الباب الثامن

التطور الزمني للنظام الكمي

(Time evolution of the quantum system)

الباب الثامن
التطور الزمني للنظام الكمي

قبل أن نستعرض التصورات المختلفة للتطور الزمني لنظام ميكانيكا الكم، سوف نستعرض العلاقة بين الكميات الفيزيائية التقليدية، التي ترتبط بقوانين نيوتن للحركة، مع نظائرها في ميكانيكا الكم. لذلك سوف نبدأ بتصور شرودنجر للتطور الزمني للنظام وذلك من خلال حساب معدل التغير للقيمة المتوقعة لمؤثر، حيث إنها ستكون حجر الأساس لاشتقاق قوانين الحركة في ميكانيكا الكم.

١- تصور شرودنجر للتطور الزمني للنظام

تم سابقاً تعريف القيمة المتوقعة، أو المتوسطة، لكمية فيزيائية لها المؤثر $\hat{A}_s$ بالمعادلة:

$$<\hat{A}_s>_t = <\psi_s(t)|\hat{A}_s|\psi_s(t)> = \int_{\text{all space}} \psi_s^*(t)\hat{A}_s\psi_s(t)\,d\tau \qquad (1)$$

حيث الدليل السفلي s للدالة والمؤثر يعبر عن تمثيل شرودنجر، و ψ_s هي الدالة المميزة والمعيرة للمؤثر $\hat{A}_s$ ، و ψ_s^* هي المرافق للدالة ψ_s. وقبل أن نبدأ بإيجاد معدل التغير للقيمة المتوقعة للمؤثر $\hat{A}$ دعونا نسترجع معادلة شرودنجر الزمنية بالصورة:

$$\begin{aligned} \hat{H}_s|\psi_s(t)\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_s(t)\rangle \\ \Rightarrow \quad \frac{\hat{H}_s}{i\hbar}|\psi_s\rangle &= |\dot{\psi}_s> \end{aligned} \qquad (2a)$$

ومنها نجد المرافق:

$$-\frac{1}{i\hbar}<\psi_s|\hat{H}_s = <\dot{\psi}_s| \qquad (2b)$$

وقد استخدمنا الاختصار $\frac{\partial}{\partial t}|\psi_s\rangle = |\dot{\psi}_s>$ للتعريف بالمشتقة الأولى بالنسبة للزمن، والخاصية الهيرميتية للهاملتونيان $\hat{H}_s = \hat{H}_s^\dagger$.

بتفاضل المعادلة (1) واستخدام المعادلتين $(2a)$ و $(2b)$ نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}_s\rangle = \underbrace{\langle \dot{\psi}_s |}_{-\frac{1}{i\hbar}\langle\psi_s|\hat{H}_s} \hat{A}_s|\psi_s\rangle + \langle\psi_s|\hat{A}_s \underbrace{|\dot{\psi}_s>}_{\frac{1}{i\hbar}\hat{H}_s|\psi_s\rangle} + \langle\psi_s|\dot{\hat{A}}|\psi_s\rangle$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi_s|\hat{H}_s\hat{A}_s|\psi_s\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi_s|\hat{A}_s\hat{H}_s|\psi_s\rangle + \langle\psi_s|\dot{\hat{A}}|\psi_s\rangle \qquad (3)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\hat{H}_s,\hat{A}_s\right]\right\rangle + \left\langle\dot{\hat{A}}\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{A}_s,\hat{H}_s\right]\right\rangle + \left\langle\dot{\hat{A}}\right\rangle$$

المعادلة (3) هي الصيغة النهائية لمعدل التغير للقيم المتوقعة، أو هي معادلة الحركة، للمؤثر $\hat{A}_s$. ونقف هنا لنُعطي بعض التعليقات المهمة:

أ- إذا كانت $\hat{A}_s$ لا تعتمد صراحةً على الزمن فإن

$$.\left\langle\frac{\partial\hat{A}_s}{\partial t}\right\rangle = 0$$

ب- إذا كان $\hat{A}_s$ لا تعتمد صراحةً على الزمن وأيضاً متبادلة مع $\hat{H}_s$، بمعنى أن $\left[\hat{H}_s,\hat{A}_s\right] = 0$، فإن:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}_s\rangle = 0$$

