الباب الرابع

نظرية المؤثرات وأقواس ديراك

Operators Theory and Dirac’s Brackets

الباب الرابع

نظرية المؤثرات وأقواس ديراك

في هذا الباب سوف نقدم وصفة بسيطة اقترحها ديراك للتعامل مع الدوال الموجية للنظام؛ التي تسمى أحيانا دوال الحالة. وهي طريقة مختصرة وملائمة لوصف الحالة الكمية. وقد اقترحها ديراك لكي يتمكن من دمج نظريتي شرودنجر للميكانيكا الموجية، وهيزنبرج لميكانيكا المصفوفات وأيضاً ليتعامل مع الدوال بصور مجردة بغض النظر عن إحداثياتها.

وقد علمنا مما تقدم في الأبواب السابقة أن الدالة $\Psi(q,t)$ ، التي تحسب من حل معادلة شرودنجر، تصف حركة الجسيم ومنها نستطيع حساب احتمالية وجوده في مكان ما. وهدفنا في هذا الباب هو إيجاد طريقة عامة لمحاكاة الدالة الموجية بشيء نستطيع التعامل معها رياضياً، مثل المتجهات. فهل سننجح للوصول إلى هدفنا؟ هذا ما سنعرفه في الأجزاء التالية.

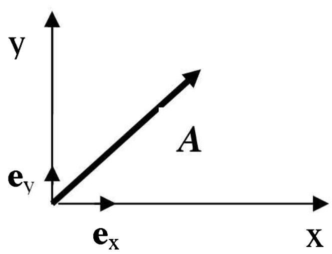
١- أقواس ديراك (كت وبرا)

نبدأ هنا بمثال بسيط لمتجه في بعدين، حيث إنه من السهل تعميمه إلى أي فراغ افتراضي. ولنبدأ بفرض أننا نتعامل مع المتجه $\boldsymbol{A}$ في بعدين $(\mathrm{x,y})$ ، كما بالشكل ١، حيث إن:

$$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y \qquad (١)$$

حيث $A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x$ و $A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y$ هما مساقط المتجه $\boldsymbol{A}$ في الإحداثيات $(\mathrm{x,y})$ على الترتيب. $\boldsymbol{e}_x , \boldsymbol{e}_y$ هما متجهات الوحدة في اتجاهي $(\mathrm{x,y})$ على الترتيب ويحققان خاصتي التعامد- العيارية، بمعنى أن:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}, \qquad i,j \equiv x,y \qquad (٢)$$



شكل (١) المتجه A في الإحداثيات $(\mathrm{x,y})$.

المعادلة (٢) يمكن أيضاً أن تُعرف من خلال استخدام المصفوفات، بحيث نستطيع أن نضع متجهات الوحدة بالصورة:

$$\boldsymbol{e}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{e}_x \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\boldsymbol{A} = A_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \qquad (٣)$$

مثال: أثبت خواص المعادلة (٢) باستخدام المصفوفات.

الحل: لإثبات خواص المعادلة (٢) باستخدام المصفوفات، دعونا نوضح كيف نحسب حاصل الضرب $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y$. لقد عَرفنا $\boldsymbol{e}_y$ بالمصفوفة $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ولضرب المصفوفة من اليسار بالعنصر $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، ولكي نحقق قوانين ضرب المصفوفات، يجب أن نحول صفوف $\boldsymbol{e}_x$ إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف، ونأخذ المرافق المركب (إذا كانت عناصر المصفوفة مركبة) للحصول على النتيجة المعرفة بالمتجهات:

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

لاحظ أننا حولنا $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ إلى المرافق المركب $\boldsymbol{e}_x^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

واجب منزلي: أثبت بقية الخواص للمعادلة (٢) باستخدام المصفوفات.

والآن من السهل تعميم الإحداثيات الثنائية إلى فراغ مركب وغير متناهي الأبعاد يسمى "فراغ هلبرت" بحيث إن:

$$\boldsymbol{A} = \sum_i A_i \, \boldsymbol{e}_i \qquad (٤)$$

حيث إن متجهات الوحدة تحقق خاصتي التعامد- العيارية $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$.
وبمقارنة المعادلة (٤) مع الدالة التامة:

$$\Psi = \sum_i a_i \ \varphi_i \qquad (٥)$$

نجد أن:

أ- الدالة الموجية Ψ يمكن التعبير عنها بالمتجه A ،

ب- المركبات φ_i يمكن التعبير عنها بمتجه الوحدة e_i ،

ج- المعاملات a_i يمكن التعبير عنها بالضرب القياسي $e_i \cdot A$ ،

٢- الضرب القياسي

قبل أن ندرس كيف يتم الحصول على خاصتي العيارية والتعامد بواسطة المصفوفات سوف نستخدم طريقة جديدة تعرف بأقواس ديراك لتعريف e_x و e_y بالصورة:

$$|i\rangle \equiv e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad و \quad |j\rangle \equiv e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

وسوف نُعرف الآن الحالة الكمية (كت): $\underbrace{|i\rangle}_{\text{ket}}$ والمرافق لها وهي (برا) $\langle i|^{\dagger} = \underbrace{\langle i|}_{\text{bra}}$

بحيث إن حاصل الضرب القياسي يعرف بالصورة:

$$\underbrace{< i\ |}_{\text{bra}}.\underbrace{|\ i\ >}_{\text{ket}} = < i\ |\ i\ >$$

ويعطي كمية قياسية (ليست متجهة)، حقيقية وموجبة.

مثال: إذا عُرفت الحالة الكمية بالمصفوفة: $|a\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 2-i \end{pmatrix}$:

أ- احسب المرافق للمصفوفة، أي $\langle a|$

ب- احسب القيمة $\langle a|a\rangle$

الحل:

أ- $\langle a| = \begin{pmatrix} 1+i & +i & 2-i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1-i & -i & 2+i \end{pmatrix}$

ب- $\langle a|a\rangle = \begin{pmatrix} 1-i & -i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 2-i \end{pmatrix} = \underline{8}$

ملاحظات:

أ- بعض الأمثلة للتحويلات:

$$|a\rangle + |b\rangle = |c\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle a| + \langle b| = \langle c|$$

$$< a \,|\, \lambda b > = \lambda < a \,|\, b > \quad \Rightarrow \quad < \lambda a \,|\, b > = \lambda^* < a \,|\, b >$$

$$\langle a| \left[\lambda |b\rangle + \gamma |c\rangle \right] = \lambda \langle a|b\rangle + \gamma \langle a|c\rangle$$

حيث λ, γ ثوابت.

