الباب السادس

كمية الحركة الزاوية المدارية لجسيم

Orbital Angular Momentum of a One Particle System

الصفحة	العنوان	الفصل
١٤٣	كمية الحركة الزاوية في الفيزياء التقليدية (Angular momentum in classical mechanics)	1
١٤٤	كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات الكرتيزية (Angular momentum in cartesian coordinates)	2
١٤٩ ١٥٠ ١٥٠ ١٥١	كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات الكروية (Angular momentum in spherical coordinates) i– الدوال المميزة والمشتركة للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ (Common eigen functions for $\hat{L}_z$ and $\hat{L}^2$) ii– القيم المميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ (Eigen values for $\hat{L}_z$) iii– القيم المميزة للمؤثر $\hat{L}^2$ (Eigen valuess for $\hat{L}^2$)	3
١٥٨	المؤثرات التصاعدية والتنازلية (Raising and lowering operators)	4
١٦٤	نتائج مفصلة للمؤثرات التصاعدية والتنازلية (Detailed results for the raising and lowering operators)	5
١٦٨	تمارين عامة (General exercises)	6
١٧١	الإحداثيات القطبية الكروية (Spherical polar coordinates)	(6.A)

الباب السادس

كمية الحركة الزاوية المدارية لجسيم

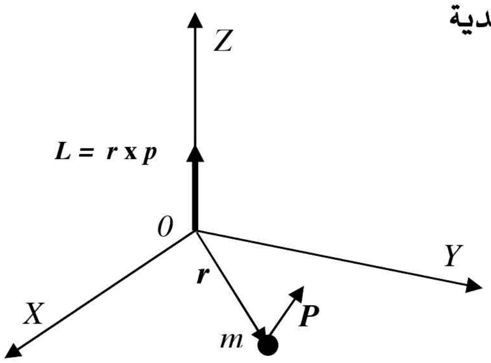
لعبت كمية الحركة الزاوية المدارية، "L"، دوراً رئيسياً في الفيزياء التقليدية، وخصوصاً عند دراسة حركة الكواكب والمجرات باستخدامها في قوانين كبلر ونيوتن. بالنسبة إلى النظام المعزول إذا كان شرط العزوم:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$$

فإن L تكون ثابتة. وهذا يعني لنا أن كمية الحركة الزاوية المدارية تعد كمية محفوظة (Conservative). ولهذا فقد استخدمت كمية الحركة الزاوية لدراسة كل من الحركة الدورانية للكواكب حول الشمس، نظرية التشتت، الخ. وفي ميكانيكا الكم، تعد كمية الحركة الزاوية حجر الأساس في دراسة وتحليل الأطياف (نووية، ذرية، جزيئية).

في هذا الفصل سوف نستعرض أولاً التعريف العام لكمية الحركة الزاوية المدارية في الفيزياء التقليدية، وتليها كيفية تعريفها واستخدامها في ميكانيكا الكم. وسوف نرجئ دراسة كمية الحركة المغزلية للجسيم إلى فصل متأخر، لأنه لا يوجد لها تشابه في الفيزياء التقليدية.

١- كمية الحركة الزاوية في الفيزياء التقليدية



شكل (١) جسيم كتلته m وسرعته الخطية $\mathbf{v}$ وكمية حركته الخطية $p = m\mathbf{v}$ (يتحرك في المستوى XY وفي اتجاه مضاد لاتجاه عقارب الساعة)

للتبسيط، انظر: الشكل (١)، سوف نفترض جسيماً: كتلته m، وسرعته الخطية $\mathbf{v}$، وكمية حركته الخطية $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$، ويتحرك في المستوى XY، وفي اتجاه مضاد لاتجاه عقارب الساعة.

إذا اعتبرنا الإزاحة بين الجسيم ونقطة الأصل "0" هي r؛ فإن الميكانيكا التقليدية تعرف كمية الحركة الزاوية المدارية L بالنسبة إلى نقطة الأصل بالمتجه:

$$L = r \times p = \begin{vmatrix} e_X & e_Y & e_Z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \qquad (١)$$

حيث e_X, e_Y, e_Z هي متجهات الوحدة في اتجاه X, Y, Z بالترتيب. ويكون L عمودياً على المستوى الذي يحتوى r, p يتجه لأعلى تبعاً لقاعدة اليد اليمنى. وتعرف مركبات الحركة الزاوية المدارية في الاتجاهات X, Y, Z بالترتيب كالتالي:

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y ; \\ L_y &= zp_x - xp_z ; \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \qquad (٢)$$

والآن سوف نعرف L من وجهة نظر ميكانيكا الكم وفي إحداثيات مختلفة.

٢- كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات الكرتيزية

كما تعلمنا إننا إذا تعاملنا مع ميكانيكا الكم فإننا نستبدل كل متغير فيزيائي بنظيره المؤثر. وبمعلومية أن $\hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial j}$ حيث $(j \equiv x, y, z)$ فإن L في الإحداثيات الكرتيزية تُكتب كالتالي:

Classical Mechanics	Quantum Mechanics
$L_x = yp_z - zp_y ;$	$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$
$L_y = zp_x - xp_z ;$	$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ (٣)
$L_z = xp_y - yp_x ;$	$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$
$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 ;$	$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

مع ملاحظة أنه لا يوجد تعريف لكمية الحركة الزاوية المدارية في بعد واحد للإحداثيات الكرتيزية. ومن المعادلة (٣) فإنه من السهل اشتقاق علاقات التبادل (التلازم) بين الكميات المعرفة.

مثال: أثبت أن $\left(\hat{L}_x\right)^{\dagger}=\hat{L}_x$.

الحل: بأخذ المرافق للمؤثر $\hat{L}_x$ نجد أن:

$$\begin{aligned}\left(\hat{L}_x\right)^{\dagger} &= \left(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y\right)^{\dagger}\\ &= \left(\hat{y}\hat{p}_z\right)^{\dagger}-\left(\hat{z}\hat{p}_y\right)^{\dagger}\\ &= \hat{p}_z{}^{\dagger}\hat{y}^{\dagger}-\hat{p}_y{}^{\dagger}\hat{z}^{\dagger}\\ &= \hat{p}_z\hat{y}-\hat{p}_y\hat{z}\\ &= \hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y\\ &= \hat{L}_x\end{aligned}$$

وقد استخدمنا العلاقات: $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{\dagger}=\hat{A}^{\dagger}+\hat{B}^{\dagger},\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger}=\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$

مثال: أثبت أن الدالة $(x\pm iy)^m$ هي دالة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ ثم أوجد قيمها المميزة.

الحل: بتأثير $\hat{L}_z$ على الدالة المعرفة $(x\pm iy)^m$ نجد أن:

$$\begin{aligned}\hat{L}_z(x\pm iy)^m &= \left(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x\right)(x\pm iy)^m\\ &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)(x\pm iy)^m\\ &= \pm\hbar mx(x\pm iy)^{m-1}+\hbar miy(x\pm iy)^{m-1}\\ &= \pm\hbar m(x\pm iy)(x\pm iy)^{m-1}\\ &= \pm\hbar m(x\pm iy)^m\end{aligned}$$

هي معادلة مميزة لها الدالة المميزة $(x\pm iy)^m$ وقيمها المميزة هي $\pm\hbar m$.