وهذا يعنى أن:

$$\langle\hat{A}_s\rangle = \text{ثابت}$$

ويصبح المؤثر $\hat{A}_s$ ثابت للحركة، ويتبع قانون حفظ الكمية (مثال على ذلك الطاقة الكلية، كمية الحركة الخطية، ...الخ)

ج- مقارنةً بالميكانيكا التقليدية نعلم أن:

$$\frac{dA_s}{dt} = \{A_s, H_s\} + \frac{\partial A_s}{\partial t}$$

حيث H_s هو الهملتونيان و { } هي أقواس بواسون وتعطي بالمعادلة:

$$\{A_s,H_s\} = \left(\sum_i \frac{\partial A_s}{\partial q_i}\frac{\partial H_s}{\partial p_i} - \frac{\partial A_s}{\partial p_i}\frac{\partial H_s}{\partial q_i}\right) \qquad (٤)$$

حيث p_i و q_i هما كميات قانونية بالميكانيكا التقليدية، وتسمى إحداثيات عامة. وبمقارنة المعادلة (٤) بالمعادلة (٣) نجد أن أقواس بواسون الكلاسيكية ترتبط بأقواس التبادل الكمية بالعلاقة:

$$\{A_s, H_s\} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_s, \hat{H}_s\right]. \qquad (٥)$$

إلى الآن، ما تم مناقشته وشرحه هنا يسمى تصور شرودنجر للتطور الزمني للنظام. وقد تم افتراض اعتماد الدالة على الزمن واستقلالية المؤثر عن الزمن. وفي الفصلين التاليين i و ii سوف نستعرض قوانين الحركة في ميكانيكا الكم في تصور شرودنجر قبل أن نستعرض التصورات الأخرى. الدليل السفلي S للدالة والمؤثرات سوف نتغاضى عنه وذلك للتبسيط.

i- نظرية إيرنفست

نظرية إيرنفست سوف تخبرنا أنه بإمكاننا استخدام قوانين نيوتن التقليدية للحركة في ميكانيكا الكم إذا أبدلنا جميع المتغيرات التقليدية بالقيم المتوقعة لمؤثراتها. لإثبات ذلك، نعلم أن قوانين نيوتن تعرف بالعلاقات:

$$\boldsymbol{p} = m\,\mathbf{v} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}p_x. \qquad (٦)$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (٧)$$

حيث $\boldsymbol{p}$ هي كمية الحركة الخطية، V هي طاقة الوضع و $\boldsymbol{F}$ هي القوة الخارجية المؤثرة. وللتبسيط سوف نتعامل مع المتغيرات في بعد واحد ولنفترضه X وسنستخدم متغيراً مثل الإزاحة x ومؤثره $\hat{x}$ والهملتونيان:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + V(x). \qquad (٨)$$

من المعادلة (٣) نجد أن معدل التغير للقيمة x، التي لا تعتمد صراحة على الزمن، هو:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}<\hat{x}> &= \frac{i}{\hbar}<\left[\hat{H}, \hat{x}\right]> = \frac{i}{\hbar}<\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2, \hat{x}\right]> + \frac{i}{\hbar}<\underbrace{\cancel{\left[V(x), \hat{x}\right]}}_{=0}> \\ &= -\frac{i\hbar}{2m}<\left(\nabla_x^2\hat{x} - \hat{x}\nabla_x^2\right)> \end{aligned} \qquad (٩)$$

وبمعلومية أن $\nabla_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ و $\nabla_x^2\hat{x} = \hat{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial}{\partial x}$ فإننا نجد أن:

$$\frac{d}{dt}<\hat{x}> = -\frac{i\hbar}{2m}<2\frac{\partial}{\partial x}> = \frac{1}{m}<\hat{p}_x> \qquad (١٠)$$

حيث استخدمنا العلاقة $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. المعادلة (١٠) هي صيغة إيرنفست بميكانيكا الكم للمعادلة التقليدية (٦).

