $\hbar = 1$):

	α	β		α	β
$\hat{S}^2$	$\frac{3}{4}\alpha$	$\frac{3}{4}\beta$	$\hat{S}_y$	$\frac{i}{2}\beta$	$-\frac{i}{2}\alpha$
$\hat{S}_z$	$\frac{1}{2}\alpha$	$-\frac{1}{2}\beta$	$\hat{S}_+$	0	α
$\hat{S}_x$	$\frac{1}{2}\beta$	$\frac{1}{2}\alpha$	$\hat{S}_-$	β	0

واجب منزلي: تحقق من نتائج الجدول السابق.

مثال: أوجد مستويات الطاقة لجسيم له القيمة $s = \frac{1}{2}$ والهملتونين:

$$\hat{H} = a(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 - 2\hat{S}_z^2) + b\hat{S}_z$$

حيث a و b ثوابت، وذلك باستخدام الوحدات الذرية.

الحل: بإعادة كتابة الهملتونين بالشكل التالي (مع استخدام $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$):

$$\begin{aligned}\hat{H} &= a(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 - 3\hat{S}_z^2) + b\hat{S}_z \\ &= a\hat{S}^2 - 3a\hat{S}_z^2 + b\hat{S}_z\end{aligned}$$

نجد أن:

$$\begin{aligned}\hat{H}\left|s, m_s\right\rangle &= \left\{a\hat{S}^2 - 3a\hat{S}_z^2 + b\hat{S}_z\right\}\left|s, m_s\right\rangle \\ &= \left\{as(s+1) - 3am_s^2 + bm_s\right\}\left|s, m_s\right\rangle \\ &= \left\{\frac{3}{4}a - 3\frac{1}{4}a + bm_s\right\}\left|s, m_s\right\rangle = bm_s\left|s, m_s\right\rangle\end{aligned}$$

وبضرب المعادلة السابقة من اليسار بالمتجه $\left\langle s, m_s\right|$ واستخدام الخاصية المعيارية نحصل على:

$$\left\langle s, m_s\right|\hat{H}\left|s, m_s\right\rangle = bm_s\left\langle s, m_s | s, m_s\right\rangle = bm_s$$

وحيث إن $m_s = \pm\frac{1}{2}$ فإن مستويات الطاقة للجسيم تكون ثنائية الانتماء (Two-fold degenrate).

٢- التمثيل المصفوفي لكمية الحركة الزاوية المغزلية:

حيث إنه لا يوجد غير دالتين لكمية الحركة الزاوية المغزلية، وهما α و β، لذلك نستطيع تمثيلهما بمصفوفة ثنائية الأبعاد كالتالي:

$$\alpha = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right> = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \beta = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right> = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (٩)$$

وكما أن (x, y, z) هي الأساس لأي متجه r في الإحداثيات الكرتيزية، بالمثل فإن α و β يكونان الأساس لأي مغزل S (Spinor) في الفراغ المغزلي.

مثال: تحقق من النتائج التالية:

$$\alpha^\dagger \alpha = <\frac{1}{2},\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}> \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \beta^\dagger \beta;$$

$$\beta^\dagger \alpha = <\frac{1}{2},-\frac{1}{2}|\frac{1}{2},\frac{1}{2}> = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \alpha^\dagger \beta$$

مثال: أثبت أن: $\sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{m_s=\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{2},m_s\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},m_s\right| = \mathbf{1}$ حيث $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$ هي مصفوفة الوحدة الثنائية.

الحل: لاحظ هنا أن التجميع سوف يستخدم حيث إنها دوال منفصلة (discrete functions) وليست دوال متصلة (continuous functions) :

$$\sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{m_s=\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{2},m_s\right\rangle\left\langle\frac{1}{2},m_s\right| = \beta\beta^\dagger + \alpha\alpha^\dagger$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

مثال: أثبت أن التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{S}_z$ هو:

$$\left(\hat{S}_z\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل: التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{S}_z$ يأتي من استخدام:

$$\left(\hat{S}_z\right) = \begin{pmatrix} \langle\alpha|\hat{S}_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|\hat{S}_z|\beta\rangle \\ \langle\beta|\hat{S}_z|\alpha\rangle & \langle\beta|\hat{S}_z|\beta\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\langle\alpha|\alpha\rangle & -\frac{\hbar}{2}\langle\alpha|\beta\rangle \\ \frac{\hbar}{2}\langle\beta|\alpha\rangle & -\frac{\hbar}{2}\langle\beta|\beta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\times 1 & -\frac{\hbar}{2}\times 0 \\ \frac{\hbar}{2}\times 0 & -\frac{\hbar}{2}\times 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مثال: أوجد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{S}_+$.