مثال: أثبت أن

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=\hat{L}_x\hat{L}_y-\hat{L}_y\hat{L}_x=i\hbar\hat{L}_z$$

الحل: باستخدام تعريفات المؤثرات المعطاة، نجد أن:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y,\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z\right]$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right] &= \left(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y\right)\left(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right) - \left(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right)\left(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y\right) \\
&= \hat{y}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x - \cancel{\hat{y}\hat{p}_z\hat{x}\hat{p}_z} - \cancel{\hat{z}\hat{p}_y\hat{z}\hat{p}_x} + \hat{z}\hat{p}_y\hat{x}\hat{p}_z \\
&\quad - \hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z + \cancel{\hat{z}\hat{p}_x\hat{z}\hat{p}_y} + \cancel{\hat{x}\hat{p}_z\hat{y}\hat{p}_z} - \hat{x}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_y \\
&= \hat{y}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_x + \hat{z}\hat{p}_y\hat{x}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_x\hat{y}\hat{p}_z - \hat{x}\hat{p}_z\hat{z}\hat{p}_y \\
&= \hat{y}\hat{p}_x\left(\hat{p}_z\hat{z} - \hat{z}\hat{p}_z\right) + \hat{p}_y\hat{x}\left(\hat{z}\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{z}\right) \\
&= i\hbar\left(-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{p}_y\hat{x}\right) \\
&= i\hbar\hat{L}_z
\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته.

وهناك طريقة أخرى، وذلك باستخدام قوانين التبادل نجد أن:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right] &= \left[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{L}_y\right] \\
&= \hat{y}\underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{L}_y\right]}_{I} + \underbrace{\left[\hat{y},\hat{L}_y\right]}_{=0}\hat{p}_z - \hat{z}\underbrace{\left[\hat{p}_y,\hat{L}_y\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\hat{z},\hat{L}_y\right]}_{II}\hat{p}_y
\end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
I &= \left[\hat{p}_z,\hat{L}_y\right] = \left[\hat{p}_z,\left(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right)\right] \\
&= \left[\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x\right] - \left[\hat{p}_z,\hat{x}\hat{p}_z\right] \\
&= \hat{z}\underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{p}_x\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{z}\right]}_{=-i\hbar}\hat{p}_x - \hat{x}\underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{p}_z\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{x}\right]}_{=0}\hat{p}_z = -i\hbar\hat{p}_x,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
II &= \left[\hat{z},\hat{L}_y\right] = \left[\hat{z},\left(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\right)\right] \\
&= \left[\hat{z},\hat{z}\hat{p}_x\right] - \left[\hat{z},\hat{x}\hat{p}_z\right] \\
&= \hat{z}\underbrace{\left[\hat{z},\hat{p}_x\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\hat{z},\hat{z}\right]}_{=0}\hat{p}_x - \hat{x}\underbrace{\left[\hat{z},\hat{p}_z\right]}_{=-i\hbar} + \underbrace{\left[\hat{z},\hat{x}\right]}_{=0}\hat{p}_z = -i\hbar\hat{x}
\end{aligned}$$

أخيراً نجد أن:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right] = \hat{y}\left(-i\hbar\hat{p}_x\right) - \left(-i\hbar\hat{x}\right)\hat{p}_y = i\hbar\left(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\right) = i\hbar\hat{L}_z$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال: أثبت أن

$$\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]=\hat{L}_y\hat{L}_z-\hat{L}_z\hat{L}_y=i\hbar\hat{L}_x$$

الحل:

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]&=\left[\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z,\hat{L}_z\right]\\&=\left[\hat{z}\hat{p}_x,\hat{L}_z\right]-\left[\hat{x}\hat{p}_z,\hat{L}_z\right]\\&=\hat{z}\underbrace{\left[\hat{p}_x,\hat{L}_z\right]}_{=-i\hbar\hat{p}_y}+\underbrace{\left[\hat{z},\hat{L}_z\right]}_{=0}\hat{p}_x-\hat{x}\underbrace{\left[\hat{p}_z,\hat{L}_z\right]}_{=0}-\underbrace{\left[\hat{x},\hat{L}_z\right]}_{-i\hbar\hat{y}}\hat{p}_z\\&=i\hbar\left(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y\right)=i\hbar\hat{L}_x\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته.

واجب منزلي: أثبت أن: $\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=\hat{L}_z\hat{L}_x-\hat{L}_x\hat{L}_z=i\hbar\hat{L}_y$

واجب منزلي: أثبت أن:

$$1-\quad\left[\hat{L}_z,\hat{L}_y\right]=-i\hbar\hat{L}_x,\ \left[\hat{L}_x,\hat{L}_z\right]=-i\hbar\hat{L}_y,\ \left[\hat{L}_y,\hat{L}_x\right]=-i\hbar\hat{L}_z$$

$$2-\quad\left[\hat{x},\hat{L}_x\right]=0,\ \left[\hat{x},\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{z},\ \left[\hat{x},\hat{L}_z\right]=-i\hbar\hat{y}$$

تعليق: حيث إن المؤثرات $\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$ غير متبادلة بعضها مع بعض، لذلك لا نستطيع قياس قيمها المميزة بدقة متناهية في آن واحد. من ثم فإنه لا توجد دالة مميزة مشتركة بين أي اثنتين من هذه المركبات؛ لهذا سوف نبحث عن مؤثر يتبادل معها، على سبيل المثال المؤثر $\hat{L}^2$.

مثال: أثبت أن

$$\left[L^2,\hat{L}_x\right]=0$$

الحل:

$$\begin{aligned}
\left[L^2,\hat{L}_x\right] &= \left[L_x^2+L_y^2+L_z^2,\hat{L}_x\right] \\
&= \left[\hat{L}_x^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{L}_y^2,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{L}_z^2,\hat{L}_x\right] \\
&= 0+\hat{L}_y\left[\hat{L}_y,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{L}_y,\hat{L}_x\right]\hat{L}_y+\hat{L}_z\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]+\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]\hat{L}_z \\
&= \hat{L}_y\left(-i\hbar\hat{L}_z\right)+\left(-i\hbar\hat{L}_z\right)\hat{L}_y+\hat{L}_z\left(-i\hbar\hat{L}_y\right)+\left(-i\hbar\hat{L}_y\right)\hat{L}_z \\
&= i\hbar\left[\hat{L}_z,\hat{L}_y\right]+i\hbar\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right] \\
&= i\hbar\left(-i\hbar\hat{L}_x\right)+i\hbar\left(i\hbar\hat{L}_x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$\left[L_x^2,\hat{L}_x\right]=\left[L^2,\hat{L}_y\right]=\left[L^2,\hat{L}_z\right]=0$$

مثـــال: اعتـــبر الدالـــة $f(|\boldsymbol{r}|)\equiv f(r)$ متماثلـــة كرويـــاً للمتجـــه $\boldsymbol{r}$، حيـــث $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. احسب $\left[\hat{L}_z,f(r)\right]$ وفسر النتيجة.

الحل:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z,f(r)\right]\psi &= \hat{L}_z f(r)\psi-f(r)\hat{L}_z\psi = \\
&= i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)f\psi-f\,i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi \\
&= i\hbar\psi\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)f+\cancel{f\,i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi}-\cancel{f\,i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi} \\
&= i\hbar\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\psi \\
&= i\hbar\left(y\frac{x}{r}-x\frac{y}{r}\right)\psi=0
\end{aligned}$$

نجد أن $\hat{L}_z$ و $f(r)$ متبادلان، ولهذا فإنهما يشتركان في نفس الدالة المميزة.

في هذا المثال تم استخدام العلاقات التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$$

٣- كمية الحركة الزاوية في الإحداثيات الكروية

باستخدام الإحداثيات الكروية (ملحق A.٦) وجدنا أن:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
\hat{L}_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\
\hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
\hat{L}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]
\end{aligned}
\qquad (٤)
$$

نلاحظ هنا أن مؤثرات الحركة الزاوية تعتمد على إحداثيتين فقط، هما (θ,φ) بعد أن كانت تعتمد على ثلاث إحداثيات في الإحداثيات الكرتيزية.

واجب منزلي: أثبت أن المؤثر $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ هو مؤثر هيرميتي.