من المعادلة (٣) نجد أن معدل التغير للقيمة $\hat{p}_x$ هو:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} < \hat{p}_x > &= \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] > = < \left[V(x), \frac{\partial}{\partial x}\right] > \\ &= < V\frac{\partial}{\partial x} > - < \frac{\partial}{\partial x} V > = - < \frac{\partial V}{\partial x} > \end{aligned} \tag{11}$$

حيث استخدمنا علاقة التبادل $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$ والعلاقة $\frac{\partial}{\partial x}(V\psi) = \psi\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial \psi}{\partial x}$. المعادلة (١١) هي صيغة إيرنفست بميكانيكا الكم للمعادلة التقليدية (٧).

---

ii- نظرية فيريال

نظرية فيريال سوف تعطينا علاقة بين القيم المتوقعة لطاقتي الحركة والجهد. ولاشتقاق هذه العلاقة نبدأ باستخدام المعادلة (٣) فنجد أن معدل التغير لحاصل ضرب المؤثرين $\hat{x}\,\hat{p}_x$ يعطى بالشكل:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{x}\,\hat{p}_x \right\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\hat{H}, \hat{x}\,\hat{p}_x\right] \right\rangle \tag{12}$$

باستخدام علاقات التبادل التالية:

$$\begin{aligned} &\left[\hat{H}, \hat{x}\,\hat{p}_x\right] = \hat{x}\left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] + \left[\hat{H}, \hat{x}\right]\hat{p}_x, \\ &\left[\hat{H}, \hat{x}\right] = -i\hbar\frac{\hat{p}_x}{m}, \quad \left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] = i\hbar\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \end{aligned}$$

نجد أن المعادلة (١٢) تؤول إلى:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\langle \hat{x}\,\hat{p}_x \right\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\left\{ \frac{i\hbar}{m}\underbrace{\left\langle \hat{p}_x^2 \right\rangle}_{2m\left\langle \hat{T} \right\rangle} - i\hbar\left\langle \hat{x}\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right\rangle \right\}, \\ &= 2\left\langle \hat{T} \right\rangle - \left\langle \hat{x}\frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right\rangle \end{aligned}$$

حيث $\frac{d}{dt}\langle \hat{x}\ \hat{p}_x \rangle = 0$ لأنها لا تعتمد صراحةً على الزمن، لذلك نجد أن:

$$\boxed{2\left\langle \hat{T} \right\rangle = \left\langle \hat{x}\ \frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle} \tag{١٣}$$

وهذه هي نظرية فيريال.

لهذه النظرية تطبيقاتها العديدة، ومنها تطبيقها على الدوال المتجانسة (انظر الملحق (٨-A)). حيث إنه بالنسبة لدالة جهد V من الدرجة n نجد أن:

$$\left\langle \hat{x}\ \frac{\partial \hat{V}}{\partial x} \right\rangle = n\left\langle \hat{V} \right\rangle$$

ومنها نجد أن نظرية فيريال تبسط إلى الصورة:

$$2\left\langle \hat{T} \right\rangle = n\left\langle \hat{V} \right\rangle$$

وحيث إن

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \left\langle \hat{T} \right\rangle + \left\langle \hat{V} \right\rangle = E$$

فإن

$$\left\langle \hat{V} \right\rangle = \frac{2E}{n+2}, \qquad \left\langle \hat{T} \right\rangle = \frac{nE}{n+2}$$

وكتطبيق للنظرية:

أ- في حالة المتذبذب التوافقي، حيث الجهد يعرف بالعلاقة $V = \frac{1}{2}kx^2$، نجد أن $n = 2$ و

$$\left\langle \hat{T} \right\rangle = \left\langle \hat{V} \right\rangle = \frac{2E}{2+2} = \frac{1}{2}E$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega(n+\frac{1}{2}), \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

ب- في حالة الجهد الكولمي، حيث يعرف بالعلاقة $V = \frac{k}{r}$ ، نجد أن $n = -1$ و

$$\left\langle \hat{T} \right\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \hat{V} \right\rangle$$

كملخص لما سبق فقد وجدنا في تصور شرودنجر أنه لحساب القيمة المتوقعة لمؤثر بالصورة:

$$< \hat{A}_s >_t = < \psi_s(t) | \hat{A}_s | \psi_s(t) >$$

فإنه تم افتراض تغير الدالة $\psi_s(t)$ مع الزمن مع استقلالية المؤثر $\hat{A}_s$ عن الزمن.

واستخدمنا هنا الدليل السفلي t ليدل على أن القيمة المتوقعة تعتمد على الزمن.