الحل: التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{S}_+$ يأتي من استخدام:

$$\left(\hat{S}_+\right)=\begin{pmatrix}\langle+|\hat{S}_+|+\rangle & \langle+|\hat{S}_+|-\rangle\\ \langle-|\hat{S}_+|+\rangle & \langle-|\hat{S}_+|-\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\hbar\langle+|+\rangle\\ 0 & -\hbar\langle-|+\rangle\end{pmatrix}=\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

واجب منزلي: تحقق من التمثيل المصفوفي للمؤثرات التالية:

$$\left(\hat{S}_-\right)=\begin{pmatrix}\langle+|\hat{S}_-|+\rangle & \langle+|\hat{S}_-|-\rangle\\ \langle-|\hat{S}_-|+\rangle & \langle-|\hat{S}_-|-\rangle\end{pmatrix}=\hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{S}_x\right)=\frac{\hat{S}_++\hat{S}_-}{2}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{S}_y\right)=\frac{\hat{S}_+-\hat{S}_-}{2i}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

مثال: احسب القيم والدوال المميزة للمؤثر $\hat{S}_x$

الحل: معادلة القيم المميزة تعرف بالمعادلة:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}-2\lambda/\hbar & 1\\ 1 & -2\lambda/\hbar\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0$$

في الحقيقة هذه صيغة مختصرة لمعادلتين متجانستين في المجهولين a و b (وبالتأكيد λ أيضاً). لحساب λ يجب أن نحل معادلة المحدد العام الصفرية وهي:

$$\begin{vmatrix}-2\lambda/\hbar & 1\\ 1 & -2\lambda/\hbar\end{vmatrix}=0$$

ومنها نحصل على المعادلة التي تحدد القيم المميزة:

$$\left(2\lambda/\hbar\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

ولحساب الدوال المميزة a و b لكل قيمة مميزة: نستخدم القيمة المميزة الأولى $\lambda = \frac{\hbar}{2}$ نجد المعادلة $\begin{pmatrix} -2\lambda/\hbar & 1 \\ 1 & -2\lambda/\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ تعطي $a = b$. وباستخدام شرط المعايرة $a^2 + b^2 = 1$ نجد أن $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. للقيمة المميزة الثانية $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$ نجد المعادلة $\begin{pmatrix} -2\lambda/\hbar & 1 \\ 1 & -2\lambda/\hbar \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$ تعطي $a = -b$. وباستخدام شرط المعايرة $a^2 + b^2 = 1$ نجد أن $a = -b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. الجدول التالي يحتوى على ملخص للمستويات والقيم المميزة:

$\left(\hat{S}_x\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	القيم المميزة	الرمز	المستويات المميزة
	$\frac{\hbar}{2}$	$\left\vert +_x \right\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha + \beta\}$
	$-\frac{\hbar}{2}$	$\left\vert -_x \right\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha - \beta\}$

واجب منزلي: احسب القيم والدوال المميزة للمؤثرات $\hat{S}_y, \hat{S}_z$ وتأكد من الجدولين التاليين:

المستويات المميزة	الرمز	القيم المميزة	$(\hat{S}_z) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\lvert+\rangle$	$\frac{\hbar}{2}$	
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\lvert-\rangle$	$-\frac{\hbar}{2}$	

المستويات المميزة	الرمز	القيم المميزة	$(\hat{S}_y) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha + i\beta\}$	$\lvert+_y\rangle$	$\frac{\hbar}{2}$	
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha - i\beta\}$	$\lvert-_y\rangle$	$-\frac{\hbar}{2}$	

من المهم هنا أن نوضح الآتي: أنه إذا تواجد الإلكترون في الحالة المغزلية نحو الأعلى ((↑) spin up) دائماً أو الحالة المغزلية نحو الأسفل ((↓) spin down) دائماً فإن القيم المتوقعة

$$< \hat{S}_x > = < \hat{S}_y > = 0$$

ولكن

$$< \hat{S}_x^2 > = < \hat{S}_y^2 > = \frac{\hbar^2}{4}.$$

وهذا معناه أنه مهما يكن حالة الإلكترون سواء بالمستوى α أو β فإن مُركبتيه $<\hat{S}_x^2>$ و $<\hat{S}_y^2>$ لا تؤولان للصفر أبداً.

٣- مصفوفات باولي

سيتم هنا تعريف المؤثر في الفراغ المغزلي ذي الثلاثة أبعاد كالتالي:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma} = \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}\right) \quad (١٠)$$

حيث تعرف $\boldsymbol{\sigma}$ بمصفوفات باولي كالتالي:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (١١)$$

والتي لها الخواص التالية:

$$\begin{aligned} &\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbf{1}, \\ &Tr(\sigma_i) = 0, \\ &\det|\sigma_i| = -1, \\ &\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \qquad (i,j) = (x,y,z) \end{aligned} \quad (١٢)$$

ملحوظة: لهذا النوع من المصفوفات أهمية خاصة، وذلك لاستخداماتها المتعددة في الفيزياء المتقدمة، وحديثاً في فرع الحاسوب الكمي (Quantum computing).

واجب منزلي: تحقق من التالي:

$$\begin{aligned} \sigma_z |+\rangle &= |+\rangle, \\ \sigma_z |-\rangle &= -|-\rangle \end{aligned}$$

بالإمكان تعريف المؤثرات التصاعدية والتنازلية لمصفوفات باولي كالتالي:

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \pm \sigma_y\right)$$

واجب منزلي: تحقق من التالي:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_+ \left|+\right\rangle = 0,$$

$$\sigma_+ \left|-\right\rangle = \left|+\right\rangle,$$

$$\sigma_- \left|+\right\rangle = \left|-\right\rangle,$$

$$\sigma_- \left|-\right\rangle = 0$$

٤- الحركة المغزلية لإلكترونين

باقتراض وجود حركتين مغزليتين منفصلتين تماماً، نجد أن:

$$\hat{s}_{iz} \left|s_i m_i\right\rangle = m_i \hbar \left|s_i m_i\right\rangle$$

$$\hat{s}_i^2 \left|s_i m_i\right\rangle = s_i (s_i + 1)\hbar^2 \left|s_i m_i\right\rangle \tag{I}$$

حيث $i = 1,2$.