والدالة الموجية في الإحداثيات الكروية تكتب على الصورة $|r,\theta,\varphi>$، وبإمكاننا كتابتها بالشكل:

$$\left|r,\theta,\varphi\right\rangle=\left|r\right\rangle\left|\theta\right\rangle\left|\varphi\right\rangle=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

ومن ثم فإن شرط المعايرة يتطلب:

$$\left\langle r,\theta,\varphi|r,\theta,\varphi\right\rangle=\int_0^\infty\left\langle r|r\right\rangle r^2dr\int_0^\pi\left\langle\theta|\theta\right\rangle\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\left\langle\varphi|\varphi\right\rangle d\varphi=1 \qquad (٥)$$

ملاحظات

أ- حيث إن المؤثر $\hat{L}^2$ يحقق خاصية التبادل مع كل مركبة من المركبات الثلاث $\hat{L}_x$ ، $\hat{L}_y$ ، $\hat{L}_z$ فإننا نستطيع أن نجد دالة مميزة آنية للمؤثر $\hat{L}^2$ وأي مركبة من المركبات الثلاث.

ب- حيث إن المركبات الثلاث $\hat{L}_x$ ، $\hat{L}_y$ ، $\hat{L}_z$ لا تحقق خاصية التبادل مع بعضها ، فإننا نستطيع قياس القيم المتوقعة لكمية الحركة الزاوية الكلية $\hat{L}^2$ وإحدى المركبات فقط، ولنفترض أن هذه المركبة هي $\hat{L}_z$.

ج- اختيار المؤثر $\hat{L}_z$ ليس هو الاختيار الوحيد، وقد جرى العرف على اختياره لسهولة التعبير عن صورته في الإحداثيات الكروية.

---

i- الدوال المميزة والمشتركة للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$

حيث إن $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ يحققان خاصية التبادل، بمعنى أن $\left[\hat{L}^2,\hat{L}_z\right]=0$ ، فإنه يمكننا تعريف دالة مشتركة مميزة للمؤثرين. تعتمد هذه الدالة المشتركة على إحداثيتين فقط، هما (θ,φ) ، ولنفترضها $|\theta,\varphi\rangle$. بالطبع بالإمكان إضافة الإحداثية الثالثة r إلى الدالة لتصبح $|r,\theta,\varphi\rangle$ ، لكننا سوف نتغاضى عن إضافتها في شرحنا التالي. والآن يجب أن نفكر في إيجاد القيم المميزة للمعادلتين:

$$\hat{L}_z\,|\theta,\varphi\rangle = b\,|\theta,\varphi\rangle \tag{a6}$$

$$\hat{L}^2|\theta,\varphi\rangle = c\,|\theta,\varphi\rangle \tag{b6}$$

حيث إن $b,\ c$ هي القيم المميزة للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$.

---

ii- القيم المميزة للمؤثر $\hat{L}_z$

نبدأ بالمعادلة (a6) ونستخدم $\hat{L}_z=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ لنحصل على

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}|\theta,\varphi\rangle = b\,|\theta,\varphi\rangle \tag{٧}$$

وباستخدام فصل المتغيرات $|\theta,\varphi\rangle=|\theta\rangle|\varphi\rangle$ نصل للمعادلة

$$\frac{d\,|\varphi\rangle}{|\varphi\rangle}=\frac{ib}{\hbar}d\varphi \tag{٨}$$

وحلها هو:

$$|\varphi\rangle = A e^{ib\varphi/\hbar} \qquad (٩)$$

حيث A هو ثابت اختياري ويحسب بواسطة معايرة الدالة $|\varphi\rangle$.

ملاحظات:

أ- الدالة (٩) غير مناسبة للاستخدام؛ وذلك لأننا لو غيرنا الزاوية φ بمقدار 2π فإننا سنعود لنفس النقطة، وهذا يعني أن الدالة تكرارية القيم.

ب- لكي تصبح الدالة غير تكرارية القيم يجب أن نستخدم العلاقة:

$$|\varphi\rangle = |\varphi + 2\pi\rangle$$

لنحصرها في المدى $\varphi = \{0, 2\pi\}$ ومن ثم فإن الشرط:

$$A e^{ib\varphi/\hbar} = A e^{ib\varphi/\hbar} e^{ib2\pi/\hbar}$$

يعني أن $e^{ib2\pi/\hbar} = 1$. ولكي يتحقق هذا الشرط فإن:

$$2\pi(b/\hbar) = 2\pi m,$$
$$\Rightarrow b = m\hbar \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

وأخيراً نجد أن:

$$\boxed{|\varphi\rangle = A e^{im\varphi}}, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \cdots \qquad (١٠)$$

ج- من المعادلة (١٠) نلاحظ أن القيم المميزة m للمؤثر $\hat{L}_z$ هي قيم مكممة (قيم منفصلة)، ويسمى m بالعدد الكمي المغناطيسي.

د- لحساب قيم A ، نستخدم خواص المعايرة:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \int_0^{2\pi} \left(A e^{im\varphi}\right)^* \left(A e^{im\varphi}\right) d\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}.$$

---

iii- القيم المميزة للمؤثر $\hat{L}^2$

نستخدم المؤثر $\hat{L}^2$ من المعادلة (٤) في الإحداثيات الكروية ليؤثر على الدالة $|\theta, \varphi\rangle$:

$$\hat{L}^2\left|\theta,\varphi\right\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\left|\theta,\varphi\right\rangle \qquad (١١)$$

وبفرض أن:

$$\hat{L}^2\left|\theta,\varphi\right\rangle = c\left|\theta,\varphi\right\rangle = \hbar^2 l(l+1)\left|\theta,\varphi\right\rangle \qquad (١٢)$$

وباستخدام $\left|\theta,\varphi\right\rangle = \left|\theta\right\rangle\left|\varphi\right\rangle$ حيث $\left|\varphi\right\rangle = \dfrac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ بالمعادلة (١١) نجد أن:

$$-\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\left|\theta\right\rangle e^{im\varphi} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{\sqrt{2\pi}}\left|\theta\right\rangle e^{im\varphi} \qquad (١٣)$$

وبحذف الدالة $\left|\varphi\right\rangle$ واستخدام قيمها المميزة من المعادلة $\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left|\varphi\right\rangle = -m^2\left|\varphi\right\rangle$ نجد أن المعادلة (١٣) تؤول إلى:

$$\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\right\}\left|\theta\right\rangle = 0 \qquad (١٤)$$

المعادلة (١٤) هي معادلة ليجندر التفاضلية (انظر: الملحق B) وحلها يعطى بدلالة دالة ليجندر المترافقة $P_l^m(\cos\theta)$ بالشكل:

$$\left|\theta\right\rangle = C_{lm}P_l^m(\cos\theta) \qquad (١٥)$$

حيث إن

$$P_l^m(x) = \left(1-x^2\right)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x), \qquad P_l^{-m}(x) = P_l^m(x)$$

و

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l, \qquad P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$P_o(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^2(x) = 3(1-x^2)$$

وباستخدام علاقة المعايرة لدالة ليجندر في الصورة:

$$\int_0^{\pi} P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'} \qquad (١٦)$$

بالإمكان حساب C_{lm} حيث إن

$$<\theta,\varphi|\theta,\varphi> = \frac{|C_{lm}|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |P_l^m(\cos\theta)|^2 \sin\theta d\theta = 1 \qquad (١٧)$$

ومن ثم فإن

$$C_{l,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}, \qquad (١٨)$$

ولهذا فإن:

$$\begin{aligned} |\theta,\varphi\rangle &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \\ &\equiv Y_{l,m}(\theta,\varphi) \end{aligned} \qquad (١٩)$$

حيث $l \geq m$. وتعرف $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ بدوال التوافقيات الكروية العيارية، (انظر: الملحق B).

واجب منزلي: أثبت أن

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,$$

$$Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

مثال: للدالة:

$$|l,m\rangle = (6-r)re^{-r/3}\cos\theta$$

حدد قيم كل من m و l.

