الباب التاسع

المتذبذب التوافقي الخطي باستخدام نظرية المؤثرات

Linear Harmonic Oscillator Using Operator Theory Approach

الباب التاسع

المتذبذب التوافقي الخطي باستخدام نظرية المؤثرات

لقد تمت دراسة المتذبذب التوافقي الخطي بالباب الخامس، وذلك باستخدام المتسلسلات (دالة هيرميت)، ووجد أن الحل يتطلب خبرة رياضية مكثفة بالمعادلات التفاضلية. ولكننا هنا سوف نتعامل مع المسألة باستخدام طريقة أخرى، وهي طريقة نظرية المؤثرات.

ولكن لماذا هذه الطريقة؟ ذلك لأننا نستطيع من خلالها حساب القيم المميزة والمتوسطة للكميات الفيزيائية مثل المسافة وكمية الحركة الخطية بدون معرفة مسبقة للدالة المميزة، وهذا يعد إنجازاً كبيراً، حيث إننا أُعلمنا سابقاً أننا لا نستطيع حساب القيم المميزة والمتوسطة للكميات الفيزيائية إلا من خلال معلومية الدالة المميزة، ولهذا تم استخدام المعادلات التفاضلية لإيجادها.

١- المؤثر العددي

دعونا نبدأ بالهملتونيان الخاص بالمتذبذب التوافقي الخطي بالشكل:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \qquad (1)$$

وقد وجدنا سابقاً أن الهملتونيان (١) يحقق معادلة شرودنجر:

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n &= E_n \psi_n, \\ E_n &= \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \qquad (2)$$

حيث E_n و ψ_n هما القيم والدوال المميزة للهملتونيان (١) بالترتيب. ومن الآن فصاعداً سوف نستخدم تعريف ديراك للدالة وهو $\psi_n \equiv |n\rangle$ حيث خاصيتا المعايرة والتعامد للدوال تحكمهما العلاقة:

$$\langle m|n\rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad m = n \\ 0 & \text{for} \quad m \neq n \end{cases}$$

حيث $\delta_{m,n}$ هي دالة كرونكر. ولإتمام مهمتنا؛ دعونا نبدأ أولاً بتعريف المؤثرات الجديدة:

$$\hat{a} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right)$$
$$\hat{a}^{\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} - i\hat{p}\right) \qquad (3)$$

لاحظ هنا أن هذه المؤثرات عُرفت بدلالة مؤثرات لكميات قياسية (وهما المكان x وكمية الحركة الخطية p وتربطهما العلاقة $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$).

واجب منزلي: باستخدام العلاقة $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ، أثبت علاقة التبادل التالية:

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a} = 1 \qquad (4)$$

واجب منزلي: من المعادلة (٣) أثبت أن:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right),$$
$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\right) \qquad (5)$$

مثال: بدلالة المؤثرات الجديدة أثبت أن:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \qquad (6)$$

الحل: من المعادلة (٥) نجد أن:

$$\hat{x}^2 = \left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right)\right]^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right)\left(\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}\right)\right\}$$
$$= \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right\},$$

$$\hat{p}^2 = \left[i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right]^2 = -\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right)\right\}$$
$$= -\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

و من المعادلتين (١) و(٤) نجد:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = -\frac{1}{2m}\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$
$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right) = \underline{\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

سنتوقف هنا قليلاً للتحدث عن المعادلة (٦) التي ظهر فيها مؤثر جديد وهو $\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a}$ ، ويدعي "المؤثر العددي" الذي له الخواص التالية:

١- $\hat{N}$ مؤثر هيرميتي نظراً لأن:

$$\hat{N}^\dagger = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger = \hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{N}.$$

٢- لأن المؤثر $\hat{H}$ مرتبط مع $\hat{N}$ بعلاقة خطية فهما متلازمان، بمعنى أن:

$$\left[\hat{N}, \hat{H}\right] = 0.$$

٣- ونتيجةً للخاصية رقم ٢ فإن $\hat{H}$ و $\hat{N}$ يكون لهما نفس الدالة المميزة $|n\rangle$، وبمقارنة المعادلتين (٢) و(٦) نجد أن:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{N}\,|n\rangle = n|n\rangle \tag{7}$$

نظرية: إذا كانت الدالة المميزة $|n\rangle$ للمؤثر $\hat{N}$ لها القيمة المميزة n فإن $n \geq 0$.