ب- لحساب المرافق غالباً نتبع الجدول التالي:

المرافق	الكمية	التعريف
λ^*	λ	الثابت
$a^\dagger = \langle \;\; |$	$a = | \;\; \rangle$	كت
$a = | \;\; \rangle$	$a^\dagger = \langle \;\; |$	برا

مثال: للدالتين:

$$|\psi\rangle = i\,|\varphi_1\rangle - 5i\,|\varphi_2\rangle,$$
$$|\chi\rangle = -|\varphi_1\rangle + 2i\,|\varphi_2\rangle$$

حيث إن $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$ ، احسب القيم القياسية التالية:

(a) $\langle\psi|\psi\rangle$

(b) $\langle\chi|\chi\rangle$

(c) $\langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle$

الحل: نبدأ بإيجاد المرافق للدوال المعرفة كالتالي:

$$|\psi\rangle = i\,|\varphi_1\rangle - 5i\,|\varphi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\psi| = -i\,\langle\varphi_1| + 5i\,\langle\varphi_2|$$
$$|\chi\rangle = -|\varphi_1\rangle + 2i\,|\varphi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\chi| = -\langle\varphi_1| - 2i\,\langle\varphi_2|$$

بالتالي:

(a) $\langle\psi|\psi\rangle = \left(-i\,\langle\varphi_1| + 5i\,\langle\varphi_2|\right)\left(i\,|\varphi_1\rangle - 5i\,|\varphi_2\rangle\right) = (-i)(i) + (5i)(-5i)$
$= 1 + 25 = \underline{26}$

(b) $\langle\chi|\chi\rangle = \left(-\langle\varphi_1| - 2i\,\langle\varphi_2|\right)\left(-|\varphi_1\rangle + 2i\,|\varphi_2\rangle\right) = (-1)(-1) + (-2i)(2i)$
$= 1 + 4 = \underline{5}$

(c) $\because |\psi+\chi\rangle = (i-1)|\varphi_1\rangle - 3i\,|\varphi_2\rangle$
$\therefore \langle\psi+\chi| = (-i-1) < \varphi_1| - (-3i) < \varphi_2|,$

$\therefore \langle\psi+\chi|\psi+\chi\rangle = (i-1)(-i-1) < \varphi_1|\varphi_1 > + (-3i)(3i) < \varphi_2|\varphi_2 >$
$= (1+1) + 9 = \underline{11}$

مثال: احسب ثابت العيارية c للدالة الموجية $\langle\psi| = c\begin{pmatrix}4 & -3i\end{pmatrix}$.

الحل: باستخدام شرط العيارية $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ نجد أن:

$$\langle\psi|\psi\rangle = c^2\begin{pmatrix}4 & -3i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3i\end{pmatrix} = c^2(16+9) = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1/\sqrt{25} = \underline{\frac{1}{5}}.$$

٣- المؤثرات

تكلمنا باختصار في الباب السابق على المؤثرات وبعض من خصائصها، وفي هذا الجزء سوف نستعرض بعضاً من الخصائص الأخرى للمؤثرات.

لنأخذ مثالاً بسيطاً لدوران المحاور من الإحداثيات (x,y) إلى الإحداثيات (x',y') بزاوية مقدارها θ ، باتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة، مع ثبوت قيمة المتجه $|\Psi>$ (انظر الشكل ٢). الآن نجد أن المتجه $|\Psi>$ يُعرف في الإحداثيات (x,y) بالصورة:

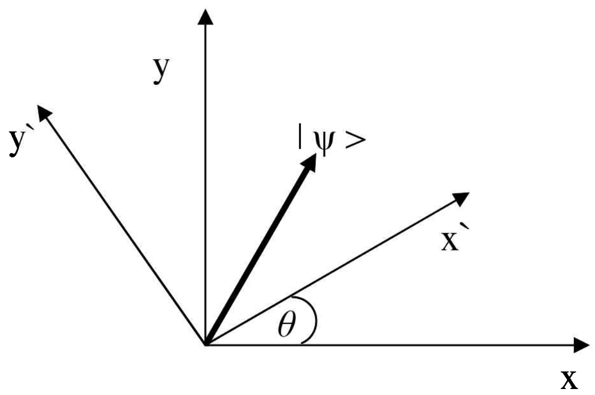
$$\left|\Psi\right\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

وفي الإحداثيات (x',y') بالصورة:

$$\left|\Psi'\right\rangle = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$$

ونحن نعلم أن العلاقة بين المحاور تُعطى بالعلاقة الخطية:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



شكل (٢) دوران المحاور من الإحداثيات (x,y) إلى الإحداثيات (x',y'). بزاوية مقدارها θ مع ثبوت قيمة المتجه $|\Psi>$

ولهذا نجد أن:

$$\left|\Psi'\right\rangle = \hat{A}\left|\Psi\right\rangle \qquad (٦)$$

ومنها نستطيع القول: إن المؤثر $\hat{A}$ عندما أثر على متجه الحالة $|\Psi\rangle$ حوله إلى متجه الحالة $|\Psi'\rangle$ في نفس الفراغ. وهذا يعني أننا نستطيع تغيير النظام الفيزيائي إلى نظام فيزيائي آخر باستخدام مؤثر في فراغ هلبرت.

واجب منزلي: أثبت أن $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ملاحظات مهمة على المؤثرات:

أ- مسموح بإجراء عمل المؤثرات الآتية:

$$\hat{A}|\Psi\rangle = |\Psi'>$$

$$\langle\Psi|\hat{A}^{\dagger} = \langle\Psi'|$$

$$\hat{A}\hat{B}|\Psi\rangle = \hat{A}\left(\hat{B}|\Psi\rangle\right)$$

ب- غير مسموح بإجراء عمليات المؤثرات الآتية:

$\hat{A}\,\langle\Psi|$ أو $|\Psi\rangle\hat{A}$

ج- بالنسبة للمؤثر يفضل (وليس شرطاً ضرورياً) أن يكون له خصائص خطية، بمعنى:

$$\hat{A}\left[\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle\right] = \alpha\hat{A}|\psi_1\rangle + \beta\hat{A}|\psi_2\rangle,$$

$$\left[\alpha\langle\psi_1| + \beta\langle\psi_2|\right]\hat{A} = \alpha\langle\psi_1|\hat{A} + \beta\langle\psi_2|\hat{A}.$$

حيث إن α, β ثوابت.

