الباب الخامس

المتذبذب التوافقي الخطي

The Linear Harmonic Oscillator

الصفحة	العنوان	الفصل
١٢٧	النظرة التقليدية (Classical view)	١
١٢٩	نظرة ميكانيكا الكم (Quantum mechanics view)	٢
١٣٤	تمارين عامة (General exercise)	٣
١٣٦	المتذبذب التوافقي الخطي (حل متعددة الحدود) (The Linear Harmonic Oscillator "Polynomial Solution")	(5.A)
١٣٩	حل معادلة هرمت متعددة الحدود (Solution of Hermit polynomial equation)	(5.B)

الباب الخامس

المتذبذب التوافقي الخطي

تعد مسألة المتذبذب التوافقي الخطي من أهم المسائل التي تم حلها في مملكتي ميكانيكا الكم والميكانيكا الكلاسيكية. وهي من الأمثلة الجيدة التي تستخدم لمعرفة الفرق بين النتائج بالمملكتين. وقد استخدمت مسألة المتذبذب التوافقي الخطي في حل وفهم ظواهر فيزيائية معقدة بمختلف فروع الفيزياء (كلاسيكية، ذرية، جزيئية، جسيمات أولية ونظرية الأوتار.. الخ)، وأثبتت صحة فروضها. وفي هذا الباب نستعرض أولاً: كيف تعاملت النظرية التقليدية مع معادلات الحركة الاهتزازية لجسم ما. بعدها نبدأ بالدخول ببساطة إلى طريقة تعامل ميكانيكا الكم مع المتذبذب، مع مقارنة بالنظرة التقليدية. وسنرجئ الحل الرياضي إلى الملاحق المرافقة، حتى لا نشتت القارئ بالصعوبات الرياضية لحل المعادلة التفاضلية للمتذبذب التوافقي.

١- النظرة التقليدية

نبدأ بالنظرة التقليدية للمسألة، حيث إنه عند دراسة الحركة الاهتزازية، التوافقية، لجسم (مثلاً جسم معلق بنابض، زنبرك، أو حركة جزيئات ثنائية الحركة) فإن أبسط الفروض هي:

أ- أن الجسم يخضع لقوة إرجاع (Restoring Force)($\boldsymbol{F_x}$) تشده أو تدفعه إلى موضع اتزانه.

ب- تتناسب قوة الإرجاع مع إزاحة الجسم عن موضع الاتزان $\boldsymbol{x}$ (للتبسيط سوف نفترض الحركة في اتجاه واحد فقط)، وتُعرف العلاقة بقانون هوك (Hook's Law) على الصورة:

$$F_x = -k\ x \qquad (١)$$

حيث F_x هي القوة باتجاه x والثابت k هو ثابت التناسب. باستخدام قانون نيوتن نحصل على:

$$F_x = ma_x = -k\ x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x \qquad (٢)$$

حيث $k = m\omega^2$ والمعادلة (٢) لها الحل العام:

$$x = A\sin(\omega t + \theta) \qquad (٣)$$

حيث A و θ ثابتان يعينان بالشروط الحدودية للمسألة. الثابت A يعبر عن سعة الحركة الاهتزازية، أي أنه يتساوى مع النهاية العظمى للإزاحة x. وتعبر المعادلة (٣) عن حركة توافقية خطية بسيطة لها تردد زاوي ω يُعطى بالعلاقة:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

حيث ν هو التردد و T هو الزمن الدوري للمتذبذب.

ولحساب دالة الجهد V من المعادلة (١)، نستخدم علاقتها بالشغل W في المجال المحافظ بالشكل:

$$V = -W = -\int_0^x F_x\,dx = \frac{1}{2}kx^2, \qquad (٤)$$

المعادلة (٤) تمثل معادلة قطع مكافئ.

وطاقة الحركة "K" عند إزاحة x تحسب كالتالي:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m\,\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \theta) \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\left[1 - \sin^2(\omega t + \theta)\right] \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) \end{aligned}$$

وتبعاً للميكانيكا التقليدية نجد أن الطاقة الكلية "E" للمتذبذب هي:

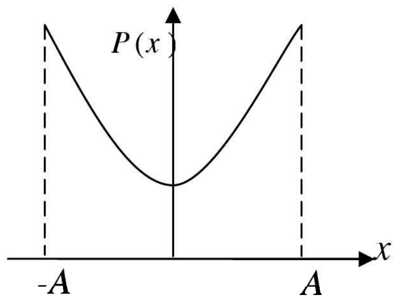
$$\begin{aligned} E &= K + V = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{aligned} \qquad (5)$$

المعادلة (٥) تخبرنا أن الطاقة الكلية لجسيم يهتز في حركة توافقية بسيطة تعتمد على قيمة السعة "$\pm A$" ومن ثم فإن قيمة الطاقة تأخذ قيماً تتزايد زيادة متصلة تبعاً لزيادة "$\pm A$". ولسهولة المقارنة مع ميكانيكا الكم سوف نعرف كثافة الاحتمال التقليدي "$P(x)\,dx$" لوجود المتذبذب بمسافة dx كالتالي: إذا مر جسيم، سرعته v خلال مسافة مقدارها dx في اتجاه واحد ذهاباً أو إياباً، في زمن مقداره dt، فإن احتمال تواجده في المسافة dx يحدد بالعلاقة:

$$P(x)\,dx = \frac{dt}{T/2} = \frac{2\frac{dx}{\mathrm{v}}}{T} = \frac{2}{T\,\mathrm{v}}dx = \frac{2}{T\sqrt{\omega^2\left(A^2-x^2\right)}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}}dx \qquad (6)$$

من ثم فإن كثافة الاحتمال تأخذ قيمة صغرى عند القيمة "$x = 0$" وتصل إلى قيمة عظمى عند الحدود "$x = \pm A$".