الإثبات: بضرب المعادلة $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ من اليسار بالمتجه $\langle m|$ ينتج:

$$\langle m|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n\langle m|n\rangle = n\delta_{mn}.$$

وحيث إن الطرف الأيسر هو المعيار (Norm) فهو قيمة موجبة ومن ثم فإن $n \geq 0$.

واجب منزلي: أثبت أن:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

٢- المؤثرات الدرجية

دعونا ندرس الآن تأثير كل من $\hat{a}^{\dagger}$ و $\hat{a}$ على الدالة المميزة للمتذبذب التوافقي الخطي $|n\rangle$. بتأثير $\hat{a}$ سوف ينتج لنا متجه جديد، وهو $\hat{a}|n\rangle$. وبتأثير $\hat{H}$ على المتجه الجديد ينتج التالي، (وذلك باستخدام المعادلة (٨)):

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \left\{\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \frac{1}{2}\right)\right\}\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{9}$$

وبتفكيك الطرف الأيمن للمعادلة (٩) نجد:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}\underbrace{\hat{a}^{\dagger}\hat{a}}_{\hat{N}}\right)|n\rangle - \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{a}|n\rangle \tag{10}$$

وباستخدام المعادلتين (٦) و (٧) نصل إلى:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hbar\omega\hat{a}\underbrace{\hat{N}\,|n\rangle}_{n|n\rangle} - \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{a}|n\rangle = \left(n - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{11}$$

وباسترجاع المعادلة $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ينتج:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \left(E_n - \hbar\omega\right)\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{12}$$

واجب منزلي: بطريقة مماثلة للخطوات السابقة أثبت أن:

$$\hat{H}\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) \tag{13}$$

ماذا نستنتج من المعادلتين السابقتين؟ بالنظر أولاً إلى المعادلة (١٢) نجد أنها معادلة قيم مميزة؛ للهملتونيان $\hat{H}$ ولكن لها الدالة المميزة $\hat{a}|n\rangle$ والقيمة المميزة $(E_n - \hbar\omega)$. ومعنى هذا: أن تأثير $\hat{a}$ على الدالة المميزة الأصلية $|n\rangle$، التي لها القيم المميزة E_n، أنتج لنا دالة مميزة جديدة هي $\hat{a}|n\rangle$. هذه الدالة الجديدة جعلت للهملتونيان $\hat{H}$ قيماً مميزةً جديدة، وهي $(E_n - \hbar\omega)$. وحيث إن القيمة المميزة الجديدة للطاقة أقل من القيمة الأصلية E_n، بمقدار وحدة طاقة $(\hbar\omega)$، فإن المؤثر الجديد $\hat{a}$ يدعى المؤثر (الدرجي) السُلمي أو مؤثر الإفناء (annihilation operator) أو المؤثر التنازلي (lowering operator).

بتطبيق نفس التحليل السابق على المعادلة (١٣) نجد أن تأثير $\hat{a}^\dagger$ على الدالة المميزة الأصلية $|n\rangle$، أنتج لنا دالة مميزة جديدة هي $\hat{a}^\dagger|n\rangle$. هذه الدالة الجديدة جعلت للهملتونيان $\hat{H}$ قيماً مميزةً جديدة، وهي $(E_n + \hbar\omega)$. وحيث إن القيمة المميزة الجديدة للطاقة أعلى من القيمة الأصلية E_n، بمقدار وحدة طاقة $(\hbar\omega)$، فإن المؤثر الجديد $\hat{a}^\dagger$ يدعى مؤثر التخليق (creation operator) أو المؤثر التصاعدي (raising operator).

مثال: استخدم مؤثر الفناء $\hat{a}$ لحساب طاقة المستوى الأرضي E_0 للمتذبذب التوافقي الخطي.