الحل: للتبسيط سوف نضع الدالة المعطاة في الصورة:

$$\left|l,m\right\rangle = \underbrace{(6-r)re^{-r/3}}_{f(r)}\underbrace{\cos\theta}_{f(\theta)}$$
$$= f(r)f(\theta)$$

وبما أن الدالة المعطاة لا تعتمد على الزاوية φ لذلك فإن $m=0$.

وكطريقة عامة، لإيجاد قيم m نستخدم العلاقة:

$$\hat{L}_z\psi = f(r)f(\theta)\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}f(\varphi)\right]=0$$
$$\Rightarrow \quad m=0$$

ولإيجاد قيم l نستخدم العلاقة:

$$\begin{aligned}\hat{L}^2\psi &= \hat{L}^2 f(r)\cos\theta \\ &= -\hbar^2 f(r)\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\cos\theta \\ &= \hbar^2 2f(r)\cos\theta\end{aligned}$$

ونقارنها بالصيغة العامة:

$$\hat{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$$

لنجد أن $l=1$.

مثال: احسب $<\hat{L}_z>$ و $<\hat{L}_z^2>$ للدالة الآتية:

$$\psi(r) = \sum_l a_{l,m_l}\left|l,m_l\right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left[3\left|0,0\right\rangle + 2\left|1,1\right\rangle - \left|1,0\right\rangle + \sqrt{10}\left|1,-1\right\rangle\right]$$

الحل: من الدالة $\psi(r)$ نجد أن السعة a_{l,m_l} لكل مركبة هي:

$$a_{0,0}=\frac{3}{2\sqrt{6}},\quad a_{1,1}=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad a_{1,0}=-\frac{1}{2\sqrt{6}},\quad a_{1,-1}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{6}}$$

وهي دالة معيرة لأن:

$$\sum_l |a_{l,m_l}|^2 = 1$$

ومن ثم فإن:

$$\begin{aligned}\langle L_z \rangle &= \sum_l m_l \hbar |a_{l,m_l}|^2 \\ &= (0\,\hbar)|a_{0,0}|^2 + (0\,\hbar)|a_{1,0}|^2 + (\hbar)|a_{1,1}|^2 + (-\hbar)|a_{1,-1}|^2 \\ &= (0\,\hbar)\left(\frac{9}{24} + \frac{1}{24}\right) + (\hbar)\left(\frac{4}{24}\right) + (-\hbar)\left(\frac{10}{24}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\hbar,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\langle \hat{L}_z^2 \rangle &= \sum_l (m_l \hbar)^2 |a_{l,m_l}|^2 \\ &= (0\,\hbar)^2 |a_{0,0}|^2 + (0\,\hbar)^2 |a_{1,0}|^2 + (\hbar)^2 |a_{1,1}|^2 + (-\hbar)^2 |a_{1,-1}|^2 \\ &= (0\,\hbar^2)\left(\frac{9}{24} + \frac{1}{24}\right) + (\hbar^2)\left(\frac{4}{24}\right) + (\hbar^2)\left(\frac{10}{24}\right) \\ &= \frac{7}{12}\hbar^2\end{aligned}$$

مثال: لمستوى يوصف بالدالة الموجية المتصلة:

$$\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$$

١- تأكد من حساب الثابت A باستخدام معايرة الدالة كالتالي:

$$\int \psi^2(\varphi) d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi = A^2 \left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}}$$

٢- استخدم مفكوك $\sin^2 \varphi$ ومنها تأكد من حساب قيم m المختلفة كالآتي:

$$\sin^2 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4} e^{\overset{m=2}{\overbrace{2}}\, i\varphi} - \frac{1}{4} e^{\overset{m=-2}{\overbrace{-2}}\, i\varphi}\right)$$

ومن ثم فإن قيم m الثلاث هي $2, 0, -2$:

ومنها نجد أن السعات a_m لكل مركبة هي:

$$a_0 = \frac{2}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_{-2} = -\frac{1}{4}$$

٣- تأكد من أن احتمالية وجود الجسيم لقيم m المختلفة هي:

$$P(m=0) = (2\pi)A^2 \times \frac{4}{16} = (2\pi)\left(\frac{4}{3\pi}\right) \times \frac{4}{16} = \frac{2}{3},$$

$$P(m=2) = P(m=-2) = (2\pi)A^2 \times \frac{1}{16} = (2\pi)\left(\frac{4}{3\pi}\right) \times \frac{1}{16} = \frac{1}{6}$$

حيث 2π تعبر عن الدورة الكاملة.

٤- تأكد من قيم $< L_z >, < L^2_z >$ التالية:

$$\langle L_z \rangle = \sum_i m_i \hbar \, | a_{m_i} |^2 = (0\,\hbar)^2 |a_0|^2 + (+\hbar)|a_2|^2 + (-\hbar)|a_{-2}|^2$$

$$= (0 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} - 2 \times \frac{1}{6})\hbar = 0,$$

و

$$\langle \hat{L}_z^2 \rangle = \sum_i (m_i \hbar)^2 \, | a_{m_i} |^2 = (0\,\hbar)^2 |a_0|^2 + (2\,\hbar)^2 |a_2|^2 + (-2\hbar)^2 |a_{-2}|^2$$

$$= (0^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6})\hbar = \frac{4}{3}\hbar^2$$

ملحوظة: يمكن التعامل مع هذه الدالة كدالة غير متصلة لنحصل على A من معايرة الدالة كالتالي:

$$\sum P_i = A^2 \left(|a_0|^2 + |a_2|^2 + |a_{-2}|^2\right) = 1 \qquad \Rightarrow A^2 \left(\frac{4}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 1$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

وتحسب احتمالية وجود الجسيم لقيم m المختلفة كالتالي:

$$P(m=0) = A^2 \times |a_0|^2 = \frac{8}{3} \times \frac{4}{16} = \frac{4}{16} = \frac{2}{3},$$

$$P(m=2) = P(m=-2) = A^2 \times |a_2|^2 = \frac{8}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{6}$$

مثال: الهملتونيان للجسم الجاسيء الدوراني (Rigid Rotator) يعطى بالعلاقة $\hat{H}=\frac{\hat{L}^2}{2I}$
حيث إن القيمة $|\hat{L}^2|$ تعطى بالعلاقة: $|\hat{L}^2|=\hbar^2 l(l+1)$ ويوصف بالدالة

$$|\theta,\varphi\rangle = N\left[\underbrace{1}_{a_{0,0}}Y_{0,0}+\underbrace{(1+3i)}_{a_{1,-1}}Y_{1,-1}+\underbrace{2}_{a_{2,-1}}Y_{2,-1}+\underbrace{1}_{a_{2,0}}Y_{2,0}\right]$$

تأكد من التالي:

١. حساب N باستخدام شرط المعايرة $N^2\sum_{l.m}|a_{l,m}|^2=1$:

$$N^2\left[1+(1+3i)(1-3i)+4+1\right]=N^2\left[1+(1+9)+4+1\right]=1$$
$$\Rightarrow N=1/4$$

٢. حساب احتمال وجود الجسم في المستوى $l=0$

$$P(l=0)=N^2|a_{0,0}|^2$$
$$=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$$

٣. حساب احتمال وجود الجسم في المستوى $m=0$

$$P(m=0)=N^2\left[|a_{0,0}|^2+|a_{2,0}|^2\right]$$
$$=\frac{1+1}{4^2}=\frac{1}{8}$$

٤. حساب احتمال وجود الجسم في المستوى $L_z=-\hbar$

$$P(L_z=-\hbar)=N^2\left[|a_{1,-1}|^2+|a_{2,-1}|^2\right]$$
$$=\frac{10+4}{4^2}=\frac{7}{8}$$