والآن نسأل: هل من طرق أخرى لحساب القيمة المتوقعة؟ وهل هذه الطرق متكافئة من حيث النتائج النهائية؟

والجواب: يوجد طريقتان أخريان، وفيهما يكون:

١- المؤثر $\hat{A}$ يتغير مع الزمن وتظل الدالة $\psi(\vec{r})$ مستقلة عن الزمن، ويسمى هذا تصور هيزنبرج.

٢- المؤثر $\hat{A}$ والدالة $\psi(t)$ يتغيران مع الزمن، ويسمى هذا التصور التفاعلي أو تصور ديراك.

دعونا نوضح التصورات الأخرى على حدة، وبعضاً من تطبيقاتها.

٢- تصور هيزنبرج

وجدنا في تصور شرودنجر أن التطور الزمني للنظام الكمي يأتي من اعتماد الدالة فقط على الزمن، واستقلالية المؤثر أو الهملتونيان عن الزمن، وهذا يتأتى من معادلة شرودنجر الزمنية:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left| \psi_s(t) \right\rangle = \hat{H}_s \left| \psi_s(t) \right\rangle \qquad (١)$$

و التي لها الحل:

$$\left| \psi_s(t) \right\rangle = \underbrace{e^{-i\hat{H}_s(t-t_o)/\hbar}}_{U(t-t_o)} \left| \psi_s(t_o) \right\rangle = U\left(t - t_o\right) \left| \psi_H(t_o) \right\rangle \qquad (٢)$$

حيث $\psi_H = \psi_s(t_o)$ هي دالة هيزنبرج، أو المتجه، عند الزمن t_o. المعادلة (٢) يمكن منها تحديد دالة الحالة $\psi_s(t)$ عند تغير الزمن، وذلك إذا تم معرفة $\psi_s(t_o)$. المؤثر

$U(t)=e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}$ يسمى مؤثر التطور الزمني، بفرض أن $t_o=0$، ويمكن وضعه بالصورة التالية:

$$e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-i\hat{H}_s t/\hbar\right)^n}{n!} \qquad (٣)$$

والآن، حيث إن جميع التوقعات بميكانيكا الكم تأتي من الضرب الداخلي، فإننا نستطيع أن نغير طريقة التطور الزمني للنظام من اعتماد الدالة على الزمن إلى اعتماد المؤثر على الزمن، وذلك عن طريق إيجاد القيمة المتوقعة لمؤثر، $\hat{A}_s$ كالتالي:

$$\begin{aligned}<\hat{A}_s>_t &=\left\langle \psi_s(t)\middle|\hat{A}_s\middle|\psi_s(t)\right\rangle=\left\langle e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\psi_s(0)\middle|\hat{A}_s\middle|e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\psi_s(0)\right\rangle\\ &=\left\langle \psi_s(0)\middle|\underbrace{e^{i\hat{H}_s t/\hbar}}_{U^\dagger}\hat{A}_s\underbrace{e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}}_{U}\middle|\psi_s(0)\right\rangle\\ &=\left\langle \psi_s(0)\middle|\underbrace{U^\dagger\hat{A}_s U}_{A_H(t)}\middle|\psi_s(0)\right\rangle=\left\langle\hat{A}_H(t)\right\rangle_0\end{aligned} \qquad (4)$$

حيث استخدمنا الخاصية الهرميتية للمؤثر $\hat{H}_s$ بالشكل:

$$\left(e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\right)^\dagger=e^{i\hat{H}_s^\dagger t/\hbar}=e^{i\hat{H}_s t/\hbar} \qquad (٥)$$

وعرفنا مؤثر هيزنبرج $\hat{A}_H(t)$ بالصورة:

$$\hat{A}_H(t)=e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_s t/\hbar} \qquad (٦)$$

هنا لنا أن نتساءَل عما تدل عليه المعادلة (٤)؟ الجواب طبعاً: تدل على أن القيم المتوقعة لمؤثر ما، التي تتكون من قيم حقيقية، لا تعتمد على نوعية التصور المستخدم، كما هو متوقع.