الحل: نعلم من دراستنا السابقة: أن الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي الخطي كمية موجبة دائماً. ومن ثم إذا استخدمنا مؤثر الفناء $\hat{a}$ على دالة المستوى الأرضي $|0\rangle$ فإننا لن نحصل على كمية سالبة، ولكن نحصل على صفر، وتمثل رياضياً بالمعادلة:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{14}$$

وهذا الشرط يُسهل لنا الحصول على طاقة أقل مستوى، وذلك بدراسة تأثير $\hat{H}$ على الدالة $|0\rangle$ واستخدام المعادلة (٦) نجد:

$$\begin{aligned}\hat{H}|0\rangle &= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right)|0\rangle \\ &= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle + \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle\end{aligned}$$

لاحظ أنه باستخدام المعادلة (١٤) فإن الحد الأول بالمعادلة السابقة سوف يؤول للصفر، ويتبقى الحد الثاني وهو:

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle \qquad (15)$$

من ثم طاقة المستوى الأرضي للمتذبذب التوافقي الخطي تساوى القيمة:

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega} \qquad (16)$$

من نتيجة المثال السابق نستطيع أن نحسب القيم المميزة العليا باستخدام المؤثر التصاعدي. على سبيل **المثال**: بالتأثير على الدالة المميزة $|0\rangle$ بالمؤثر $\hat{a}^\dagger$ ثم بالمؤثر $\hat{H}$ ينتج (بعد استخدامنا للمعادلة (١٣) مع وضع $n = 0$) المعادلة التالية:

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|1\rangle &= \hat{H}\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right) = \left(E_0 + \hbar\omega\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right)\\ &= \frac{3}{2}\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right) = \frac{3}{2}\hbar\omega|1\rangle \end{aligned} \qquad (17)$$

ومنها نجد أننا حصلنا على معادلة مميزة لها القيمة المميزة $\frac{3}{2}\hbar\omega$. بتكرار العملية السابقة عدد n من المرات نصل إلى القيمة المميزة العامة (انظر المعادلة (٢))

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0,1,2,... \qquad (18)$$

مثال: إذا فرضنا أن المؤثر التصاعدي $\hat{a}^\dagger$ يؤثر على الدالة المميزة $|n\rangle$ ويعطينا المعادلة المميزة:

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = c_{n+1}|n+1\rangle \qquad (19)$$

احسب الثابت c_{n+1}.

الحل: لحساب الثابت c_{n+1} دعونا نتعامل مع الضرب القياسي التالي:

$$\begin{aligned}\langle n\,|\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \left(\langle n\,|\hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right) = \left(\langle\hat{a}^\dagger n\,|\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right)\\ &= (c^*_{n+1})(c_{n+1})\underbrace{\langle n+1|n+1\rangle}_{=1}\\ &= |c_{n+1}|^2 \end{aligned} \qquad (20)$$

حيث استخدمنا $\langle \hat{a}^{\dagger}n| = c_{n+1}^{*}\langle n+1|$ وذلك من المعادلة (١٩). وباستخدام العلاقة $\hat{a}\hat{a}^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1$ بالطرف الأيسر من (٢٠) نجد أن:

$$\begin{aligned} |c_{n+1}|^2 &= \langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+1|n\rangle = \langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle + \langle n|n\rangle \\ &= \langle n|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle + 1 = n+1 \end{aligned} \tag{21}$$

وذلك تم باستخدام المعادلة (٧). ومن (٢١) نجد أن:

$$c_{n+1} = \sqrt{n+1} \tag{22}$$

وهو المطلوب إثباته.

من ثم فإن:

$$\boxed{\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle} \tag{23}$$

مثال: استخدم المعادلة (٢٣) لحساب $\hat{a}^{\dagger 3}|n\rangle$.

الحل: باستخدام المعادلة (٢٣) ثلاث مرات متتالية ينتج:

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) &= \hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger}\left(\sqrt{n+1}|n+1\rangle\right) \\ &= \sqrt{n+1}\hat{a}^{\dagger}\left(\hat{a}^{\dagger}|n+1\rangle\right) \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\left(\hat{a}^{\dagger}|n+2\rangle\right) \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}|n+3\rangle \end{aligned}$$

مثال: استخدم تعريف القيمة المتوسطة $\hat{A}_{m,n} = \langle m|\hat{A}|n\rangle$ لكتابة التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{a}^{\dagger}$.