مثال: احسب القيمة المتوقعة للمؤثر $\langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ بمعرفة أن:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad <\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

الحل: بإجراء الحسابات:

$$\langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \quad -i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 \quad i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(1-1) = \underline{0}.$$

٤- المؤثرات المسقطية

إذا عرفنا المتجه

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \qquad (٧)$$

فإننا نجد أن:

$$\langle \boldsymbol{e}_x | \boldsymbol{A} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = A_x$$

وهذا يدل على أن الضرب القياسي $\langle \boldsymbol{e}_x | \boldsymbol{A} \rangle$ ماهو إلا مسقط المتجه $\boldsymbol{A}$ باتجاه المحور x . من ثم فإننا يمكن وضع المتجه $\boldsymbol{A}$ بالصورة:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}\rangle &= |\boldsymbol{e}_x\rangle A_x + |\boldsymbol{e}_y\rangle A_y = |\boldsymbol{e}_x\rangle\langle \boldsymbol{e}_x|\boldsymbol{A}\rangle + |\boldsymbol{e}_y\rangle\langle \boldsymbol{e}_y|\boldsymbol{A}\rangle \\ &= \left\{ |\boldsymbol{e}_x\rangle\langle \boldsymbol{e}_x| + |\boldsymbol{e}_y\rangle\langle \boldsymbol{e}_y| \right\} |\boldsymbol{A}\rangle \\ &= \hat{1}|\boldsymbol{A}\rangle \end{aligned}$$

ومنها نستطيع أن نعرف مؤثراً جديداً ، ألا وهو مؤثر الوحدة ، بالصورة:

$$\boxed{\hat{1} = \sum_i |\boldsymbol{e}_i\rangle\langle \boldsymbol{e}_i|} \qquad (8a)$$

و منه نعرف المؤثر المسقطي بالصورة:

$$\boxed{\hat{P}_i = |\boldsymbol{e}_i\rangle\langle \boldsymbol{e}_i|}\,. \qquad (8b)$$

مثال: أثبت أن $\hat{P}_i^{\,2} = \hat{P}_i$

الحل:

$$\hat{P}_i^{\,2}|\alpha\rangle = \hat{P}_i\hat{P}_i|\alpha\rangle = \hat{P}_i|\boldsymbol{e}_i\rangle\langle \boldsymbol{e}_i|\alpha\rangle = |\boldsymbol{e}_i\rangle\underbrace{\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i\rangle}_{\delta_{ii}}\langle \boldsymbol{e}_i|\alpha\rangle = \hat{P}_i|\alpha\rangle$$

مثال: احسب تأثير $\hat{P}_x$ على المستوى $\left|A\right\rangle$.

الحل: تأثير $\hat{P}_x$ على المستوى $\left|A\right\rangle$ يحسب كالتالي:

$$\hat{P}_x \left|A\right\rangle = \left|\boldsymbol{e}_x\right\rangle \underbrace{\left\langle \boldsymbol{e}_x \middle| A\right\rangle}_{A_x} = A_x \left|\boldsymbol{e}_x\right\rangle$$

٥- مبدأ التراكب

نعلم أن المؤثر الهملتوني هو مؤثر خطي. ولهذا إذا كانت الدالتان المنفصلتان φ_1 و φ_2 هما حلان منفصلان يحققان معادلة شرودنجر، فإن مبدأ التراكب ينص على أن الدالة:

$$\Psi = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$$

حيث $a_1,\ a_2$ ثوابت، هي أيضاً تحقق معادلة شرودنجر. لذلك إذا كانت:

$$\left|\varphi_i\right\rangle, \quad i = 1,2$$

تكون فئة كاملة، مثال على ذلك إحداثيات الوحدة في ثلاثة أبعاد:

$$|\,i\,> = \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |\,j\,> = \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad |\,k\,> = \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

فإننا بالإمكان أن نكتب الدالة Ψ بالصورة $\left|\Psi\right\rangle = \sum_i a_i \left|\varphi_i\right\rangle$ ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned}\left\langle \Psi \,|\, \Psi\right\rangle &= \sum_{i,j} \left\langle a_i\varphi_i \,|\, a_j\varphi_j\right\rangle = \sum_{i,j} a_i^* a_j \underbrace{\left\langle \varphi_i \,|\, \varphi_j\right\rangle}_{\delta_{ij}} \\ &= \sum_i |\,a_i\,|^2 = \sum_i P_i = 1\end{aligned} \qquad (٩)$$

حيث P_i هو الكثافة الاحتمالية (وليس المؤثر المسقطي $\hat{P}_i$) لتواجد النظام في الحالة $\left|\varphi_i\right\rangle$.

مثال: احسب القيمة المتوسطة $\langle \Psi | \hat{G} | \Psi \rangle$ حيث $\hat{G} | \varphi_i > = g_i | \varphi_i >$ و $|\Psi\rangle = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle$ والدالة φ_i معيرة.

الحل: بواسطة المعلومة $\hat{G} | \varphi_i > = g_i | \varphi_i >$ نجد أن:

$$\begin{aligned} \langle \hat{G} \rangle = \langle \Psi | \hat{G} | \Psi \rangle = \sum_{i,j} a_i^* a_j \underbrace{\langle \varphi_i | \hat{G} | \varphi_j \rangle}_{g_i \delta_{ij}} = \sum_i g_i |a_i|^2 \\ = \sum_i g_i P_i \end{aligned} \quad (١٠)$$

لحساب سعة الاحتمال a_i من المعادلة $\Psi = \sum_i a_i \varphi_i$ نستخدم الضرب القياسي:

$$\langle \varphi_i | \Psi \rangle = \sum_j a_j \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = a_i .$$

مثال: جسيم، كتلته m، يتحرك في جهد متذبذب توافقي معادلة جهده هي $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$، ودالة مستواه المعيرة هي:

$$\psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{6}} \left[\varphi_0(x) + i \varphi_1(x) - 2\varphi_2(x) \right]$$

حيث $\varphi_n(x)$ هي الدوال المميزة للمتذبذب التوافقي المناظرة للقيم المميزة $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. احسب سعة الاحتمال لكل دالة $\varphi_i(x)$ وأوجد الطاقة المتوقعة لهذا المستوى.

الحل: من الدالة المعيرة $\psi(x,0)$ يمكن تكوين الجدول التالي (قراءة الجدول من اليمين لليسار):

$E_n \mid a_n \mid^2$	القيم المميزة E_n	السعه لكل دالة a_n	الدوال المميزة φ_n	n
$\frac{1}{12}\hbar\omega$	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$a_o = \frac{1}{\sqrt{6}}$	φ_0	0
$\frac{3}{12}\hbar\omega$	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$a_1 = \frac{i}{\sqrt{6}}$	φ_1	1
$\frac{20}{12}\hbar\omega$	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	$a_2 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$	φ_2	2

ومن ثم فإن الطاقة المتوقعة هي:

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n \mid a_n \mid^2 = E_o |a_o|^2 + E_1 |a_1|^2 + E_2 |a_2|^2 = 2\hbar\omega.$$

مثال: عملة معدنية ذات وجهين، وجه للصورة يُعرف بالدالة $\mid \psi_1 >$ ووجه للكتابة يعرف بالدالة $\mid \psi_2 >$ ودالة الحالة العيارية $|\Psi\rangle$ تعرف بالعلاقة:

$$|\Psi\rangle = a_1 \mid \psi_1 > + a_2 \mid \psi_2 >$$

احسب a_1 و a_2.