سوف نفترض حاصل ضرب الممتدات (Tensor product) يأخذ صورة التمثيل المنفصل

$$\left|s_1 m_1 s_2 m_2\right\rangle \equiv \left|s_1 m_1\right\rangle \left|s_2 m_2\right\rangle \tag{II}$$

حيث $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ فنجد أن تأثير المؤثرين $\hat{s}_{iz}$ و $\hat{s}_i^2$ على الحركة مغزلية لحاصل الضرب يُعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\hat{s}_{1z}\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle &= m_1\hbar\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\\ \hat{s}_1^2\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle &= s_1(s_1+1)\hbar^2\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\\ \hat{s}_{2z}\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle &= m_2\hbar\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\\ \hat{s}_2^2\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle &= s_2(s_2+1)\hbar^2\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

مع ملاحظة أن $\hat{s}_{iz}$ و $\hat{s}_{iz}$ يؤثران على الجسيم i فقط.

من (III) نجد :

$$\begin{aligned}\hat{s}_z\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle &= \left(\hat{s}_{1z}+\hat{s}_{2z}\right)\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\\ &= \left(\hat{s}_{1z}\left|s_1m_1\right\rangle\right)\left|s_2m_2\right\rangle+\left(\hat{s}_{2z}\left|s_2m_2\right\rangle\right)\left|s_1m_1\right\rangle\\ &= \hbar\left[\left(m_1\left|s_1m_1\right\rangle\right)\left|s_2m_2\right\rangle+\left(m_2\left|s_2m_2\right\rangle\right)\left|s_1m_1\right\rangle\right]\\ &= \left(m_1+m_2\right)\hbar\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\\ &= m\hbar\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle\end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

حيث:

$$m = m_1 + m_2 \qquad \text{(V)}$$

المعادلة (IV) توضح أن الدالة $\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle$ هي دالة مميزة للمؤثر $\hat{s}_z$. وحيث إن المؤثر $\hat{s}_z$ يحقق العلاقة التبادلية مع المؤثر $\hat{s}^2$، **حيث إن:**

$$\hat{s}^2 = \left(\hat{s}_1+\hat{s}_2\right)^2$$

$$\hat{s}^2 = \left(\hat{s}_{1x}+\hat{s}_{2x}\right)^2+\left(\hat{s}_{1y}+\hat{s}_{2y}\right)^2+\left(\hat{s}_{1z}+\hat{s}_{2z}\right)^2$$

لذلك فنحن بصدد البحث عن دالة تكون مميزة لكل من $\hat{s}_z$ و$\hat{s}^2$. للأسف فإن الدالة $\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle$ ليست دالة مميزة للمؤثر $\hat{s}^2$، ولكن، بالإمكان تكوين تركيبة خطية من الدوال $\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle$، بالشكل $\left|s_1,s_2;S,M_S\right\rangle$، لتصبح دالة مميزة لكل من $\hat{s}_z$ و$\hat{s}^2$، وهذا هو ما نهدف لتكوينه. الدالة $\left|s_1,s_2;S,M_S\right\rangle$ يقال عنها: إنها دالة في التمثيل الاقتراني (Coupled representation) والدالة $\left|s_1m_1s_2m_2\right\rangle$ يقال عنها: إنها دالة في التمثيل المنفصل (Uncoupled representation).

مثال: افترض الحركة المغزلية لإلكترونين، لهما القيم $s_1 = \frac{1}{2}$ و $s_2 = \frac{1}{2}$ بالمستوى $l = 0$. اشرح، بدون حسابات مطولة، كيف تتكون الدوال المقترنة $|s_1, s_2; S, M_S\rangle$ المسموح بها، التي تُعطى بدلالة التمثيل المنفصل $|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle \equiv |m_1\rangle |m_2\rangle$.

الحل: للتبسيط سوف نستخدم الاختصار $|SM_S\rangle$ بدلاً $|s_1, s_2; S, M_S\rangle$ حيث إن قيم s_1 و s_2 ثابتة ولن تتغير.

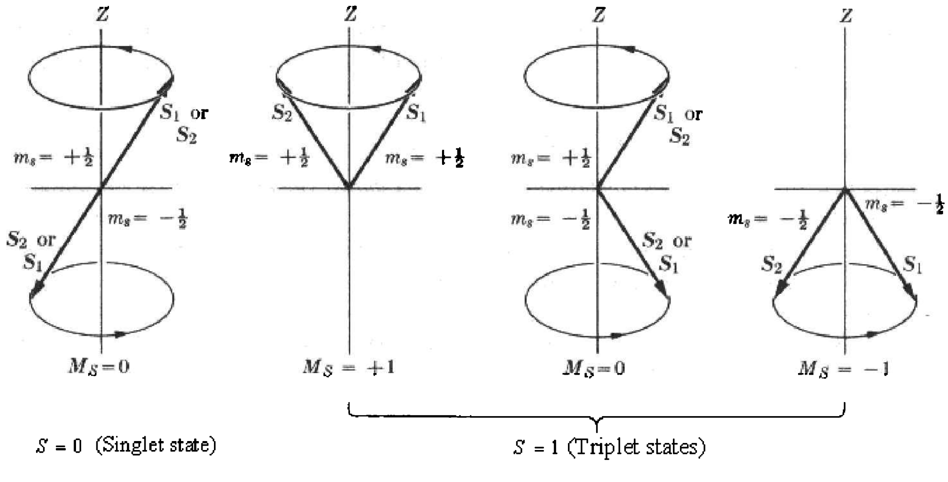
تظهر هنا حالتان منفصلتان: الأولى عندما:

$$S_{\min} = |s_1 - s_2| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 0$$