الحل: بضرب المعادلة (٢٣) من الجهة اليسرى بالمتجه $\langle m|$ ينتج:

$$\langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle \equiv \hat{a}^\dagger_{m,n} = \sqrt{n+1}\langle m | n+1 \rangle$$
$$= \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} = \sqrt{n+1} \times \begin{cases} 1 & \text{for} \quad m = n+1 \\ 0 & \text{for} \quad m \neq n+1 \end{cases}$$

ونجد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{a}^\dagger$ ويعطي بالشكل $\left(\hat{a}^\dagger\right)$ حيث:

$$\left(\hat{a}^\dagger\right) = \begin{array}{c|c} & |0\rangle \quad |1\rangle \quad |2\rangle \quad \cdots \\ \begin{matrix} \langle 0| \\ \langle 1| \\ \langle 2| \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger_{0,0} & \hat{a}^\dagger_{0,1} & \hat{a}^\dagger_{0,2} & 0 & \cdots \\ \hat{a}^\dagger_{1,0} & \hat{a}^\dagger_{1,1} & \hat{a}^\dagger_{1,2} & 0 & \cdots \\ \hat{a}^\dagger_{2,0} & \hat{a}^\dagger_{2,1} & \hat{a}^\dagger_{2,2} & 0 & \cdots \\ \hat{a}^\dagger_{3,0} & \hat{a}^\dagger_{3,1} & \hat{a}^\dagger_{3,2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

واجب منزلي: إذا افترضنا أن المؤثر التنازلي $\hat{a}$ يؤثر على الدالة المميزة $|n\rangle$ ويعطينا المعادلة المميزة الآتية:

$$\hat{a}|n\rangle = c_{n-1}|n-1\rangle \tag{24}$$

أثبت أن $c_{n-1} = \sqrt{n}$.

مثال: استخدم المعادلة (٢٤) لحساب $\hat{a}^3|n\rangle$.

الحل: باستخدام المعادلة (٢٤) ثلاث مرات متتالية ينتج:

$$\hat{a}\hat{a}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hat{a}\hat{a}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) = \sqrt{n}\,\hat{a}\left(\hat{a}|n-1\rangle\right)$$
$$= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\left(\hat{a}|n-2\rangle\right)$$
$$= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\,|n-3\rangle$$

مع وجوب الشرط $n \geq 3$.

مثال: استخدم المعادلتين (٢٣) و (٢٤) لحساب $\langle m|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle$.

الحل: نبدأ أولاً بحساب:

$$\hat{a}\left(\hat{a}^{\dagger}\left|n\right\rangle\right)=\sqrt{n+1}\,\hat{a}\left|n+1\right\rangle=\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\left|n\right\rangle$$

وبضرب المعادلة السابقة من اليسار بالمتجه $\langle m|$ نجد:

$$\begin{aligned}\left\langle m\left|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right|n\right\rangle &=\left(n+1\right)\left\langle m\,|\,n\right\rangle=\left(n+1\right)\delta_{m,n}\\ &=\left(n+1\right)\times\begin{cases}1 & \text{for}\quad m=n\\ 0 & \text{for}\quad m\neq m\end{cases}\end{aligned}$$

واجب منزلي: استخدم المعادلتين (٢٣) و (٢٤) لإثبات أن

$$.\left\langle m\left|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right|n\right\rangle=n\times\begin{cases}1 & \text{for}\quad m=n\\ 0 & \text{for}\quad m\neq m\end{cases}$$

ملخص: لقد وجدنا في هذا الباب الحقائق التالية:

أ- أوجدنا الطاقة الكمية للمتذبذب التوافقي الخطي بالمعادلة (١٨).

ب- أوجدنا كيف يؤثر المؤثر التصاعدي والتنازلي على دالة الطاقة المميزة بالمعادلتين (٢٣) و (٢٤). هاتان المعادلتان مهمتان لحساب القيم المتوسطة للكميات الفيزيائية (مثل المسافة وكمية الحركة الزاوية إلخ).

ج- تم التعامل مع جميع الحسابات بدون اللجوء إلى الصيغة العامة للدالة المميزة أو معرفتها، وهذا هو المهم بهذا الموضوع.