من السهل اشتقاق معادلة الحركة في تصور هيزنبرج وهي:

$$\frac{d\hat{A}_H}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_H,\hat{H}_H\right] \qquad (٧)$$

وقد تم إهمال الحد $\langle\psi_H|\hat{A}_H|\psi_H\rangle$ حيث إن المؤثر $\hat{A}_H$ لا يعتمد صراحةً على الزمن.

واجب منزلي: أثبت العلاقة (٧).

هناك نقطة يجب أن تؤخذ في الاعتبار ألا وهي أن علاقات التبادل يجب أن تكون محفوظةً، وذلك عند انتقالنا من استخدام تصور معين إلى استخدام تصور آخر. بمعنى أنه إذا كان علاقة التبادل:

$$\left[\hat{B}_S ,\hat{A}_S \right]=C_S$$

تتحقق في تصور شرودنجر فإن علاقة التبادل:

$$\left[\hat{B}_H ,\hat{A}_H \right]=C_H$$

يجب أن تتحقق أيضاً في تصور هيزنبرج. من ثم إذا كانت العلاقة $\left[\hat{H}_S ,\hat{A}_S \right]=0$ محققة، فإن $\left[\hat{H}_H ,\hat{A}_H \right]=0$ يجب أيضاً أن تتحقق، ويصبح $\hat{A}_H(t)$ ثابتاً أيضاً للحركة. الفرق الأساسي بين هذين التصورين؛ هو أن تطور النظام مع الزمن يظهر من خلال الدالة $\psi_S(t)$ في تصور شرودنجر، ومن خلال المؤثر $\hat{A}_H(t)$، والذي يمثل الكميات الفيزيائية، في تصور هيزنبرج.

مثال: أوجد معادلات المسار للمتغيرات التقليدية $x(t)$ و $p(t)$ المرتبطة بالهملتونيان:

$$\hat{H}_H(t)=\frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t)+mg\hat{x}_H(t)$$

ملحوظة: يمكن استخدام تصور هيزنبرج بالصورة: $\frac{d\hat{A}_H}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_H,\hat{A}_H\right]$.

الحل: باستخدام تصور هيزنبرج للمؤثرات المناظرة للمتغيرات التقليدية نجد أن معدل التغير للمؤثر $\hat{x}(t)$ يُعطي:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}_H(t)}{dt}&=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_H(t),\hat{x}_H(t)\right]=\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t),\hat{x}_H(t)\right]\\&=\frac{\hat{p}_H(t)}{m},\end{aligned} \tag{1}$$

وللمؤثر $\hat{p}_H(t)$ نجد أن:

$$\frac{d\hat{p}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_H(t), \hat{p}_H(t)\right] = \frac{i}{\hbar}\left[mg\hat{x}_H(t), \hat{p}_H(t)\right] = -mg \qquad (٢)$$

بتكامل المعادلة (٢) بالنسبة للزمن، واعتبار الشرط الحدودي $p_H(0) = p_o$ ، نحصل على:

$$\boxed{p_H(t) = p_o - mgt} \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (٣) بالمعادلة (١) وإجراء التكامل بالنسبة للزمن، واعتبار الشرط الحدودي $x_H(0) = x_o$ ، نجد أن:

$$\frac{dx_H(t)}{dt} = \frac{p_H(t)}{m} = \frac{1}{m}\left(p_o - mgt\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{x_H(t) = x_o + \frac{1}{m}\left(p_o t - \frac{1}{2}mgt^2\right)} \qquad (٤)$$

المعادلتان (٣) و(٤) هما معادلتا المسار.

بالطبع، باستخدام تصور هيزنبرج سوف نجد أن علاقات التبادل بين مؤثرات محسوبة عند أزمنة مختلفة سوف تأخذ صوراً مختلفة عن صورها بتصور شرودنجر. هذا ناتج من اعتماد مؤثرات تصور هيزنبرج على الزمن.