ولها مستوى واحد فقط مقابل للقيمة $M_s = 0$، انظر الشكل (٢) أ، ولهذا يسمى مستوى أحادي (Singlet state). والحالة الثانية عندما:

$$S_{\max} = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ولها ثلاث مستويات متناظرة لهما القيم $M_S = 1, 0, -1$، انظر الشكل (٢) ب، ولهذا تسمى مستويات ثلاثية (Triplet states).



أ- مستوى أحادي ب- مستوى ثلاثي

شكل (٢) المستويات المغزلية لنظام مكون من إلكترونين.

مثال: افترض فقط الحركة المغزلية لإلكترونين، استخدم المؤثرات التنازلية لحساب الدالة المقترنة $\left|s_1,s_2;S,M_S\right\rangle$، وللاختصار سوف نستخدم $\left|s_1,s_2;S,M_S\right\rangle \equiv \left|S,M_S\right\rangle$.

الحل: بالنسبة للحركة المغزلية لإلكترونين فإن الدالة الكلية تعرف بالتالي:

$$\left|s_1=\frac{1}{2},s_2=\frac{1}{2};S,M_S\right\rangle \equiv \left|S,M_S\right\rangle$$

وتظهر هنا حالتان منفصلتان: الأولى هي

$$S_{\max}=s_1+s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

ولها ثلاث مستويات متناظرة مقابلة للقيم $M_S=1,0,-1$. والحالة الثانية هي

$$S_{\min}=s_1-s_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

ولها مستوى واحد فقط مقابل للقيمة $M_s=0$.

للحالة الأولى: وهي أعلى مستوى وتُعرف بالدالة $\left|S_{\max}=1,M_{S,\max}=1\right\rangle$ وهي ناتجة من الجمع المتجه للدالتين $\alpha_1=\left|s_1=\frac{1}{2},m_1=\frac{1}{2}\right\rangle$ و $\alpha_2=\left|s_2=\frac{1}{2},m_2=\frac{1}{2}\right\rangle$ وتكون على الصورة:

$$\boxed{\left|11\right\rangle=\alpha_1\alpha_2} \qquad (١)$$

وباستخدام العلاقة العامة :

$$\hat{S}_{\pm}\left|S,M_S\right\rangle=\hbar\sqrt{S(S+1)-M_S(M_S\pm1)}\left|S,M_S\pm1\right\rangle$$

فإن تأثير المؤثر $\hat{S}_-$ على الدالة بالمعادلة (١) يعطي:

$$\hat{S}_-\left|1,1\right\rangle=\left(\hat{s}_{-1}+\hat{s}_{-2}\right)\alpha_1\alpha_2 \qquad (٢)$$

فإن تأثير المؤثر $\hat{S}_-$ على الطرف الأيسر للمعادلة (١) يعطى:

$$\hat{S}_-\left|1,1\right\rangle=\left[1(1+1)-1(1-1)\right]^{1/2}\left|1,0\right\rangle=\sqrt{2}\left|1,0\right\rangle \quad (٣)$$

وتأثيره على الطرف الأيمن يعطي (مع ملاحظة أن $\hat{s}_{-1}$ تؤثر على m_1 فقط و $\hat{s}_{-2}$ تؤثر على m_2 فقط):

$$\begin{aligned}(\hat{s}_{-1}+\hat{s}_{-2})\alpha_1\alpha_2 &= (\hat{s}_{-1}\alpha_1)\alpha_2+\alpha_1(\hat{s}_{-2}\alpha_2)\\ &= \left(\left[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\right]^{1/2}\beta_1\right)\alpha_2+\alpha_1\left(\left[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}-1)\right]^{1/2}\beta_2\right) \quad (٤)\\ &= \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\end{aligned}$$

وبمساواة المعادلتين (٣) و(٤) نصل إلى أن المعادلة المطلوبة هي:

$$\boxed{|1,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\}}$$

فماذا تعني لنا هذه المعادلة؟ تعني أن الدالة المميزة $\langle 1,0| = \langle S,M_S|$ ماهي إلا تجميع خطي (Linear combination) من الدوال المميزة $\langle s_1,m_1|\langle s_2,m_2|$ من هذا المثال نلاحظ أنه في حالة التجميع الخطي فإن العلاقة $m_1+m_2=m$ يجب أن تتحقق.

واجب منزلي: استخدم نفس الطريقة السابقة للتحقق من المستوى:

$$\boxed{|1,-1\rangle = \beta_1\beta_2} \quad (٥)$$

وهذه المستويات الثلاثة المسموح بها للقيمة $S_{max}=1$ ، وهما $\langle 1,-1|,\langle 1,0|,\langle 1,1|$، مع ملاحظة أن درجة الانتماء هي:

$$d_1 = 2S_{max}+1 = 2\times1+1 = 3$$

كما تم حسابهما سابقاً.