٣- أمثلة محلولة

١- استخدم المعادلات الآتية:

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{a}^{\dagger}\left|m\right\rangle=\sqrt{m+1}\left|m+1\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \left\langle n\left|\hat{a}^{\dagger}\right|m\right\rangle=\sqrt{m+1}\underbrace{\left\langle n\,|\,m+1\right\rangle}_{\delta_{n,m+1}};\\ &\hat{a}\left|m\right\rangle=\sqrt{m}\left|m-1\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \left\langle n\left|\hat{a}\right|m\right\rangle=\sqrt{m}\underbrace{\left\langle n\,|\,m-1\right\rangle}_{\delta_{n,m-1}};\end{aligned}}$$

والعلاقة $x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$ ، للتأكد من صحة الحسابات التالية:

$$\langle l | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle l | a^\dagger | n \rangle + \langle l | a | n \rangle\right]$$
$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n+1}\ \delta_{l,n+1} + \sqrt{n}\ \delta_{l,n-1}\right]$$

ومنه تحقق من أن:

$$\langle l | \hat{x} | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \times \begin{cases} \sqrt{n+1} & \text{for } \ l = n+1 \\ \sqrt{n} & \text{for } \ l = n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و

$$\langle l | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle \left(a + a^\dagger\right)^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\langle l | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\langle l | a^\dagger a^\dagger | n \rangle + \langle l | a^\dagger a | n \rangle + \langle l | a a^\dagger | n \rangle + \langle l | a a | n \rangle\right]$$
$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\ \delta_{l,n+2} + (2n+1)\ \delta_{l,n} + \sqrt{n(n-1)}\ \delta_{l,n-2}\right]$$

ومنه تحقق من أن:

$$\langle l | \hat{x}^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \times \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n+2)} & \text{for } \ l = n+2 \\ (2n+1) & \text{for } \ l = n \\ \sqrt{n(n-1)} & \text{for } \ l = n-2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

٢- استخدم التعريف $\hat{A}_{n,n} = \langle n | \hat{A} | n \rangle$ لحساب كل من القيم: $\langle \hat{x} \rangle$ ، $\langle \hat{x}^2 \rangle$ ، $\langle \hat{p} \rangle$ و $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

الحل: باستخدام المعادلات بالمثال السابق (وأيضاً المعادلة (٤)) نجد أن:

$$\langle \hat{x} \rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle\left(a+a^\dagger\right)^2\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n\,|\,\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle\right\}\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n\,|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n\,|\,2\hat{a}\hat{a}^\dagger+1\middle|n\right\rangle\right\}\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n\,|\,2\hat{N}+1\middle|n\right\rangle\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)\\ &= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

وبالمثل:

$$\langle \hat{p}\rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}^2\rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\langle\left(a-a^\dagger\right)^2\right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\left\langle n\,|\,\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle\right\}\\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\left\langle n\,|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\middle|n\right\rangle\right\} = \frac{m\hbar\omega}{2}\times 2\times\left\{\left\langle n\,|\,\hat{N}+\tfrac{1}{2}\middle|n\right\rangle\right\}\\ &= m\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

٣- استخدم التعريف $(\hat{A}) = \hat{A}_{m,n} = \langle m\,|\,\hat{A}\,|\,n\rangle$ لكتابة المصفوفات التي تمثل كلاً من المؤثرات التالية: $\hat{a}$ ، $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ ، $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ ، $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

الحل:

$$(\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}; \qquad (\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix};$$

$$\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}; \quad \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

٤- استخدم مؤثر الفناء $\hat{a}$ لحساب دالة المستوى الأرضي ψ_0 للمتذبذب التوافقي الخطي.