على سبيل المثال، دعونا نعتبر المؤثرات $x(t_1), x(t_2),$ و $p(t_1), p(t_2)$. بالطبع تطور هذه المؤثرات مع الزمن يعتمد على صيغة الهاملتونيان المستخدم. دعونا نستخدم الهاملتونيان للمتذبذب التوافقي في بعد أُحادي بالصورة:

$$H_H(t) = \frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t) + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}_H^2(t)$$

تصور مؤثر المكان وكمية الحركة الخطية تحققان:

$$\frac{d\hat{x}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{x}_H(t)\right]$$
$$= \frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2m}\hat{p}_H^2(t), \hat{x}_H(t)\right]$$
$$= \frac{\hat{p}_H(t)}{m},$$

$$\frac{d\hat{p}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}(t), \hat{p}_H(t)\right]$$
$$= -m\omega^2\hat{x}_H$$

بتفاضل المعادلتين السابقتين بالنسبة للزمن مع الشروط الحدودية واعتبارها:

$$\dot{p}_H(0) = -m\omega^2 x_o$$
$$\dot{x}_H(0) = \frac{p_o}{m}$$

نصل للحلول:

$$\boxed{\begin{aligned} x_H(t) &= x_o\cos(\omega t) + \frac{p_o}{m\omega}\sin(\omega t), \\ p_H(t) &= p_o\cos(\omega t) - m\omega x_o\sin(\omega t) \end{aligned}}$$

والآن نستطيع حساب أقواس التبادل بالصورة:

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)\right] &= \frac{1}{m\omega}\left[p, x\right]\cos(\omega t_2)\cos\left(\omega t_1\right) \\ &\quad + \frac{1}{m\omega}\left[x, p\right]\sin(\omega t_2)\sin\left(\omega t_1\right) \\ &= \frac{i\hbar}{m\omega}\sin(\omega t_2 - \omega t_1). \end{aligned}}$$

٣- التصور التفاعلي

تظهر أهمية التصور التفاعلي عند التعامل مع هملتونيان للنظام يكون جزء صغير منه (نستطيع فصله) يعتمد على الزمن. عندما نجد أن المؤثر الهاملتوني الأصلي $\hat{H}_s$ نستطيع تقسيمه إلى حدين: الحد الأول، وهو الأساسي، دعونا نسميه $\hat{H}_{os}$ ،

والحد الثاني V_I فرعي، ويمثل اضطراباً صغيراً بالنسبة إلى $\hat{H}_{os}$ بحيث إن $\hat{H}_{os} >> V_I$، ويعتمد على الزمن. من هذا الوصف نضع:

$$\hat{H}_s = \hat{H}_{os} + V_I$$

$$\psi_I(t) = e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_s(t)$$

$$\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_{os}t/\hbar}$$

وبحساب القيمة المتوقعة لمؤثر شرودنجر نجد أن:

$$\begin{aligned} <\hat{A}_s>_t &= \left\langle \psi_s(t) \middle| \hat{A}_s \middle| \psi_s(t) \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_I(t) \middle| \hat{A}_s \middle| e^{-i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_I(t) \right\rangle \\ &= \left\langle \psi_I(t) \middle| e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_{os}t/\hbar} \middle| \psi_I(t) \right\rangle = \left\langle \hat{A}_I(t) \right\rangle_t \qquad (4) \end{aligned}$$

وهذا يدل، كما توقعنا، أن القيم المتوقعة لمؤثر ما، التي تتكون من أرقام حقيقية، يجب أن تظل كما هي بدون تغيير، ومستقلة عن نوعية التصور المستخدم.

مثال: للدالة $\psi_I(t) = e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_s$ أثبت أن معادلة الحركة هي:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi_I(t)}{\partial t} = V_I(t)\psi_I(t)}$$

الحل: بتفاضل الدالة $\psi_I(t)$ بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{\partial\psi_I(t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{os}e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_s + e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\frac{\partial\psi_s}{\partial t}$$

باستخدام معادلة شرودنجر بالصورة:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_s}{\partial t} = H_s\psi_s = (H_{os} + V_I)\psi_s$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_I(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\cancel{\hat{H}_{os}}e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\psi_s + e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\frac{1}{i\hbar}(\cancel{H_{os}} + V_I)\psi_s \\ &= \frac{1}{i\hbar}e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}V_I\psi_s = \frac{1}{i\hbar}V_I\psi_I \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته.

الجدول التالي: يلخص تطور نظام ميكانيكا الكم مع الزمن في التصورات الثلاث.