لإيجاد المستويات المسموح بها في الحالة الثانية، $S_{min}=0$ ، نعلم أن المستوى المطلوب حسابه له القيمة $M_S=0$ وهو $\langle 0,0|$. سوف نفترض أن المستوى $\langle 0,0|$ يأخذ الشكل التالي:

$$|0,0\rangle = c_1\alpha_1\beta_2 - c_2\alpha_2\beta_1 \quad (٦)$$

حيث إننا أخبرنا سابقاً أن الدالة المميزة $|S, m_S\rangle$ ماهي إلا تجميع خطي من الدوال المميزة $(|s_1, m_1\rangle |s_2, m_2\rangle)$.

شرط المعايرة للمعادلة (٦) يتطلب:

$$\langle 0,0|0,0\rangle = |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

وشرط تعامدها مع الدالة $|1,0\rangle$ يتطلب:

$$\langle 0,0|0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}c_1 + \sqrt{\frac{1}{2}}c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1$$

ومن شرطي المعايرة و التعامد نجد أن:

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

وأخيراً نصل إلى الشكل النهائي للدالة:

$$\boxed{|0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right\}} \qquad (٧)$$

وتلخص الدوال بالحالتين كالآتي:

$$\chi_S = \left\{\begin{matrix} |11\rangle & = & |\alpha\rangle_1|\alpha\rangle_2 \\ |10\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2 + |\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right] \\ |1-1\rangle & = & |\beta\rangle_1|\beta\rangle_2 \end{matrix}\right\} \text{ triplet states}$$

$$\chi_A = \ |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\beta\rangle_1|\alpha\rangle_2 - |\alpha\rangle_1|\beta\rangle_2\right] \quad \text{singlet states}$$

الدوال χ_S يقال عنها: إنها دوال متماثلة (symmetric wavefunction)، لأننا لو بدلنا الترقيم السفلي 1 و2 نجد أن χ_S لا تتغير إشارتها. χ_A هي دالة مضادة للتماثل (antisymmetric wavefunction)، لأننا لو بدلنا الترقيم السفلي 1 و2 نجد أن χ_A تتغير إشارتها.

من المثال السابق يتضح لنا أن جميع الدوال المميزة $|S,M_S\rangle$ ماهي إلا تجميع خطي من الدوال المميزة $|s_1,m_1\rangle|s_2,m_2\rangle$. وتحسب معاملات التجميع c_i إما باستخدام المؤثرات التصاعدية والتنازلية، أو باستخدام المتسلسلة:

$$|S,M_S\rangle = \sum_{m_1+m_2=m} C^{s_1,s_2,S}_{m_1,m_2,M_S} |s_1,s_2\rangle |m_l,m_2\rangle \qquad (٨)$$

حيث المعامل $C^{s_1,s_2,S}_{m_1,m_2,M_S}$ يسمى معاملات كلبش_جوردن وله خواص مهمة نتناولها بالملحق A.١٠. ولنا تعليق مهم هنا، وهو أن معاملات كلبش_جوردن سوف تظهر لنا أهميتها عندما نتعامل مع جسيمين أو أكثر. وهذا ناتج من الصعوبة الرياضية لاستخدام المؤثرات التنازلية (أو التصاعدية) مع جسيمين فأكثر.

مثال: تحقق من أن الدالة $\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$ لها القيمة $M_S = 0$.

الحل: للتحقق من أن الدالة $\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)$ لها القيمة $M_S = 0$ يجب أن نسترجع معادلة القيم المميزة $\hat{S}_z\psi = M_S\psi$، لذلك يجب أن نؤثر على الدالة ψ بالمؤثر $\hat{S}_z$ كالتالي:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_z\sqrt{\frac{1}{2}}(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) &= \sqrt{\frac{1}{2}}(\hat{s}_{1z} + \hat{s}_{2z})(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}}\left[\beta_2(\hat{s}_{1z}\alpha_1) - \alpha_2(\hat{s}_{1z}\beta_1) + \alpha_1(\hat{s}_{2z}\beta_2) - \beta_1(\hat{s}_{2z}\alpha_2)\right]\\
&= \hbar\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\beta_2\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\beta_1 - \frac{1}{2}\alpha_1\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_1\alpha_2\right) = 0
\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. لاحظ هنا أن المؤثر $\hat{S}_{iz}$ قد أَثرَ على الدالة ذات الرمز i فقط.

واجب منزلي: تحقق من أن:

$$\begin{aligned}
\hat{S}^2 = (\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 &= \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2\\
&= \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\left[\hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z} + \frac{1}{2}(\hat{s}_{+1}\hat{s}_{-2} + \hat{s}_{-1}\hat{s}_{+2})\right]\\
&= \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z} + (\hat{s}_{+1}\hat{s}_{-2} + \hat{s}_{-1}\hat{s}_{+2})
\end{aligned}$$

مثال: تحقق من أن الدالة $\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right)$ لها القيمة $S = 0$.

الحل: المطلوب هنا أن نثبت أن (مع استخدام $\hbar = 1$)

$$\hat{S}^2\psi = 0\,\psi$$

باستخدام وتجميع العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_1^2\psi &= \tfrac{3}{4}\psi \\
\hat{s}_2^2\psi &= \tfrac{3}{4}\psi \\
2\hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z}\psi &= 2\left(-\tfrac{1}{4}\right)\psi \\
\hat{s}_{+1}\hat{s}_{-2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right) &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(0 - \alpha_1\beta_2\right) \\
\hat{s}_{-1}\hat{s}_{+2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right) &= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\beta_1\alpha_2 - 0\right)
\end{aligned}$$

نصل للمطلوب.