الحل: باستخدام العلاقة $< \psi_i \mid \psi_j > = \delta_{ij}$ نجد أن:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi \mid \Psi \rangle &= \left(a^*_1 \langle \psi_1| + a^*_2 \langle \psi_2|\right)\left(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle\right) \\
&= a^*_1 \langle \psi_1|\left(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle\right) + a^*_2 \langle \psi_2|\left(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle\right) \\
&= \mid a_1 \mid^2 \underbrace{\langle \psi_1|\psi_1\rangle}_{=1} + a^*_1 a_2 \underbrace{\langle \psi_1|\psi_2\rangle}_{=0} + a^*_2 a_1 \underbrace{\langle \psi_2|\psi_1\rangle}_{=0} + \mid a_2 \mid^2 \underbrace{\langle \psi_2|\psi_2\rangle}_{=1} \\
&= \mid a_1 \mid^2 + \mid a_2 \mid^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

هذه معادلة واحدة فقط في مجهولَيْن، من ثم لا نستطيع إيجاد قيمهما. ولكن حيث إننا نتعامل مع عملة ذات وجهين فقط، لذلك نستطيع وضع $\mid a_1 \mid^2 = \mid a_2 \mid^2 = \frac{1}{2}$ لنحقق حالة العيارية.

مثال: إذا عرفت الدالة:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}|\varphi_1\rangle + \frac{2}{3}|\varphi_2\rangle ،$$

حيث إن $\langle \varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ ، فما هي احتمالية وجود جسيم في المستوى $|\varphi_1\rangle$ والمستوى $|\varphi_2\rangle$؟

الحل: أولاً: يجب أن نتأكد من عيارية الدالة كالتالي:

أ- نحسب الدالة المرافقة للدالة $|\psi\rangle$ لنجد أن:

$$\langle\psi| = \frac{1}{3}\langle\varphi_1| + \frac{2}{3}\langle\varphi_2|$$

ب- نحسب حاصل الضرب القياسي لهما وهو:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{9}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \frac{4}{9}\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle$$
$$= \frac{5}{9} \neq 1$$

ومنها نستنتج أن الدالة $|\psi\rangle$ غير معيرة،

ثانياً: لعيارية الدالة $|\psi\rangle$ يمكن وضعها بالصورة $|\psi\rangle = A\left[\frac{1}{3}|\varphi_1\rangle + \frac{2}{3}|\varphi_2\rangle\right]$ حيث A هو ثابت العيارية. الآن باستخدام شرط العيارية $<\psi|\psi> = 1$ نجد أن:

$$A^2\left(\frac{5}{9}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

وتأخذ الدالة الصورة:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{9}{5}}\left[\frac{1}{3}|\varphi_1\rangle + \frac{2}{3}|\varphi_2\rangle\right]$$

والآن نجد أن السعة الاحتمالية للمستوى $|\varphi_1\rangle$ واحتمالية تواجد الجسيم في هذا المستوى، هما على الترتيب: $a_1 = \sqrt{\frac{9}{5}}\frac{1}{3}$ و $P(\varphi_1) = a_1^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{5}}\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5}$

بالنسبة للمستوى $|\varphi_2\rangle$ فإن السعة الاحتمالية واحتمالية تواجد الجسيم في هذا المستوى، هما على الترتيب: $a_2 = \sqrt{\frac{9}{5}\frac{4}{3}}$ و $P(\varphi_2) = a_2^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{5}\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{4}{5}$

طريقة أخرى: يمكن حساب احتمالية وجود جسيم في المستوى $|\varphi_1\rangle$ باستخدام المعادلة:

$$P(\varphi_1) = \frac{|<\varphi_1|\psi>|^2}{<\psi|\psi>} = \frac{\frac{1}{9}<\varphi_1|\varphi_1>}{5/9} = \frac{1}{\underline{5}}$$

مثال: احسب قيمة الطاقة المتوقعة للدالة:

$$|\psi> = \underbrace{\sqrt{\frac{1}{19}}}_{a_1}|\varphi_1> + \underbrace{\sqrt{\frac{4}{19}}}_{a_2}|\varphi_2> + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{19}}}_{a_3}|\varphi_3> + \underbrace{\sqrt{\frac{3}{19}}}_{a_4}|\varphi_4> + \underbrace{\sqrt{\frac{5}{19}}}_{a_5}|\varphi_5>$$

مع اعتبار أن:

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle, \qquad E_n = n\varepsilon_o$$
$$\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn}$$

الحل: بفرض أن معاملات المركبات φ_n هي a_n، فيجب أن نتأكد **أولاً** من عيارية الدالة كالتالي:

$$<\psi|\psi> = \sum a_n^2 <\varphi_n|\varphi_n> = \sum a_n^2 = \frac{1}{19} + \frac{4}{19} + \frac{2}{19} + \frac{3}{19} + \frac{5}{19} = \frac{15}{19}$$

حيث إن المجموع لا يتساوى بالواحد لذلك، فإن الدالة غير عيارية.

ثانيا: احسب احتمال تواجد الجسيم في كل مستوى على حدة باستخدام الصورة:

$$P_i = \frac{|<\varphi_i|\psi>|^2}{<\psi|\psi>}$$

لتعطينا الآتي:

$$P_1 = \frac{|a_1|^2}{15/19} = \frac{1/19}{15/19} = \frac{1}{15}, \quad P_2 = \frac{4}{15}, \quad P_3 = \frac{2}{15}, \quad P_4 = \frac{3}{15}, \quad P_5 = \frac{5}{15}.$$

ثالثا: قيمة الطاقة المتوسطة تحسب كالآتي:

$$< E > = \sum_n P_n E_n = \frac{1}{15}(\varepsilon_o) + \frac{4}{15}(2\varepsilon_o) + \frac{2}{15}(3\varepsilon_o) + \frac{3}{15}(4\varepsilon_o) + \frac{5}{15}(5\varepsilon_o)$$
$$= \frac{52}{15}\varepsilon_o .$$

وبطريقة أخرى:

$$\bar{E} = \frac{<\psi|H|\psi>}{<\psi|\psi>} = \frac{\sum a_n^2 <\varphi_n|H|\varphi_n>}{15/19} = \frac{19}{15}\left(\frac{1}{19} + \frac{8}{19} + \frac{6}{19} + \frac{12}{19} + \frac{25}{19}\right)\varepsilon_o$$
$$= \frac{52}{15}\varepsilon_o$$

٦- المؤثر الهيرميتي

الفرض: يُعرف المؤثر " $\hat{O}$" بأنه مؤثر هيرميتي إذا تحقق الشرط التالي:

$$\int_{space} g^* \hat{O} f \, dx = \int_{space} \left(\hat{O} g\right)^* f \, dx \qquad (١٣)$$

حيث f و g دالتان يحققان فروض ميكانيكا الكم.