الحل: علمنا سابقاً أن:

$$\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$$

وباستخدام $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right)$ حيث $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ بالمعادلة السابقة نجد:

$$\left(i(-i\hbar\frac{d}{dx}) + m\omega x\right)\psi_o(x) = 0$$

$$\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\psi_o(x) = 0$$

ومع بعض الترتيبات نجد:

$$\hbar\frac{d\psi_o(x)}{dx} = -m\,\omega x\,\psi_o$$

$$\frac{d\psi_o(x)}{\psi_o} = -\frac{m\,\omega}{\hbar}x\,dx$$

وبإجراء التكامل لكلا الطرفين، نجد:

$$\psi_o(x) = Ne^{-\alpha x^2}, \qquad \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

حيث N هو ثابت التكامل. من شرط المعايرة $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_o^2(x)\,dx = 1$ نجد أن $N^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$.

وقد استخدمنا التكامل القياسي $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

٥- أثبت أن:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

الحل: باستخدام العلاقة $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ نجد أن

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle = \sqrt{1}|1\rangle; \quad \hat{a}^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle; \quad \hat{a}^\dagger|2\rangle = \sqrt{3}|3\rangle$$

من ثم فإن:

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}^\dagger|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3\times 2}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3\times 2\times 1}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^3|0\rangle$$

ولهذا فإن الحالة العامة تحكمها العلاقة: $|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$.

٦- جسيم كتلة m واقع تحت تأثير جهد متذبذب توافقي خطي بدأ عند الزمن $t=0$ من المستوى $\left|\psi(t=0)\right\rangle = N\left(\sqrt{2}|0\rangle + |3\rangle\right)$.

أ- تحقق من ثابت العيارية.

$$1 = \langle \psi,0|\psi,0\rangle = N^2\left[2\langle 0|0\rangle - \sqrt{2}\langle 0|3\rangle - \sqrt{2}\langle 3|0\rangle + \langle 3|3\rangle\right]$$
$$= N^2\left[2-0-0+1\right] = 3N^2$$
$$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ب- تحقق من أن المستوى للجسيم عند الزمن t يعطي بالعلاقة:

$$|\psi,t\rangle = N\left[\sqrt{2}e^{-iE_o t/\hbar}|0\rangle - e^{-iE_3 t/\hbar}|3\rangle\right]; \qquad E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}e^{-i\omega t/2}|0\rangle - e^{-i7\omega t/2}|3\rangle\right]$$

ج- تحقق من القيمة المتوقعة التالية:

$$\langle \psi,t|\hat{H}|\psi,t\rangle = \langle \psi,0|\hat{H}|\psi,0\rangle$$
$$= |N|^2\left[2E_o + (-1)^2E_3\right] = \tfrac{2}{3}E_o + \tfrac{1}{3}E_3$$
$$= \frac{3}{2}\hbar\omega$$

حيث استخدمنا الهاملتونيان $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$.

د- تحقق من القيمة المتوقعة التالية:

$$\langle \psi,t|\hat{V}|\psi,t\rangle = \langle \psi,0|\tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2|\psi,0\rangle$$
$$= \frac{1}{4}\hbar\omega|N|^2\left[2\langle 0|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|0\rangle + \langle 3|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|3\rangle\right]$$
$$= \frac{1}{12}\hbar\omega\left[2(0+1)+(6+1)\right] = \frac{3}{4}\hbar\omega$$

وذلك باستخدام

$$\hat{V} = \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\hbar\omega\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\hbar\omega\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2}\right)$$

والعلاقات:

$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ ، $\hat{a}^\dagger|m\rangle = \sqrt{m+1}|m+1\rangle$ ، $\hat{a}|m\rangle = \sqrt{m}|m-1\rangle$ ،

$\langle 0|\hat{a}^2|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^2|3\rangle = 0,$ الخ.

٤- تمارين عامة

١- للمتذبذب التوافقي الخطي استخدم التعريف $\langle n | \hat{A} | n \rangle = \langle \hat{A} \rangle$ لإثبات أن

$\langle \hat{a} \rangle$	0	$\langle \hat{x} \rangle$	0
$\langle \hat{a}^\dagger \rangle$	0	$\langle \hat{p} \rangle$	0
$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$	$n+1$	$\langle \hat{x}^2 \rangle$	$\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$
$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$	n	$\langle \hat{p}^2 \rangle$	$m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

٢- احسب القيم:

$$\Delta\hat{x} = \sqrt{<\hat{x}^2> - <\hat{x}>^2} \quad \text{و} \quad \Delta\hat{p} = \sqrt{<\hat{p}^2> - <\hat{p}>^2}$$

و أثبت أن $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = (n+\frac{1}{2})\hbar$.