٥. حساب احتمال وجود الجسم في المستوى $L^2=6\hbar^2$

$$P(L^2=6\hbar^2\Rightarrow l=2)=N^2\left[|a_{2,-1}|^2+|a_{2,0}|^2\right]$$
$$=\frac{4+1}{4^2}=\frac{5}{16}$$

٦. حساب احتمال وجود الجسم في المستوى $E=2\hbar^2/2I$

$$P(E=\frac{\hbar^2}{2I}1(1+1)\Rightarrow l=1)=N^2\left[|a_{1,-1}|^2\right]$$
$$=\frac{9+1}{4^2}=\frac{5}{8}$$

٧. حساب $<E>$

$$\langle E\rangle=\sum_{l,m}\frac{\langle\theta,\varphi|\hat{L}^2|\theta,\varphi\rangle}{2I}=\frac{N^2}{2I}\sum_{l,m}|a_{l,m}|^2\, l(l+1)\hbar^2$$
$$=\frac{N^2}{2I}\left[0(0+1)\hbar^2+10\times1(1+1)\hbar^2+(4+1)\times2(2+1)\hbar^2\right]$$
$$=\frac{25}{16I}\hbar^2$$

٤- المؤثرات التصاعدية والتنازلية

لقد عَرفنا في الفصل السابق العلاقات الآتية

$$\hat{L}^2|l,m\rangle=l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle$$

و

$$\hat{L}_z|l,m\rangle=m\hbar|l,m\rangle$$

للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ ولكننا لم نحدد ما هو الارتباط بين قيمهما. لكننا نعلم أيضاً من علاقات التبادل:

$$\left.\begin{array}{l}\left[\hat{L}_j,\hat{L}_k\right]=i\hbar\hat{L}_l\,,\\ \left[\hat{L}^2,\hat{L}_j\right]=0\end{array}\right\}\qquad (j,k,l \text{ cyclic})$$

إن قيم l و m يجب أن تكون قيماً حقيقية. ولإيجاد العلاقة بينهما سوف نُعرف المؤثرات التصاعدية والتنازلية كالتالي:

$$\hat{L}_+\equiv\hat{L}_x+i\hat{L}_y \qquad (٢٠)$$

$$\hat{L}_-\equiv\hat{L}_x-i\hat{L}_y \qquad (٢١)$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right), \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right)$$

مثال: أثبت أن: $\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$

الحل: باستخدام التعريفات السابقة لكل من $\hat{L}_+$ و $\hat{L}_-$ نجد أن:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_+\hat{L}_- &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i\left(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x\right) \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] \\
&= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

واجب منزلي: أثبت أن

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm, \quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0, \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z, \quad \hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp$$

وبعد أن عرفنا $\hat{L}_-$ و $\hat{L}_+$، كيف نستفيد من تعريفهما؟ لنعرف إجابة السؤال دعونا نتبع الخطوات التالية:

أ- نؤثر على الدالة $|l, m>$ بالمؤثر $\hat{L}_+$ أولا وبعدها بالمؤثر $\hat{L}_z$ مع استخدامنا العلاقة $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_+\right] = \hbar\hat{L}_+$، فنحصل على:

$$\begin{aligned}\hat{L}_z\left(\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle\right) &= \left\{\hat{L}_+\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_+\right\}\left|l,m\right\rangle \\ &= \left\{m\hbar\hat{L}_+ + \hbar\hat{L}_+\right\}\left|l,m\right\rangle \\ &= (m+1)\hbar\left(\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle\right)\end{aligned} \quad (٢٢)$$

المعادلة (٢٢) هي معادلة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ حيث الدالة المميزة هي $\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle$ والقيمة المميزة هي $(m+1)\hbar$. لاحظ هنا أن القيمة المميزة قد زادت بمقدار $\hbar$، ولهذا يسمى المؤثر $\hat{L}_+$ بالمؤثر التصاعدي (Raising Operator).

ب- نتبع نفس الخطوات السابقة ولكن بالمؤثر $\hat{L}_-$ أولا وبعدها بالمؤثر $\hat{L}_z$، ونستخدم العلاقة $\left[\hat{L}_z,\hat{L}_-\right] = -\hbar\hat{L}_-$ فنحصل على:

$$\begin{aligned}\hat{L}_z\left(\hat{L}_-\left|l,m\right\rangle\right) &= \left\{\hat{L}_-\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_-\right\}\left|l,m\right\rangle \\ &= \left\{m\hbar\hat{L}_- - \hbar\hat{L}_-\right\}\left|l,m\right\rangle = (m-1)\hbar\left(\hat{L}_-\left|l,m\right\rangle\right)\end{aligned} \quad (٢٣)$$

المعادلة (٢٣) هي معادلة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ حيث الدالة المميزة هي $\left(\hat{L}_-\left|l,m\right\rangle\right)$، والقيمة المميزة هي $(m-1)\hbar$. مقدار القيمة المميزة قد نقص هنا بمقدار $\hbar$، ولهذا يسمى المؤثر $\hat{L}_-$ بالمؤثر التنازلي (Lowering Operators).

ج- ولنا هنا سؤال: ماذا يحدث لو أثرنا بالمؤثر $\hat{L}_+$ على الدالة $|l,m>$ تأثيراً متكرراً لا نهاية له؟ الجواب: إننا سنحصل على زيادة كبيرة جداً في قيمة m، مع افتراض ثبوت قيمة l الابتدائية، التي تجعل قيمة $\hat{L}^2-\hat{L}_z^2$ كمية سالبة. سؤال آخر: هل بالإمكان الحصول على قيمة سالبة للمؤثر $\hat{L}^2-\hat{L}_z^2$؟ الإجابة هي: هذا غير ممكن؛ لأننا نعلم أن $\hat{L}^2-\hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2 \geq 0$. فما الحل إذن؟

الحل: هو أن نفترض قيمة عليا، نسميها $m_{\max}$، بحيث إن $\hat{L}_+\left|l,m_{\max}\right\rangle = 0$.

دعونا الآن نؤثر بالمؤثر $\hat{L}^2-\hat{L}_z^2$ على الدالة $\left|l,m_{\max}\right\rangle$:

$$\left\{\hat{L}^2-\hat{L}_z^2\right\}\left|l,m_{\max}\right\rangle = \left\{\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hbar\hat{L}_z\right\}\left|l,m_{\max}\right\rangle \quad (٢٣)$$

الطرف الأيمن يعطي:

$$\left\{\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hbar\hat{L}_z\right\}\left|l,m_{\max}\right\rangle = 0 + m_{\max}\hbar^2\left|l,m_{\max}\right\rangle \quad \text{(a24)}$$

الطرف الأيسر يعطي:

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \left| l, m_{\max} \right\rangle = \hat{L}^2 \left| l, m_{\max} \right\rangle - m_{\max}^2 \hbar^2 \left| l, m_{\max} \right\rangle \qquad \text{(b24)}$$

بمساواة (a 24) و(b 24) نجد أن:

$$\hat{L}^2 \left| l, m_{\max} \right\rangle = m_{\max} \left(m_{\max} + 1 \right) \hbar^2 \left| l, m_{\max} \right\rangle \qquad (٢٦)$$

المعادلة (٢٦) معادلة مميزة للمؤثر $\hat{L}^2$ بالقيمة المميزة $m_{\max}(m_{\max}+1)\hbar^2$. وبالمقارنة بالقيمة المميزة $l(l+1)\hbar^2$ نستطيع أن نضع $m_{\max} = l$.