ويظهر لنا هنا سؤال: ماهي فائدة المؤثر الهيرميتي؟ والإجابة هي أن: المؤثر الهيرميتي له خاصيتان مهمتان، ألا وهما:

أ- قيمته المميزة تكون دائماً حقيقية.

ب- دواله المميزة، التي تنتمي إلى قيم مميزة مختلفة، تكون متعامدة.

ولإثبات ذلك اعتبر المؤثر $\hat{A}$ مؤثراً هيرميتياً، ويؤثر على الدالتين $\langle\alpha|$و $|\beta\rangle$ بمعنى:

$$\begin{aligned} &\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \\ &\Rightarrow \quad \langle\beta|\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha\langle\beta|\alpha\rangle \end{aligned} \qquad (١٤)$$

$$\begin{aligned} &\langle\beta|\hat{A}^\dagger = \langle\beta|\beta^* \\ &\Rightarrow \langle\beta|\hat{A}^\dagger|\alpha\rangle = \beta^*\langle\beta|\alpha\rangle \end{aligned} \qquad (١٥)$$

وبطرح المعادلتين (١٤) و(١٥) تنتج المعادلة:

$$(\alpha-\beta^*)\langle\beta|\alpha\rangle=0 \qquad (١٦)$$

وهنا يظهر احتمالان:

أ- إما أن تكون الدوال غير متعامدة، بمعنى أن $\langle\beta|\alpha\rangle\neq 0$، ومن ثم فإن $\alpha=\beta^*$ وهذا يعني أن القيم المميزة هي قيم حقيقية.

ب- إما أن تكون القيم المميزة غير متساوية، بمعنى أن $\alpha\neq\beta^*$، ومن ثم فإن الدوال المميزة المختلفة تحقق خاصية التعامد، $\langle\beta|\alpha\rangle=0$.

وهو المطلوب إثباته.

ونحن نعلم أن القيمة المتوسطة لأي كمية فيزيائية قياسية (وهي التي تقاس بالمعمل) يجب أن تكون قيماً حقيقية وموجبة، ولهذا فإن:

$$\langle\hat{A}\rangle=\langle\hat{A}\rangle^*$$

وهذا يعني أن:

$$<f\,|\hat{A}|\,g>=\int_{space} f^*\hat{A}\,g\,d\tau=\int_{space} g\left(\hat{A}f\right)^* d\tau$$

$$=\int_{space}\left(\hat{A}f\right)^* g\,d\tau=<\hat{A}f\,|\,g>;$$

$$<i\,|\hat{A}|\,j>=<j\,|\hat{A}|\,i>^* \;\Rightarrow\; A_{ij}=(A_{ji})^*$$

ومنها نعرف المرافق الهيرميتي $\hat{O}^\dagger$ لمؤثر $\hat{O}$ بالعلاقة:

$$<\varphi|\hat{O}|\psi>=<\hat{O}\varphi|\psi> \;\Rightarrow \hat{O}^\dagger_{ij}=\hat{O}^*_{ji} \qquad (١٦)$$

وبالتكامل يعرف بالتالي:

$$\langle\varphi|\hat{O}|\psi\rangle=\int_{space}\varphi^*\hat{O}\,\psi dx=\int_{space}\varphi^*\hat{O}\,\psi dx=\int_{space}\left(\hat{O}\varphi\right)^*\psi dx \qquad (١٧)$$

$$=\langle\hat{O}\varphi|\psi\rangle$$

والقائمة التالية تحتوي بعض الخواص المهمة للمؤثر الهيرميتي وهي:

$$\begin{aligned} \left(a\hat{A}\right)^{\dagger} &= a^{*}\hat{A}^{\dagger} \\ \left(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}\right)^{\dagger} &= \hat{A}^{\dagger}+\hat{B}^{\dagger}+\hat{C}^{\dagger}+\hat{D}^{\dagger} \\ \left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right)^{\dagger} &= \hat{D}^{\dagger}\hat{C}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger} \end{aligned} \tag{١٨}$$

أمثلة لبعض المؤثرات الهيرميتية

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^{\dagger}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^{\dagger}=\hat{A}$$

$$\hat{D}=i\left(\hat{A}-\hat{A}^{\dagger}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{D}^{\dagger}=-i\left(\hat{A}^{\dagger}-\hat{A}\right)=\hat{D}$$

$$\hat{B}=\hat{A}+\hat{A}^{\dagger} \quad \Rightarrow \quad \hat{B}^{\dagger}=\left(\hat{A}+\hat{A}^{\dagger}\right)^{\dagger}=\hat{A}^{\dagger}+\hat{A}=\hat{B}$$

أمثلة لبعض المؤثرات غير الهيرميتية:

$$\hat{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{B}^{\dagger}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & 5i \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{B}^{\dagger}\neq\hat{B}$$

$$\hat{C}=\begin{pmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{C}^{\dagger}=\begin{pmatrix} 5 & i & 1+i \\ 3-2i & -3i & 1 \\ -3i & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{C}^{\dagger}\neq\hat{C}$$

$$\hat{C}=i\left(\hat{A}+\hat{A}^{\dagger}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{C}^{\dagger}=-i\left(\hat{A}+\hat{A}^{\dagger}\right)=-\hat{C}$$

مثال: أوجد المرافق الهيرميتي للمؤثر $D_x=\dfrac{d}{dx}$.

الحل:

إذا $\langle\varphi|D_x\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^*\frac{d}{dx}\psi dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi^* d\psi = \underbrace{\left[\varphi^*\psi\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\psi\frac{d}{dx}\varphi^* dx = \langle -D_x\varphi|\psi\rangle$

المرافق الهيرميتي للمؤثر $D_x = \frac{d}{dx}$ هو $D_x^\dagger = -\frac{d}{dx}$. ولقد أهمل الحد $\underbrace{\left[\varphi^*\psi\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0}$ حيث إن الدوال ψ و φ تنعدم عند $\pm\infty$ ، وذلك تبعاً لفروض ميكانيكا الكم.