واجب منزلي: تحقق من أن الدالة $\psi = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\right)$ لها القيم $M_S = 0$ و $S = 1$، بمعنى أن:

$$\hat{S}^2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right) = 1(1+1)\hbar^2\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right),$$

$$\hat{S}_z\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right) = 0\hbar\sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right)$$

٥- أمثلة منوعة

١- احسب القيم والدوال المميزة للمؤثر $\hat{S}_y$.

الحل: معادلة القيم المميزة تعرف بالمعادلة

$$\det\left|S_y - \lambda I\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\begin{pmatrix} \lambda & -i \\ i & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

ومنها نحصل على المعادلة التي تحدد القيم المميزة:

$$(2\lambda/\hbar)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}$$

القيمة المميزة الأولى $\lambda = \frac{\hbar}{2}$ تعطي $ia = b$. وباستخدام شرط المعايرة $a^2 + b^2 = 1$ نجد أن $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$. للقيمة المميزة الثانية $\lambda = -\frac{\hbar}{2}$ تعطي $ia = -b$. وباستخدام شرط المعايرة $a^2 + b^2 = 1$ نجد أن $ia = -b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. الجدول التالي يحتوى على ملخص للمستويات والقيم المميزة:

القيم المميزة	الرمز	المستويات المميزة
$\frac{\hbar}{2}$	$\lvert +_y\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha + i\beta\}$
$-\frac{\hbar}{2}$	$\lvert -_y\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\alpha - i\beta\}$

مع ملاحظة مهمة أنه من السهل أن نعكس المستويات المميزة السابقة لنحصل على:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|+_y\rangle + |-_y\rangle\right\};$$

$$|-\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left\{|+_y\rangle - |-_y\rangle\right\}$$

إن المقدرة على التغيير من نظام إلى نظام آخر تعد من الأدوات المهمة. على سبيل المثال، إذا اعتبرنا الدالة:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

للقاعدة S_z، فإننا نستطيع تحويلها إلى القاعدة S_y كالتالي:

$$|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left\{|+_y\rangle + |-_y\rangle\right\} - \frac{bi}{\sqrt{2}}\left\{|+_y\rangle - |-_y\rangle\right\}$$
$$= \left(\frac{a-ib}{\sqrt{2}}\right)|+_y\rangle + \left(\frac{a+ib}{\sqrt{2}}\right)|-_y\rangle$$

٣- أوجد الدوال والقيم المميزة لجسيم مغزلة على محور اعتباري باتجاه متجه الوحدة $\hat{n}$.

الحل: بفرض أن متجه الوحدة الاعتباري هو:

$$\hat{n} = \cos\varphi \sin\theta\, \hat{x} + \sin\varphi \sin\theta\, \hat{y} + \cos\theta\, \hat{z}$$

وباستخدام التعريف $\hat{\vec{S}} = \hat{S}_x\, \hat{x} + \hat{S}_y\, \hat{y} + \hat{S}_z\, \hat{z}$ نجد أن:

$$\hat{\vec{S}} \cdot \hat{n} = \hat{S}_n = \cos\varphi \sin\theta\, \hat{S}_x + \sin\varphi \sin\theta\, \hat{S}_y + \cos\theta\, \hat{S}_z$$

واجب منزلي: تأكد من الحسابات التالية:

$$\hat{S}_n = \frac{\hbar}{2}\left\{\cos\varphi \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\varphi \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

مع اعتبار المعادلات المميزة:

$$\hat{S}_n|+_n\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_n\rangle \quad ; \quad \hat{S}_n|-_n\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-_n\rangle$$

نستطيع أن نضع الدالة المميزة $|+_n\rangle$ بالصورة العامة:

$$|+_n\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$$

باستخدام المعادلة المميزة $\hat{S}_n|+_n\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_n\rangle$ ، نستطيع كتابة:

$$\left(\cos\varphi\sin\theta\,\hat{S}_x + \sin\varphi\sin\theta\,\hat{S}_y + \cos\theta\,\hat{S}_z\right)\left(a|+\rangle + b|-\rangle\right) = \frac{\hbar}{2}\left(a|+\rangle + b|-\rangle\right)$$

وباستخدام تأثير كل من المؤثرات $\hat{S}_x$ ، $\hat{S}_y$ ، $\hat{S}_z$ فإن المعادلة المميزة $\hat{S}_n|+_n\rangle = \frac{\hbar}{2}|+_n\rangle$ تؤول إلى المعادلتين:

$$a\cos\varphi\sin\theta + ia\sin\varphi\sin\theta - b\cos\theta = b;$$
$$b\cos\varphi\sin\theta - ib\sin\varphi\sin\theta - a\cos\theta = a$$

ومنهما نجد أن:

$$a = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}e^{-i\varphi}\,b$$

وحيث إن $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ، لذلك نجد أن الثابت:

$$|b|^2 = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بالإمكان اتخاذ حد يحتوي على الطور بحيث إن:

$$b = e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

واجب منزلي: أثبت أن $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

ومن ثم نحن نحصل على الصيغة النهائية بالشكل:

$$|+_n\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle = a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle$$

وهذه هي الدالة المميزة المطلوبة.