نكرر الأسئلة نفسها بالخطوة ج ولكن للمؤثر $\hat{L}_-$ ، ومنها سنفترض قيمة دنيا (أقل قيمة) هي $m_{\min}$ بحيث إن: $\hat{L}_- \left| l, m_{\min} \right\rangle = 0$. والآن نتبع الخطوات نفسها السابقة بالخطوة ٤:

$$\left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \right) \left| l, m_{\min} \right\rangle = \left(\hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar \hat{L}_z \right) \left| l, m_{\min} \right\rangle \qquad (٢٧)$$

لنجد أن:

$$\hat{L}^2 \left| l, m_{\min} \right\rangle - m_{\min}^2 \hbar^2 \left| l, m_{\min} \right\rangle = 0 - m_{\min} \hbar^2 \left| l, m_{\min} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{L}^2 \left| l, m_{\min} \right\rangle = m_{\min} \left(m_{\min} - 1 \right) \hbar^2 \left| l, m_{\min} \right\rangle \qquad (٢٨)$$

المعادلة (٢٨) هي معادلة مميزة للمؤثر $\hat{L}^2$ بالقيمة المميزة $m_{\min}(m_{\min}-1)\hbar^2$. لكننا افترضنا سابقاً أن القيمة المميزة للمؤثر $\hat{L}^2$ هي $l(l+1)\hbar^2$ ، فما الحل؟ للإجابة عن هذا السؤال؛ دعونا نساوي بين $l(l+1)\hbar^2 = m_{\min}(m_{\min}-1)\hbar^2$ لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية وهي $l^2 + l - m_{\min}(m_{\min}-1) = 0$ ولها الحل:

$$l = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m_{\min}(m_{\min}-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4m_{\min} + 4m_{\min}^2}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \left(1 - 2m_{\min}\right)}{2}$$

ومنها نجد أن:

$$l = -m_{\min} \quad \text{or} \quad l = m_{\min} - 1 \qquad (٢٩)$$

لقد افترضنا سابقاً أن $m_{\min}$ هي القيمة الدنيا للقيم m ومن ثم فإن الحل $m_{\min} = -l$ يصبح هو المقبول والحل $l = m_{\min} - 1$ يصبح مرفوضاً.

بالخطوات السابقة عَينا العلاقات بين l, m والقيم المناظرة المميزة لكل من المؤثرين $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$، ولكننا حتى الآن لا نعرف القيم المميزة "l" الحقيقية. والآن دعونا نُعينها: نحن نعلم أن قيم m حقيقية وصحيحة، بمعنى $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$، والآن عرفنا أنها محددة من أعلى بالقيمة $l = m_{\max}$ ومن أسفل بالقيمة $m_{\min} = -l$. وبناءً على حسابات المؤثرات التصاعدية والتنازلية وجدنا أنها تتغير بقيم صحيحة، ومن ثم بالإمكان كتابة $m = -l, -l+1, \cdots, 0, \cdots, l-1, l$ وهذا يعنى:

$$\begin{aligned} m_{\max} = -m_{\min} + k \qquad &\Rightarrow \quad l = -l + k \\ &\Rightarrow \quad 2l = k \end{aligned} \tag{٣٠}$$

حيث k قيم صحيحة (زوجية أو فردية). وهذه العلاقة تصبح صحيحة في حالتين: إما أن تأخذ l قيماً صحيحة أو تأخذ أنصاف قيم صحيحة فردية:

$$l = \begin{cases} \text{Integer} \\ \dfrac{1}{2} \times \text{Odd Integer} \end{cases} \tag{٣١}$$

فأي الحلين نختار؟ **الحل:** هو الأخذ بقيم التجارب المعملية، وهي أن العزم الزاوي المداري للذرة هو عدد صحيح موجب، ومن ثم فإن l تأخذ قيماً صحيحة موجبة.

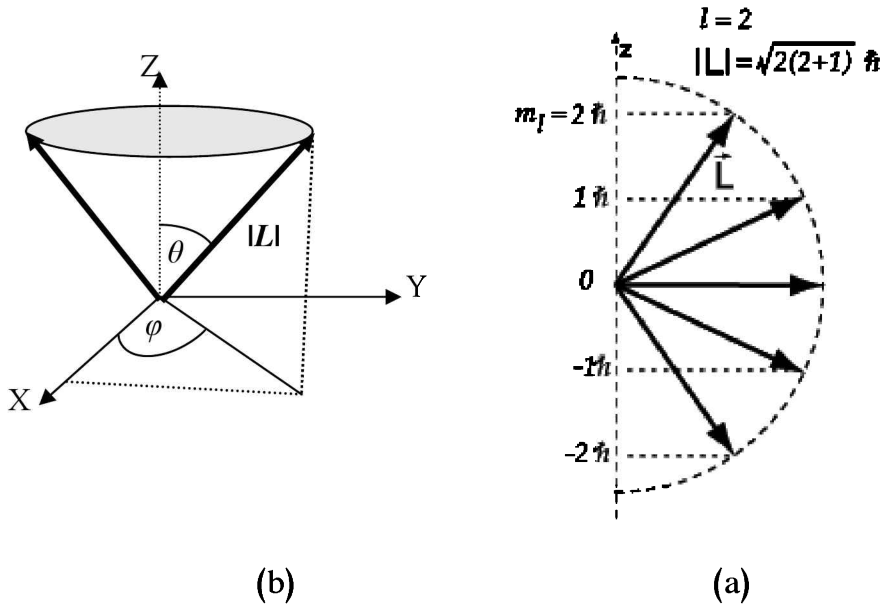
مثال: ماهى قيم $|\hat{L}|$ و $|\hat{L}_z|$ للحالة $l = 2$؟

الحل: قيم $|\hat{L}|$ و $|\hat{L}_z|$ للحالة $l = 2$ هي:

$$|\hat{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar = \sqrt{2(2+1)}\,\hbar = \sqrt{6}\,\hbar$$
$$|\hat{L}_z| = m_l \hbar \equiv \{-2\hbar, -1\hbar, 0, 2\hbar, 1\hbar\}$$

مثال: ارسم شكلا لقيم m_l المسموحة للحالة $l = 2$.

الحل:



شكل (٣) تكميم العزم الزاوي للحالة $l = 2$ (a) العزم الزاوي بأخذ اتجاهات معينة فقط، تلك التي تكون مساقطة على المحور z (المركبة $|\hat{L}_z| = m_l\hbar = m\hbar$) عبارة عن مضاعفات صحيحة للعدد $\hbar$. (b) يدور $|\hat{L}|$ حول Z كمخروط نصف زاوية رأسه θ، $\cos\theta = \dfrac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$ مع ملاحظة أن اختيار المحور Z هو اختيار اعتباطي بحت، وذلك لسهولة التعامل مع المؤثر $\hat{L}_z$ والزاوية φ ليست لها علاقة باتجاه $|\hat{L}|$.

مثال : احسب مصفوفة كل من المؤثرات $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ للدالة $|l,m\rangle$ حيث $l = 1$.

الحل: حيث إن $l = 1$ لذلك فإن $m_l = 1,0,-1$ ومنها نحصل على مصفوفة 3×3.