مثال: أوجد المرافق الهيرميتي للمؤثر $-iD_x^3$.

الحل: باستخدام الخاصية $\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\hat{D}\right)^\dagger = \hat{D}^\dagger\hat{C}^\dagger\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ نجد أن:

$$\left(-iD_x^3\right)^\dagger = \left(D_x^3\right)^\dagger(-i)^\dagger = \left(-D_x^3\right)i = \underline{-iD_x^3}.$$

مثال: أوجد المرافق الهيرميتي للمؤثر المركب $\hat{O} = a + ib$ حيث a, b ثوابت حقيقية.

الحل: من تعريف المرافق الهيرميتي:

$$<\varphi|\hat{O}\psi> = <\hat{O}^\dagger\varphi|\psi>$$

من السهل إثبات أن:

$$\langle\varphi|(a+ib)\psi\rangle = \langle(a-ib)\varphi|\psi\rangle = (a-ib)\langle\varphi|\psi\rangle$$

إذا المرافق الهيرميتي للمؤثر المركب $\hat{O} = a + ib$ هو المرافق المركب لهذا المؤثر $\hat{O}^\dagger = a - ib$.

٧- علاقات التبادل

يعرف قوس التبادل لمؤثرين $\hat{B}$ و $\hat{A}$ بالعلاقة:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (١)$$

ويعرف المؤثران $\hat{A}$ و $\hat{B}$ بأنهما متبادلان إذا كان $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. وللتحقق من تبادل المؤثرين فمن المهم جداً أن يتعامل المؤثران مع جميع الدوال. واختبار صحة العلاقة التبادلية يتطلب التأثير على دوال اختيارية مع الحيطة والحذر عند تطبيق القوانين الرياضية والحسابية المختلفة.

مثال: احسب التأثير الناتج من استخدام المؤثرات $\hat{B}\hat{A}$ و $\hat{A}\hat{B}$ على الدالة الاختيارية $\psi(x) = x^3$ حيث $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ هو المؤثر التفاضلي و $\hat{B} = \sqrt{\ }$.

الحل: أولاً المؤثر $\hat{B}\hat{A}$ يعطي:

$$\hat{B}\hat{A}\psi(x) = \hat{B}\left(\hat{A}\psi(x)\right) = \hat{B}\left(\frac{d}{dx}x^3\right) = \hat{B}\left(3x^2\right) = \sqrt{3x^2} = \underline{\sqrt{3}\,x}$$

ثانياً المؤثر $\hat{A}\hat{B}$ يعطي:

$$\hat{A}\hat{B}\psi(x) = \hat{A}\left(\hat{B}\psi(x)\right) = \hat{A}\left(\sqrt{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right) = \underline{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

نجد من هذا المثال أن تأثير $\hat{B}\hat{A}$ لا يتساوى مع تأثير $\hat{A}\hat{B}$ على نفس الدالة، إذاً فهما غير إبداليين.

وقبل أن نبدأ بالأمثلة، نتساءل عن أهمية المؤثرات المتبادلة؟ الجواب: إن المؤثرات ذات العلاقات المتبادلة يكون لها نفس الدالة المميزة ومن ثم يمكن قياس كمياتها الفيزيائية بدقة متناهية وفي آن واحد.

نظرية: الشرط اللازم والكافي لكي تكون الدالة مميزة للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ في آن واحد؛ هو أن ينعدم قوسهما التبادلي، بمعنى أن: $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$.

الإثبات: نفترض أن الدالة المميزة ψ_n هي دالة مميزة للمؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ ولهذا نجد:

$$\hat{A}\psi_n = a\psi_n \qquad (٢)$$

$$\hat{B}\psi_n = b\,\psi_n \qquad (٣)$$

بضرب (٢) بالمؤثر $\hat{B}$ من الشمال، وأيضاً بضرب (٣) بالمؤثر $\hat{A}$ من الشمال نجد

$$\hat{B}\hat{A}\psi_n = ba\psi_n \qquad \text{(a2)}$$

$$\hat{A}\hat{B}\psi_n = ab\psi_n \qquad \text{(b2)}$$

بطرح (.a2) من (.b2) ينتج:

$$\left(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}\right)\psi_n = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\psi_n = 0$$

و بما أننا افترضنا أن $\psi_n \neq 0$ فإن $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ وهو المطلوب إثباته.

مثال: أثبت أن $\left[5, \hat{D}_x\right] = 0$ حيث $\hat{D}_x = \frac{d}{dx}$ هو المؤثر التفاضلي.

الحل: لو فرضنا أن الدالة الاختيارية $f(x)$، نجد أن:

$$\begin{aligned}\left[5, \hat{D}_x\right]f(x) &= \left[5\hat{D}_x - \hat{D}_x 5\right]f(x) = 5\frac{d}{dx}\left[f(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[5f(x)\right] \\ &= 5\frac{d}{dx}f(x) - 5\frac{d}{dx}f(x) \\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

من ثم بالإمكان القول: إن المؤثر $\hat{D}_x$ والقيمة ٥ متبادلان مع بعضهما البعض.

القائمة التالية تحتوي بعض الخواص المهمة لأقواس التبادل، وهي:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{A},\hat{A}^n\right]=0,\quad n=1,2,3,\cdots\\
&\left[\hat{A},\hat{B}\right]=-\left[\hat{B},\hat{A}\right]\\
&\left[k\hat{A},\hat{B}\right]=\left[\hat{A},k\hat{B}\right]=k\left[\hat{A},\hat{B}\right]\\
&\left[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\left[\hat{A},\hat{C}\right]\\
&\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]\\
&\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right]=\left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}+\hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right]
\end{aligned} \tag{٤}$$

مثال: أثبت أن $\left[\hat{x},\hat{D}_x\right]=-1$.

الحل: لو فرضنا أن الدالة الاختيارية $f(x)$، نجد أن:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{x},\hat{D}_x\right]f(x)&=x\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]-\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right]\\
&=x\frac{d}{dx}f(x)-\left(x\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}x\right)\\
&=-f(x)\\
\Rightarrow&\quad\boxed{\left[\hat{x},\hat{D}_x\right]=\underline{-1}}
\end{aligned}$$

ومن ثم فإن المؤثرين $\hat{D}_x$ و $\hat{x}$ غير إبداليين مع بعضهما.

واجب منزلي: باستخدام خواص أقواس التبادل (٤) أثبت أن

$$\left[\hat{D}_x,\hat{x}\right]=-\left[\hat{x},\hat{D}_x\right]=1.$$

مثال: أثبت أن $\left[\hat{x}^2,\hat{D}_x\right]=-2x$.