٣- أثبت العلاقات التالية:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right);$$

$$\left[\hat{a}, H\right] = \hbar\omega\hat{a};$$

$$\left[\hat{a}^\dagger, H\right] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger$$

٤- استخدم مؤثر الفناء $\hat{a}$ لحساب دالة المستوى $\langle 1|$ للمتذبذب التوافقي الخطي.

٥- اعتبر الهملتونيان للمتذبذب التوافقي الخطي باتجاهي المحور السيني والصادي للإحداثيات الكرتيزية يُعطى بالشكل:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{k}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \qquad k = m\omega^2$$

أثبت أن

$$\hat{H} = \left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1\right)\hbar\omega,$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{H}\right] = 0$$

حيث

$$\hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x\right), \qquad \hat{p}_y = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y\right)$$

ملحوظة: استخدم علاقات التبادل التالية:

$$\left[\hat{x},\hat{y}\right] = \left[\hat{x},\hat{p}_y\right] = \left[\hat{y},\hat{p}_x\right] = \left[\hat{p}_x,\hat{p}_y\right] = 0,$$
$$\left[\hat{a}_x,\hat{a}_y\right] = \left[\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger\right] = \left[\hat{a}_x^\dagger,\hat{a}_y\right] = \left[\hat{a}_x^\dagger,\hat{a}_y^\dagger\right] = 0.$$

٦- باستخدام الهملتونيان:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1\right)\hbar\omega$$

والدالة

$$\left|n_x,n_y\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1,0\right\rangle + \left|0,1\right\rangle\right],$$

أثبت أن

$$\left\langle n_x,n_y\right|\hat{H}\left|n_x,n_y\right\rangle = 2\hbar\omega$$

٧- أثبت أن

$$\left\langle l\,|\,\hat{x}^3\,|\,n\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \times \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} & \text{for } l = n+3 \\ 3(n+1)\sqrt{n+1} & \text{for } l = n+1 \\ 3n\sqrt{n} & \text{for } l = n-1 \\ \sqrt{n(n-1)(n-2)} & \text{for } l = n-3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و

$$\left\langle l\,|\,\hat{x}^4\,|\,n\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2} \times \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} & \text{for } l = n+4 \\ (4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)} & \text{for } l = n+2 \\ 6n^2+6n+3 & \text{for } l = n \\ (4n-2)\sqrt{n(n-1)} & \text{for } l = n-2 \\ \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} & \text{for } l = n-4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

٨-جسيم بدأ من المستوى $\left|\psi(t=0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$ عند الزمن $t = 0$.

أ- تحقق من أن المستوى للجسيم عند الزمن t يُعطى بالعلاقة:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_o t/\hbar}\left|0\right\rangle + e^{-iE_1 t/\hbar}\left|1\right\rangle\right),$$
$$E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

ب- أثبت أن:

$$\left\langle x(0)\right\rangle = \left\langle\psi(0)\right|x\left|\psi(0)\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},$$
$$\left\langle p(0)\right\rangle = \left\langle\psi(0)\right|p\left|\psi(0)\right\rangle = 0,$$
$$\left\langle x(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right|x\left|\psi(t)\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t),$$
$$\left\langle p(t)\right\rangle = \left\langle\psi(t)\right|p\left|\psi(t)\right\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

ج- باستخدام نظرية إيرنفست أثبت أن:

$$\left\langle \dot{x}(t)\right\rangle = \frac{\left\langle p(t)\right\rangle}{m},$$
$$\left\langle \dot{p}(t)\right\rangle = -m\omega^2\left\langle x(t)\right\rangle$$

د- حل المعادلات التفاضلية السابقة وتأكد من الحل:

$$\left\langle x(t)\right\rangle = \left\langle x(0)\right\rangle\cos(\omega t) + \frac{\left\langle p(0)\right\rangle}{m}\sin(\omega t),$$
$$\left\langle p(t)\right\rangle = \left\langle p(0)\right\rangle\sin(\omega t) - m\omega^2\left\langle x(0)\right\rangle\cos(\omega t)$$