من ثم فإن مصفوفة المؤثر $\hat{L}_z$ هي:

$$\left(\hat{L}_z\right) = <m'|\hat{L}_z|m> = m\hbar\underbrace{<m'|m>}_{\delta_{m'm}} = \hbar \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} <11| & <10| & <1-1| \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} |11> \\ |10> \\ |1-1> \end{array} \end{array}$$

ومصفوفة المؤثر $\hat{L}^2$ هي:

$$\left(\hat{L}^2\right) = <l'|\hat{L}^2|l> = l(l+1)\hbar^2 \underbrace{<l'|l>}_{\delta_{l'l}} = 2\hbar^2 \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} <11| & <10| & <1-1| \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} |11> \\ |10> \\ |1-1> \end{array} \end{array}$$

٥- نتائج مفصلة للمؤثرات التصاعدية والتنازلية

هنا نعطي إجابة عن السؤال التالي: ما الناتج من تأثير $\hat{L}_{\pm}$ على الدالة $|l,m>$؟

الإجابة: نبدأ بتأثير المؤثر التصاعدي $\hat{L}_+$ على الدالة $|l,m>$. وحيث إن $\hat{L}_+$ كان سبباً لزيادة m بمقدار الوحدة، فإننا يمكن كتابة

$$\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle = C_{m+1}\left|l,m+1\right\rangle \qquad (32)$$

والمرافق له هو:

$$\left\langle l,m'\right|\hat{L}_- = C^*_{m+1}\left\langle l,m+1\right| \qquad (٣٣)$$

لذلك فإن

$$\begin{aligned} \left\langle l',m'\right|\hat{L}_-\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle &= \left\langle l,m+1\right|C^*_{m+1}C_{m+1}\left|l,m+1\right\rangle \\ &= \left|C_{m+1}\right|^2 \underbrace{\left\langle l',m+1\middle|l,m+1\right\rangle}_{\delta_{ll}\delta_{m+1,m+1}=1} \end{aligned}$$

باستخدام العلاقة $\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$ ، نجد أن:

$$\begin{aligned} \left|C_{m+1}\right|^2 &= \left\langle l,m\right|\hat{L}_-\hat{L}_+\left|l,m\right\rangle = \left\langle l,m\right|\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z\left|l,m\right\rangle \\ &= \left\langle l,m\right|l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 - \hbar m\hbar\left|l,m\right\rangle \\ &= \hbar^2\left(l(l+1) - m(m+1)\right)\underbrace{\left\langle l,m\middle|l,m\right\rangle}_{=1} \end{aligned}$$

ومنها نجد أن:

$$\left|C_{m+1}\right| = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \qquad (٣٣)$$

ومن ثم فإن:

$$\hat{L}_+ \left| l, m \right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} \left| l, m+1 \right\rangle \qquad (٣٤)$$

واجب منزلي: أثبت أن $\hat{L}_- \left| l, m \right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} \left| l, m-1 \right\rangle$

مثال: أوجد المصفوفة التي تمثل المؤثر $\hat{L}_x$ للقيمة $l = 1$.

الحل:

$$\hat{L}_x \mid l, m >= \frac{1}{2}(\hat{L}_+ + \hat{L}_-) \mid l, m >= \frac{1}{2}\left[C_+ \mid l, m+1 > + C_- \mid l, m-1 >\right]$$

$$< l, m' \mid \hat{L}_x \mid l, m >= \frac{1}{2}\left[C_+ \underbrace{< l, m' \mid l, m+1 >}_{\delta_{m', m+1}} + C_- \underbrace{< l, m' \mid l, m-1 >}_{\delta_{m', m-1}}\right]$$

حيث:

$$C_+ = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} = \sqrt{2},$$
$$C_- = \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} = \sqrt{2}$$

ولذلك فإن:

$$\left(\hat{L}_x\right) = \frac{\hbar}{2}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} <11\mid & <10\mid & <1-1\mid \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \frac{\hbar}{2}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} <11\mid & <10\mid & <1-1\mid \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \mid 11> \\ \mid 10> \\ \mid 1-1> \end{array} \end{array}$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال: احسب $\left\langle Y_{3,2} \middle| \hat{L}_x \middle| Y_{3,1} \right\rangle$

الحل:

أولاً: نستخدم العلاقة $\hat{L}_x = \left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)/2$ نجد

$$\left\langle Y_{3,2}\left|\hat{L}_x\right|Y_{3,1}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(\left\langle Y_{3,2}\left|\hat{L}_+\right|Y_{3,1}\right\rangle + \left\langle Y_{3,2}\left|\hat{L}_-\right|Y_{3,1}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\langle Y_{3,2}\left|C_+\right|Y_{3,2}\right\rangle + \underbrace{\left\langle Y_{3,2}\left|C_-\right|Y_{3,0}\right\rangle}_{=C_-\delta_{3,3}\delta_{2,0}=0}\right) = \frac{C_+}{2}$$

ثانياً: باستخدام $l = 3, \quad m = 1$ نجد أن:

$$C_+ = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} = \hbar\sqrt{3(4) - 1(2)}$$
$$= \hbar\sqrt{10}$$

لذلك فإن:

$$\left\langle Y_{3,2}\left|\hat{L}_x\right|Y_{3,1}\right\rangle = \hbar\frac{\sqrt{10}}{2}$$

مثال: احسب القيمة $< 2,0 | \hat{L}_-\hat{L}_+ | 2,0 >$.

الحل: الطريقة الأولى: نستخدم العلاقة $\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z$ لنجد

$$< 2,0 | \hat{L}_-\hat{L}_+ | 2,0 > = < 2,0 | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z | 2,0 >$$
$$= < 2,0 | 2(3)\hbar^2 - 0(1)\hbar^2 - 0\,\hbar^2 | 2,0 > = 6\hbar^2$$

الطريقة الثانية: نستخدم

$$< 2,0 | \hat{L}_-\hat{L}_+ | 2,0 > = < 2,0 | \hat{L}_- C_+ | 2,1 >$$
$$= C_+ < 2,0 | \hat{L}_- | 2,1 > = C_+C_- = 6\hbar^2$$

حيث استخدمنا

$$C_+ = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)} = \hbar\sqrt{2(3) - 0(0+1)} = \hbar\sqrt{6},$$
$$C_- = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)} = \hbar\sqrt{2(3) - 1(1-1)} = \hbar\sqrt{6}.$$

مثال: بمعرفة الدالة الموجية $|2,1> = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi}$ احسب الدالة $|2,2>$.

الحل:

أولاً: نستخدم العلاقة

$$\begin{aligned}\hat{L}_+\left|2,1\right\rangle &= C_+\left|2,2\right\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\left|2,2\right\rangle\\ &= 2\hbar\left|2,2\right\rangle\end{aligned}$$

ثانياً: نستخدم العلاقة

$$\begin{aligned}\hat{L}_+\left|2,1\right\rangle &= \hbar e^{+i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left(-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{i\varphi}\right)\\ &= -\hbar\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\theta\right)^2\end{aligned}$$

بمساواة المعادلتين السابقتين في أولاً و ثانياً نجد أن:

$$\left|2,2\right\rangle = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\left(e^{i\varphi}\sin\theta\right)^2$$

مثال: بمعرفة الدالة الموجية $|1,0> = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ احسب الدالة $|1,-1>$.

الحل:

أولاً: نستخدم العلاقة

$$\begin{aligned}\hat{L}_-\left|1,0\right\rangle &= C_-\left|1,-1\right\rangle\\ &= \hbar\sqrt{1(1+1)-0(0-1)}\left|1,-1\right\rangle = \sqrt{2}\hbar\left|1,-1\right\rangle\end{aligned}$$

ثانياً: نستخدم العلاقة

$$\begin{aligned}\hat{L}_-\left|1,0\right\rangle &= -\hbar e^{-i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}-i\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]\left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\right)\\ &= \hbar\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\end{aligned}$$

بمساواة المعادلتين السابقتين في أولاً و ثانياً نجد أن:

$$|1,-1\rangle = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

٦- تمارين عامة

1- تحقق من العلاقات التالية:

$$a)\quad \sin\theta\cos\varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[-Y_{1,1}+Y_{1,-1}\right]$$

$$b)\quad \sin^2\theta\cos 2\varphi = \sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right]$$

$$c)\quad xz = r^2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[-Y_{2,1}+Y_{2,-1}\right]$$

$$d)\quad x^2-y^2 = r^2\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left[Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right]$$

$$e)\quad xy = \frac{r^2}{i}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[-Y_{2,2}+Y_{2,-2}\right]$$

$$f)\quad y = ir\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_{2,2}-Y_{2,-2}\right]$$

٢- أثبت أن الدالة العيارية، $\psi(r) = -A(x+iy)e^{-r/2}$، بالإمكان وضعها على الصورة $\psi(r) = Ar\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,1}e^{-r/2}$ و أثبت أن $A = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}$.