الحل: لو فرضنا أن الدالة الاختيارية $f(x)$، نجد أن:

$$\left[\hat{x}^2,\hat{D}_x\right]f(x) = x^2\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]-\frac{d}{dx}\left[x^2 f(x)\right]$$
$$= x^2\frac{d}{dx}f(x)-\left(x^2\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}x^2\right)$$
$$= -2xf(x).$$
$$\Rightarrow \boxed{\left[\hat{x}^2,\hat{D}_x\right] = \underline{-2x}}$$

وهو المطلوب إثباته. من هنا نجد أن المؤثرين $\hat{D}_x$ و $\hat{x}^2$ غير إبداليين مع بعضهما.

مثال: إذا كان $\hat{A} = \hat{A}^\dagger, \quad \hat{B} = \hat{B}^\dagger$ أثبت أن:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]^\dagger = -\left[\hat{A},\hat{B}\right].$$

الحل: باستخدام الخواص بالمعادلات (١٦) نجد أن:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]^\dagger = \left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^\dagger = \left(\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger-\hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger\right) = \hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}$$
$$= -\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

وهو المطلوب.

مثال: تأكد من حساب أقواس التبادل التالية:

$$\text{(a)}\ \left[\hat{x},\hat{p}_x\right] = \left[\hat{x},\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\hbar}{i}\left[\hat{x},\frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{\hbar}{i}\left[\frac{\partial}{\partial x},\hat{x}\right] = -\frac{\hbar}{i} = i\hbar \ ،$$

$$\text{(b)}\ \left[\hat{x},\hat{p}_x^2\right] = \left[\hat{x},\hat{p}_x\right]\hat{p}_x+\hat{p}_x\left[\hat{x},\hat{p}_x\right] = i\hbar\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}.i\hbar = 2\hbar^2\frac{\partial}{\partial x} = 2i\hbar\hat{p}_x$$

$$\text{(c)}\ \left[\hat{x}^2,\hat{p}_x\right] = \left[\hat{x}\hat{x},\hat{p}_x\right] = \hat{x}\left[\hat{x},\hat{p}_x\right]+\left[\hat{x},\hat{p}_x\right]\hat{x} = 2i\hbar x$$

واجب منزلي: أثبت أن: $\left[\hat{x}_j,\hat{p}_k\right] = i\hbar\delta_{jk}$ ، $\left[\hat{x}_j,\hat{x}_k\right] = \left[\hat{p}_j,\hat{p}_k\right] = 0$.

مثال: احسب $\left[\hat{p}_x, \hat{V}\right]$ حيث $V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$.

الحل: باستخدام العلاقة $\left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right]$ نجد أن:

$$\left[\hat{p}_x, \hat{x}^2\right] = \left[\hat{p}_x, \hat{x}\hat{x}\right] = \left[\hat{p}_x, \hat{x}\right]\hat{x} + \hat{x}\left[\hat{p}_x, \hat{x}\right] = -i\hbar(2x) = -i\hbar\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\left[\hat{p}_x, \hat{x}^3\right] = \left[\hat{p}_x, \hat{x}^2\hat{x}\right] = \left[\hat{p}_x, \hat{x}\right]\hat{x}^2 + \hat{x}\left[\hat{p}_x, \hat{x}^2\right] = -i\hbar(3x^2) = -i\hbar\frac{d}{dx}(x^3)$$

ومنها نشتق العلاقة:

$$\left[\hat{p}_x, \hat{x}^n\right] = -i\hbar\frac{d}{dx}(x^n)$$

ومن ثم فإن:

$$\left[\hat{p}_x, \hat{V}\right] = -i\hbar\left\{a_1 + a_2\frac{dx^2}{dx} + a_3\frac{dx^3}{dx} + \cdots\right\} = -i\hbar\frac{d}{dx}V(x)$$

٨- مبدأ عدم الدقة لهيزنبرج

علمنا أن المؤثرات الهيرميتية، التي تحقق خاصية التبادل تكون لها دالة مميزة مشتركة. وذلك يعني أن الكميات الفيزيائية المقاسة عملياً والمرتبطة بهذه المؤثرات تكون معرفة بدالة حالة مميزة واحدة، ولها نفس كثافة الاحتمال، ومن ثم فإن الكمية الفيزيائية يمكن أن تقاس في آن واحد وتعطي القيمة المميزة لكل منهما بدون أي تأثير لإحداهما على الأخرى. ولكن ماذا يحدث إذا كان هناك مؤثرات لا يحققن خاصية التبادل؟ وللإجابة عن هذا السؤال، نفترض أننا عرفنا مؤثرين هيرميتيين وهما $\hat{B}$ و $\hat{A}$ يرتبطان بالعلاقة:

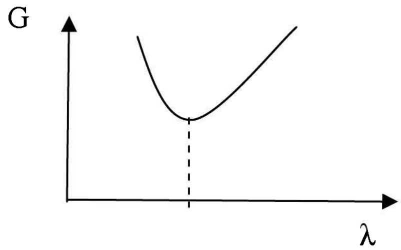
$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = iC$$

حيث C هو ثابت. ولكل مؤثر القيمة المتوقعة $<\hat{A}>$ و $<\hat{B}>$. دعونا نعرف مؤثرين هيرميتيين جديدين وهما:

$$\hat{P} = \Delta\hat{A} = \hat{A} - <\hat{A}>, \qquad (١)$$
$$\hat{Q} = \Delta\hat{B} = \hat{B} - <\hat{B}>$$

واجب منزلي: بمعرفة أن $\hat{A}, \hat{B}$ مؤثران هيرميتيان أثبت أن $\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}$ مؤثران هيرميتيان.

الآن نعد المتجه $\left(\hat{P} + i\lambda\hat{Q}\right)|\psi\rangle$ والمقياس له هو G ويُعطى بالعلاقة:



$$\begin{aligned} G &= \langle\psi|\left(\hat{P} + i\lambda\hat{Q}\right)^{\dagger}\left(\hat{P} + i\lambda\hat{Q}\right)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|P^2 + i\lambda\underbrace{\left(\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P}\right)}_{iC} + \lambda^2 Q^2|\psi\rangle \\ &= <P^2> - \lambda <C> + \lambda^2 <Q^2> \geq 0 \end{aligned}$$

وعند شرط النهاية الصغرى $\frac{dG}{d\lambda} = 0$ للمقياس G نجد أن $\lambda = \frac{<C>}{2<Q^2>}$ ومن ثم:

$$G = <P^2> - \frac{1}{4}\frac{<C>^2}{<Q^2>} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad <P^2><Q^2> \geq \frac{<C>^2}{4}$$

ومنها نصل إلى مبدأ عدم الدقة لهيزنبرج في الصورة:

$$\boxed{\Delta A\ \Delta B \geq \frac{|<C>|}{2}} \qquad (٢)$$

حالات خاصة:

$$(1)\quad If \quad \Delta A = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta B \to \infty$$
$$(2)\quad If \quad \Delta B = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta A \to \infty$$
$$(3)\quad If \quad \hat{A} = \hat{x},\ \ \hat{B} = \hat{p}_x \quad \Rightarrow \quad \Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$
$$(4)\quad If \quad \hat{A} = \hat{E},\ \ \hat{B} = \hat{t} \quad \Rightarrow \quad \Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

بالمثال التالي سوف نستعرض مثالاً مهماً لإحدى تطبيقات مبدأ عدم الدقة.