٤- ذا تواجد جسيم بالمستوى $|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ ،

أ- احسب احتمالية القياس أن الجسيم مغزله للأعلى أو مغزله للأسفل باتجاه المحور Z .

ب- احسب احتمالية القياس أن الجسيم مغزله للأعلى أو مغزله للأسفل باتجاه المحور Y.

الحل:

أ- أولاً: نضع الدالة المعطاة بدلالة المستويات $|\pm\rangle$ كالتالي:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{5}}|-\rangle$$

لإيجاد احتمالية القياس أن الجسيم مغزله للأعلى $|+\rangle$ ، فإننا نود الحصول على القيمة $|\langle +|\psi\rangle|^2$. ذلك يتأتى بضرب الدالة $|\psi\rangle$ بالدالة $\langle +|$ من اليسار وتربيعها، لنحصل على:

$$|\langle +|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{4}{5} = 0.8$$

لإيجاد احتمالية القياس أن الجسيم مغزله للأسفل $|-\rangle$ ، فإننا نود الحصول على القيمة $|\langle -|\psi\rangle|^2$. ذلك يتأتى بضرب الدالة $|\psi\rangle$ بالدالة $\langle -|$ من اليسار وتربيعها، لنحصل على:

$$|\langle -|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{1}{5} = 0.2$$

لاحظ هنا أن المجموع الكلي للاحتمالات يساوي الواحد، كما نتوقع.

باتجاه المحور Y يجب أن نحول الدالة المعطاة بدلالة المستويات $|\pm_y\rangle$ كالتالي:

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|+\right\rangle + b\left|-\right\rangle = a\left(\frac{\left|+_y\right\rangle + \left|-_y\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) + b\left(\frac{-i\left|+_y\right\rangle + i\left|-_y\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{a-ib}{\sqrt{2}}\right)\left|+_y\right\rangle + \left(\frac{a+ib}{\sqrt{2}}\right)\left|-_y\right\rangle$$

باستخدام القيم $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ و $b = \frac{i}{\sqrt{5}}$ نجد أن:

$$\left|\psi\right\rangle = a\left|+\right\rangle + b\left|-\right\rangle = a\left(\frac{\left|+_y\right\rangle + \left|-_y\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) + b\left(\frac{-i\left|+_y\right\rangle + i\left|-_y\right\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{3}{\sqrt{10}}\left|+_y\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}\left|-_y\right\rangle$$

ومن ثم نجد أن احتمالية قياس جسيم مغزله لأعلى أو مغزله لأسفل باتجاه المحور Y هما بالترتيب:

$$\left|\left\langle +_y \middle| \psi\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{3}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{9}{10} = 0.9;$$
$$\left|\left\langle -_y \middle| \psi\right\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{10}}\right|^2 = \frac{1}{10} = 0.1;$$

٦- تمارين عامة

١- احسب القيم والدوال المميزة للمؤثر $\hat{S}_z$.

٢- وضع جسيم بالمستوى $\left|\psi\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\left|+\right\rangle + \left|-\right\rangle\right)$، أثبت أن $\left\langle \hat{S}_x \hat{S}_y \right\rangle = 0$.

أثبت أن $e^{i\theta\sigma_x} = I\cos\theta + i\sigma_x \sin\theta$

٣- تحقق من نتائج الأقواس التالية:

$$\left[\sigma_+, \sigma_-\right] = \sigma_z; \quad \left[\sigma_z, \sigma_\pm\right] = 2\sigma_\pm;$$

٤- أثبت أن أي مصفوفة من الدرجة الثانية " A " يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = \frac{1}{2}\left(a_o I + \vec{a}.\vec{\sigma}\right);$$

حيث $a_o = Tr(A)$ و $\vec{a} = A\vec{\sigma}$.

٥- تحقق من نتائج الأقواس التالية:

$$\left[\sigma_+, \sigma_-\right] = \sigma_z; \quad \left[\sigma_z, \sigma_\pm\right] = 2\sigma_\pm;$$

٦- اعتبر الجسيمين ١ و٢ لهما الغزل $\frac{1}{2}$ ، والمؤثران $\hat{s}_1, \hat{s}_2$ اللذان يؤثران على الجزء المغزلي بالدالة.

أ- تأكد أن الدوال في التمثيل المنفصل هي:

$$\left|s_1 s_2 m_1 m_2\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

ب- تأكد أن الدوال في التمثيل الترافقي هي:

$$\left|s_1 s_2 S M_S\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1, 1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1, -1\right\rangle, \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 0, 0\right\rangle$$

ج- احسب القيم المميزة للمؤثر $\left(\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2\right)$ في التمثيل الترافقي.