٣- أثبت أن:

$$\hat{L}_z\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi\right) = 2\hbar e^{2i\varphi}$$

٤- للدالة $|l,m\rangle$ حيث $l=1$. تأكد من حساب المصفوفات التالية:

$$\left(\hat{L}_x\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad \left(\hat{L}_y\right) = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{L}_+\right)=\hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \left(\hat{L}_-\right)=\hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{L}_x\hat{L}_y\right)=\left(\hat{L}_x\right)\left(\hat{L}_y\right)\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}i&0&-i\\0&0&0\\i&0&-i\end{pmatrix};\qquad \left(\hat{L}_y\hat{L}_x\right)=\left(\hat{L}_y\right)\left(\hat{L}_x\right)=\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}-i&0&-i\\0&0&0\\i&0&i\end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{L}_x\hat{L}_y+\hat{L}_y\hat{L}_x\right)=i\hbar^2\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \left(\hat{L}_x\hat{L}_y-\hat{L}_y\hat{L}_x\right)=i\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=i\hbar\left(\hat{L}_z\right)$$

٥- للدالة $|l,m>$ تأكد من القيم:

$$\left\langle\hat{L}_x\right\rangle=\left\langle\hat{L}_y\right\rangle=0,\quad \left\langle\hat{L}_x^2\right\rangle=\left\langle\hat{L}_y^2\right\rangle=\frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1)-m^2\right]$$

$$\Delta\hat{L}_x\,\Delta\hat{L}_y\geq\frac{\hbar^2 m}{2},\ \text{where } \Delta\hat{L}_i=\sqrt{\left\langle\hat{L}_i^2\right\rangle-\left\langle\hat{L}_i\right\rangle^2}$$

٦- بمعرفة الدالة الموجية $|1,1>=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$ أثبت أن $|1,0>=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$.

٧- أثبت أن

$$(a)\quad \left\langle Y_{3,2}\middle|\hat{L}_z\middle|Y_{3,2}\right\rangle=2\hbar,$$

$$(b)\quad \left\langle Y_{3,2}\middle|\hat{L}_x\middle|Y_{3,3}\right\rangle=\hbar\frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$(c)\quad \left\langle Y_{3,2}\middle|\hat{L}_z\middle|Y_{3,1}\right\rangle=0$$

٨- أثبت العلاقة: $\boxed{\left(\Delta J_x\right)^2\left(\Delta J_y\right)^2\geq\frac{\hbar^2}{4}\left\langle J_z\right\rangle^2}$

٩- جسيم يوصف مستواه بالدالة المعايرة الآتية $|n,l,m_l>$:

$$|\psi>=\frac{1}{6}\left(4|1,0,0>+3|2,1,1>-i\,|2,1,0>+\sqrt{10}\,|2,1,-1>\right).$$

أثبت أن

$$.<\hat{L}_z> = -\frac{1}{36}\hbar, <\hat{L}_z^2> = \frac{19}{36}\hbar^2, <\hat{L}^2> = \frac{10}{9}\hbar^2, <\hat{L}_y> = \hbar\frac{(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}{36}$$

١٠- جسيم يوصف مستواه بالدالة المعايرة الآتية $|l,m_l>$:

$$\psi(r) = A\left[3|0,0\rangle + 2|1,1\rangle - |1,0\rangle + \sqrt{10}|1,-1\rangle\right]$$

أثبت أن $A = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ ، $\langle\hat{L}^2\rangle = 1.25\hbar^2$ ، $\langle\hat{L}_z\rangle = -0.25\hbar$ ، $\langle\hat{L}_z^2\rangle = \frac{7}{12}\hbar^2$.

١١- تحقق من التالي:

$$a- \quad \sin\theta(\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi) = -\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,1} - \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,-1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,-1}$$

وأثبت أنها دالة غير مميزة للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$.

$$b- \quad \sin\theta(1-\cos\theta)e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_{1,1} - \sqrt{\frac{8\pi}{15}}Y_{2,1}$$

وأثبت أنها دالة مميزة للمؤثر $\hat{L}_z$ فقط.

$$c- \quad \sqrt{\pi} - \sqrt{3\pi}\cos^2\theta = -\pi\sqrt{\frac{16}{5}}Y_{2,0}$$

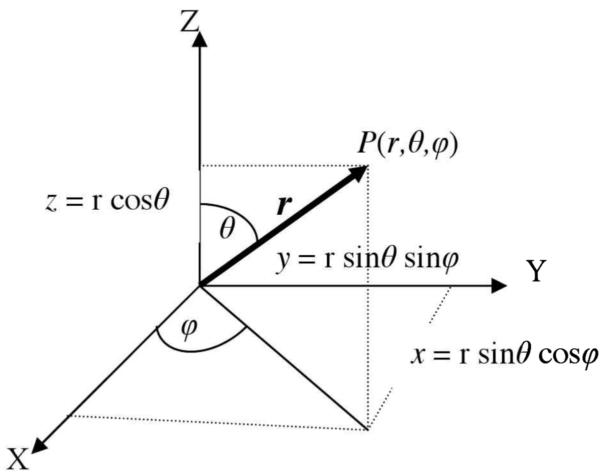
وأثبت أنها دالة مميزة للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$.

$$d- \quad \sin\theta\cos\varphi = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,1} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_{1,-1}$$

وأثبت أنها دالة مميزة للمؤثر $\hat{L}^2$ فقط.

ملحق(6.A)

الإحداثيات القطبية الكروية



شكل (1) الإحداثيات القطبية الكروية

في الإحداثيات القطبية الكروية، تستخدم الزاويتان θ,φ في تحديد موقع النقطة P على سطح كرة نصف قطرها r (انظر شكل 1) بحيث إن: $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. من الشكل نجد أن θ زاوية السمت الرأسية (Zenith angle) تعرف بالعلاقة: $\cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ وتتغير من 0 إلى π، وزاوية السمت φ (Azimuthal angle) تعرف بالعلاقة: $\tan\varphi=\frac{y}{x}$ وتتغير من 0 إلى 2π. يمكن ربط العلاقات الثلاث وعكسها في الإحداثيات القطبية الكروية والكرتيزية كالتالي:

$$\left.\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi, & |\boldsymbol{r}| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
y &= r\sin\theta\sin\varphi, & \theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\\
z &= r\cos\theta, & \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x}
\end{aligned}\right\} \qquad (١)$$

وعنصر الحجم هو $d\tau = r^2\, dr\, d\Omega$ حيث تأخذ r القيم من 0 إلى ∞ وتعرف $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ بالزاوية المجسمة.

واجب منزلي: من العلاقات (1) أثبت التفاضلات التالية:

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -y$
$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = x$
$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$	$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$

مثال: أثبت العلاقة:

$$\hat{L}_z \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

الحل: باستخدام التفاضلات من الجدول السابق نحصل على:

$$\begin{aligned} -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} &= -i\hbar\left(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}_{-y}\frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}_{x}\frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial\varphi}}_{0}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= -i\hbar\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = \hat{L}_z \end{aligned}$$

ينتج المطلوب.

واجب منزلي: تحقق من الحسابات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{x/r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

ومنها أثبت أن

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

واجب منزلي: أثبت العلاقات الآتية

$$\hat{L}_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)=i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)=i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2=\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad (٢)$$

$$\hat{L}_\pm\equiv\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y=\pm\hbar e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\pm i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

قيمة $\hat{L}^2$ بالمعادلة (٢) مهمة جداً وخصوصاً عند استخدامها بمعادلة شرودنجر:

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+V(r), \quad (٣)$$

حيث يأخذ المؤثر ∇^2 في الإحداثيات القطبية الكروية الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\nabla^2&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}.\end{aligned} \quad (٤)$$