	شرودنجر	هيزنبرج	التفاعل
الدالة ψ_i	تتغير مع الزمن $\psi_s(t) = e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}\psi_s(0)$	لا تتغير مع الزمن $\psi_H = e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\psi_s(t) = \psi_s(0)$	تتغير مع الزمن $\psi_I(t) = e^{i\hat{H}_{os} t/\hbar}\psi_s(0)$
المؤثر	ثابت $\hat{A}_s$	يتغير مع الزمن $\hat{A}_H = e^{i\hat{H}_s t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_s t/\hbar}$	يتغير مع الزمن $\hat{A}_I = e^{i\hat{H}_{os} t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_{os} t/\hbar}$
معادلة الحركة	$i\hbar\frac{d\left\|\psi_s(t)\right\rangle}{dt} = H_s\left\|\psi_s(t)\right\rangle;$ $\frac{dA_s}{dt} = 0$	$\frac{d\left\|\psi_H\right\rangle}{dt} = 0;$ $\frac{dA_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A_H, H_H\right]$	$i\hbar\frac{d\left\|\psi_I(t)\right\rangle}{dt} = V_I\left\|\psi_I(t)\right\rangle$ $H_I^{'} = e^{iH_{os}t/\hbar}V_I\, e^{-iH_{os}t/\hbar};$ $\frac{dA_I(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[A_I, H_{os}\right]$ $H_I(t) = H_{os} + V_I$

٤- تمارين عامة

١- استخدم نظرية إيرنفست لحساب الطاقة الحركية لإلكترون بالمستوى الثالث لذرة الهيدروجين.

٢- أثبت أنه في حالة تحقق العلاقة $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = i\hat{C}$ في تصور شرودنجر فإنها تتحقق أيضاً في تصور هيزنبرج.

٣- أثبت أن $\frac{d}{dt}\left\langle \hat{A}_I(t)\right\rangle = \left\langle \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}_I(t), \hat{H}_{oS}\right]\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{A}_I(t)}{\partial t}\right\rangle$

٤- تحقق من العلاقات التالية:

$$\left[\hat{p}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)\right] = i\hbar m\omega \sin(\omega t_2 - \omega t_1),$$
$$\left[\hat{x}_H(t_1), \hat{p}_H(t_2)\right] = i\hbar \cos(\omega t_2 - \omega t_1)$$

مع ملاحظة أنه عند تحقق الشرط $t_1 = t_2$ نستطيع الحصول على العلاقات المشهورة للتبادل القانوني في تصور شرودنجر.

٥- للمؤثر $\hat{A}_I(t) = e^{i\hat{H}_{os}t/\hbar}\hat{A}_s e^{-i\hat{H}_{os}t/\hbar}$ أثبت أن معادلة الحركة هي:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \hat{A}_I(t)}{\partial t} = \left[\hat{A}_I(t), \hat{H}_{oS}\right]}$$

ملحق (8.A)

الدوال المتجانسة

تعرف الدالة المتجانسة من الدرجة n بالشكل:

$$f\,(sx_1, sx_2, \cdots, sx_j) = s^n f\,(x_1, x_2, \cdots, x_j)$$

كمثال نفترض الدالة

$$g = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{x}{y^2 z^2}$$

باستخدام التعويضات $x' = sx\,, y' = sy\,, z' = sz$ نجد أن الدالة تؤول للشكل:

$$g = s^{-3}\left(\frac{1}{x'^3} + \frac{1}{y'^3} + \frac{1}{z'^3} + \frac{x'}{y'^2 z'^2}\right)$$

وهي تحقق شرط الدالة المتجانسة من الدرجة $n = -3$.

نظرية اويلر: إذا كانت $f\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ دالة متجانسة من الدرجة n فإن:

$$\sum_{k=1}^{j} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = nf$$

مثال: أوجد $\sum_{k=1}^{j} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ للدالة المتجانسة من الدرجة الثانية:

$$g\,(x\,, y\,, z\,) = x^2 + y^2 + z^2$$

الحل: بتفاضل الدالة $g\,(x\,, y\,, z\,)$ نجد:

$$\sum_{k=1}^{j} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = x \times (2x\,) + y \times (2y\,) + z \times (2z\,) = 2f$$

ملحوظة: إذا حدث أن كان الجهد " V" دالة متجانسة من الدرجة n في الإحداثيات الكرتيزية، مثلاً، فإن نظرية اويلر تعطينا النتيجة:

$$\sum_{i=1} q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = nV$$