د- تأكد من الحسابات التالية:

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha_1\beta_2 \right| \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \left| \alpha_1\beta_2 \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\left\langle 1,0\right| + \left\langle 0,0\right|\right]\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2\left[\left|1,0\right\rangle + \left|0,0\right\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\langle 0,0\right|\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2\left|0,0\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle 1,0\right|\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2\left|1,0\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}(-\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) \\ &= -\frac{1}{4}\hbar^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha_1\beta_2 \right| \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \left| \alpha_1\beta_2 \right\rangle &= \left\langle \alpha_1\beta_2 \right| \hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z} + \frac{1}{2}\left(\hat{s}_{+1}\hat{s}_{-2} + \hat{s}_{+2}\hat{s}_{-1}\right)\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_1\beta_2 \right| \hat{s}_{1z}\hat{s}_{2z}\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle + \cancel{\frac{1}{2}\left\langle \alpha_1\beta_2 \right|\left(\hat{s}_{+1}\hat{s}_{-2} + \hat{s}_{+2}\hat{s}_{-1}\right)\left|\alpha_1\beta_2\right\rangle}\end{aligned}$$

$$\left\langle \alpha_1\alpha_2 \right| \hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 \left| \alpha_1\beta_2 \right\rangle = \left\langle\left[\left\langle 1,0\right| + \left\langle 0,0\right|\right]\right|\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2\left|\left[\left|1,0\right\rangle + \left|0,0\right\rangle\right]\right\rangle = 0$$

ملحق (10.A)
معاملات كلبش_جوردن

لقد وجد بالأمثلة بهذا الباب أن جميع الدوال المميزة المقترنة $\left|s_1 s_2; SM_S\right\rangle$ ماهي إلا تجميع خطي من الدوال المميزة المنفصلة $\left|s_1, m_{s_1}\right\rangle\left|s_2, m_{s_2}\right\rangle$، مع وجود الشرط $M_S = m_{s_1} + m_{s_2}$. وقد تم حساب معاملات التجميع c_i باستخدام المؤثرات التصاعدية والتنازلية. وفي هذا الملحق سوف نتناول طريقة أخرى لحساب المعاملات c_i باستخدام المتسلسلة:

$$\left|s_1 s_2; SM_S\right\rangle = \sum_{m_{s_1}} \sum_{m_{s_2}} C^{s_1, s_2, S}_{m_{s_1}, m_{s_2}, M_S} \left|s_1, m_{s_1}\right\rangle \left|s_2, m_{s_2}\right\rangle \qquad (1)$$

حيث المعاملات $C^{s_1, s_2, S}_{m_{s_1}, m_{s_2}, M_j} = C_{m_{s_1}, m_{s_2}}$ تسمى معاملات كلبش_جوردن. طريقة حساب المعاملات $C_{m_{j_1}, m_{j_2}}$ وخواصها تحتاج لتفاصيل عديدة بعيدة عن مستوى هذا الكتاب، لذا سوف نعرض جداول لبعض القيم الخاصة التي تفيدنا في دراستنا.

$\left|S, M_S\right\rangle$

m_{s_1}	m_{s_2}	$\left\|1,1\right\rangle$	$\left\|1,0\right\rangle$	$\left\|0,0\right\rangle$	$\left\|1,-1\right\rangle$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	١	٠	٠	٠
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	٠	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	٠
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	٠	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	٠
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	٠	٠	٠	١

جدول (1) معاملات كلبش_جوردن $C_{m_{j_1}, m_{j_2}}$ للقيم $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$.

مثال: افترض فقط الحركة المغزلية لإلكترونين، استخدم الجدول (1) لحساب الدالة المقترنة $\left|s_1, s_2; S, M_S\right\rangle \equiv \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0\right\rangle$، وللاختصار سوف نستخدم $\left|s_1, s_2; S, M_S\right\rangle \equiv \left|S, M_S\right\rangle \equiv \left|1, 0\right\rangle$.

الحل: من العمود الرابع بالجدول (1) نجد أن الدالة المترافقة $|1,0\rangle$ تتكون من التجميع الخطي $\alpha_2\beta_1$ و $\alpha_1\beta_2$ لكل منهما. من ثم نحن نتوقع حيث إن $M_S = m_{s_1} + m_{s_2} = 0$ الصورة العامة للدالة $|1,0\rangle$ تأخذ الشكل:

$$|1,0\rangle = C_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\alpha_1\beta_2 + C_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\alpha_2\beta_1 \tag{2}$$

ومن الجدول السابق (بالنظر رأسياً بالعمود الرابع) نجد أن:

$$C_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = C_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

ومنها نجد:

$$|1,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2\right) \tag{4}$$

واجب منزلي: افترض فقط الحركة المغزلية لإلكترونين، استخدم الجدول (1) للتأكد من أن:

$$|1,1\rangle = \alpha_1\alpha_2 \tag{5a}$$

$$|1,-1\rangle = \beta_1\beta_2 \tag{5b}$$

$$|0,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2\right) \tag{5c}$$

ملحوظة: استخدمنا الجدول (1) لحساب الدوال المقترنة $|s_1s_2;SM_S\rangle$ بدلالة الدوال المنفصلة $|s_1,m_{s_1}\rangle|s_2,m_{s_2}\rangle$. الجدول (1) يُمكننا من حساب الدوال المنفصلة $|s_1,m_{s_1}\rangle|s_2,m_{s_2}\rangle$ بدلالة الدوال المقترنة $|s_1s_2;sm_s\rangle$. على سبيل المثال من الجدول (2.B.1) نجد أن:

$$\begin{aligned} \alpha_1\beta_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,0\rangle + |0,0\rangle\right) \\ \beta_1\alpha_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1,0\rangle - |0,0\rangle\right) \end{aligned} \tag{6}$$

يمكن التأكد من صحة المعادلتين السابقتين، وذلك بطرح وجمع كل من المعادلتين (4) و (5c).