مثال: استخدم مبدأ عدم الدقة لحساب طاقة المستوى الأرضي لجسيم، كتلته m ، ويتحرك حركة خطية توافقية بسيطة طاقتها الكلية مقدارها:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

حيث ω هو التردد الزاوي للمتذبذب.

الحل: دعونا نفترض أن الجسيم محصور الحركة في مسافة مقدارها a. هذا يعني أن:

$$x \sim \Delta x \sim a$$

من هذا الفرض واستخدام مبدأ عدم الدقة، نجد أن:

$$p_x \sim \Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2a}$$

والطاقة الكلية تصبح:

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$$

طاقة المستوى الأرضي (أدنى مستوى للطاقة) تحسب من أقل قيمة للمعادلة:

$$\frac{dE}{da} = 0$$

ومنها نجد أن:

$$\frac{dE}{da} = -\frac{\hbar^2}{4ma^3} + m\omega^2 a = 0 \quad \Rightarrow \quad a \approx \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{1/2}$$

من ثم فإن أدنى قيمة للطاقة تعطى بالعلاقة:

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} \cdot \frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{2m\omega} = \underline{\frac{1}{2}\hbar\omega}$$

وهي القيمة الحقيقية لجسيم، كتلته m ، ويتحرك حركة خطية توافقية بسيطة (انظر الباب الخامس). القيمة $\frac{1}{2}\hbar\omega$ تُعرف بأنها طاقة نقطة الصفر، وهي ناتجة من مبدأ عدم الدقة.

واجب منزلي: استخدم مبدأ عدم الدقة لحساب طاقة المستوى الأرضي لإلكترون، كتلته m وشحنته e، بذرة الهيدروجين حيث طاقته الكلية هي:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{r}$$

حيث r هي المسافة بين الإلكترون والنواة.

ملخص: بالجدول التالي سوف نسترجع بعض التعريفات الخاصة بأقواس ديراك ومرادفاتها بالتعريفات القديمة:

Dirac notation تعريف ديراك	Original notation تعريف أصلي
$\lvert n\rangle$	ψ_n
$\langle n\rvert$	ψ_n^*
$\langle x\lvert\psi\rangle$	$\psi(x)$
$\langle n\lvert\psi\rangle$	c_n
$\langle\varphi\lvert\psi\rangle$	$\int_{space}\varphi^*\psi\, d\tau$
$\langle i\lvert j\rangle=\delta_{ij}$	$\int_{space}\psi_i^*\psi_j\, d\tau=\delta_{ij}$
$\overline{A}=\langle\varphi\rvert A\psi\rangle=\langle\varphi\rvert A\lvert\psi\rangle$	$\int_{space}\varphi^* A\psi\, dx$

٩- تمارين عامة

١- ضع الدالة $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$ في شكل أقواس ديراك.

الحل: استخدم التعريف $\psi(x)=\langle x\lvert\psi\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x\lvert n\rangle\langle n\lvert\psi\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle n\lvert\psi\rangle\langle x\lvert n\rangle,$

لنجد أن:

$$c_n = \langle n|\psi\rangle, \quad \langle x|n\rangle = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

٢- أثبت أن

$$(a) \quad \left[\hat{p}_x, \left[\hat{p}_x, x\right]\right] = 0 \qquad (b) \quad \left[\left[\hat{x}, \hat{p}_x^2\right], \hat{x}\right] = 2\hbar^2$$

$$(c) \quad \hat{B}^{-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{-1} = -\left[\hat{A}, \hat{B}^{-1}\right] \qquad (d) \quad [\hat{x}^3, \hat{p}_x] = 3i\hbar\hat{x}^2$$

$$(e) \qquad [\hat{H}, \hat{x}] = [\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x), \hat{x}] = \frac{-2i\hbar}{2m}\hat{p}_x$$

٣- اعتبر المؤثرات المعرفة بالمعادلات التالية:

$$\hat{O}_1\psi(x) = x^3\psi(x)$$

$$\hat{O}_2\psi(x) = x\,\frac{d\psi(x)}{dx}$$

أثبت أن $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = -3\hat{O}_1$

٤- تحقق من عدم هيرميتية المؤثرات الآتية:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}N, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix},$$

$$(c) \quad i\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}N, \qquad (d) \quad i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

٥- تحقق من هيرميتية المؤثرات الآتية:

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (c) \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

٦- بمعلومية

$$\hat{B} = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |\psi> = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

أثبت أن $<\psi|\hat{B}|\psi> = -\frac{\varepsilon}{5}$

٧- تحقق من المرافق لكل من المؤثرات التالية:

$$(1)\quad \left(\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} = -\frac{d}{dx},$$

$$(2)\quad \left(\frac{d^{2}}{dx^{2}}\right)^{\dagger} = \frac{d^{2}}{dx^{2}},$$

$$(3)\quad (x)^{\dagger} = x$$

$$(4)\quad \left(ix\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} x^{\dagger} i^{*} = i\frac{d}{dx}x,$$

$$(5)\quad \left(i\frac{d}{dx}\right)^{\dagger} = i\frac{d}{dx}$$

٨- بمعلومية الدوال:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1\rangle + e^{i\theta}|2\rangle\right\},\quad |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1\rangle - e^{i\theta}|2\rangle\right\}$$

أثبت أن $\hat{N} = |A\rangle\langle A| + |B\rangle\langle B| = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$

٩- لأي دالتين اختياريتين f و g اثبت متباينة شفارتز (Schwartz inequality)، التي توضح بالشكل:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} ff^{*}dx \int_{-\infty}^{+\infty} gg^{*}dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} fg^{*}dx \int_{-\infty}^{+\infty} gf^{*}dx}$$

ومنها أثبت أن:

$$(\Delta A)^{2}(\Delta B)^{2} \geq \frac{1}{4}\left|\langle [A,B] \rangle\right|^{2}$$