٢- نظرة ميكانيكا الكم

للتعامل مع المتذبذب التوافقي الخطي من خلال نظرية ميكانيكا الكم، نجد أن معادلة شرودنجر تأخذ الصورة:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0} \qquad (7)$$

حيث $\alpha = m\omega/\hbar, \quad \beta = 2mE/\hbar^2$.

بالإمكان تبسيط المعادلة (٧) وذلك باستخدام التعويض:

$$q = \sqrt{\alpha}\, x$$

واجب منزلي: باستخدام التعويض $q = \sqrt{\alpha}\, x$ تأكد من التفاضلات التالية:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dq}\frac{dq}{dx} = \sqrt{\alpha}\,\frac{d\psi}{dq}$$
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dq}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{dq}{dx} = \alpha\frac{d^2\psi}{dq^2}$$

وتتحول المعادلة (٧) إلى الصورة المبسطة:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + (\lambda - q^2)\psi = 0 \qquad (٨)$$

حيث تم تعريف القيمة المميزة (عديمة الأبعاد) λ بالشكل:

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2E}{\hbar\omega} \qquad (٩)$$

الحل العام للمعادلة (٨) ليس سهلاً، وسوف نكتفي هنا بعرض ما نحتاجه. الحل التفصيلي للمعادلة (٨) سوف يعرض في الملحق المرافق (5.A).

المعادلة (٨) تتحقق فقط لقيم منفصلة للطاقة الكلية تعبر عنها المعادلة:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1,$$
$$\Rightarrow E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \qquad n = 0,1,2,\cdots \qquad (10)$$

ومن المعادلة (١٠) نستنتج الآتي:

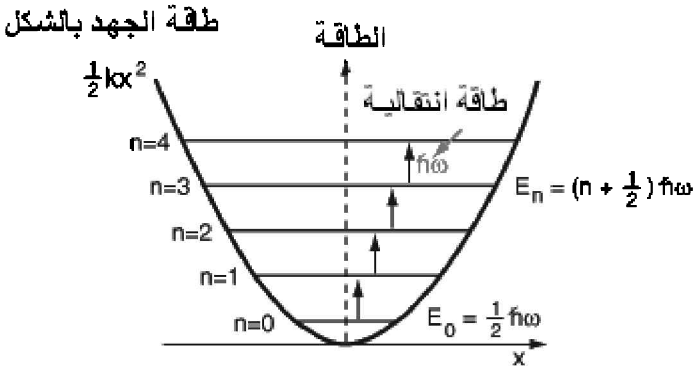
أ- طاقة المستويات هي طاقة مكماة، حيث إنها تعتمد على العدد الصحيح n. n تسمى عدد الكم الاهتزازي (Vibrational quantum number).

ب- الفروق، ΔE، بين طاقات المستويات المتتالية تكون متساوية، وتحسب كالتالي:

$$.\ \Delta E = E_{n\pm1} - E_n = \pm\hbar\omega$$

ج- للعدد $n=0$ فإن الطاقة E_o (طاقة المستوى الأرضي أو طاقة نقطة الصفر) لا تساوي صفراً، ولكن $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ، وهذا لا يتطابق مع نظرية بور. وعدم التطابق له دلالته الفيزيائية المهمة وهي: أن أقل طاقة اهتزازية (طاقة المستوى الأرضي) لأي نظام فيزيائي (مثال على ذلك الجزيئات متعددة الذرات أو الذرات بالجوامد) يوصف بجهد المتذبذب التوافقي لا يمكن أن تنعدم حتى عند درجة حرارة الصفر المطلق. لذلك فإن طاقة نقطة الصفر هذه كافية لمنع تجمد سائل الهليوم-٤ تحت الضغط الجوي، مهما قللنا من درجة حرارته. وهي مرتبطة بعلاقة هيزنبرج الاتعينية، فإذا كانت طاقة الجسيم معدومة، فإن الجسيم يسكن ومن ثم فإن إحداثيات الجسيم وكميته الحركية الخطية يمكن تعيينهما في آن واحد، وهذا يتعارض مع علاقة عدم التعيين. عملياً أمكن التأكد من أن الطاقة الاهتزازية الصفرية غير منعدمة بواسطة دراسة تشتت الضوء بواسطة البلورات عند تغير درجة الحرارة.

والشكل التالي يعبر عن مستويات الطاقة لجهد يعبر عنه بالمعادلة (٤).

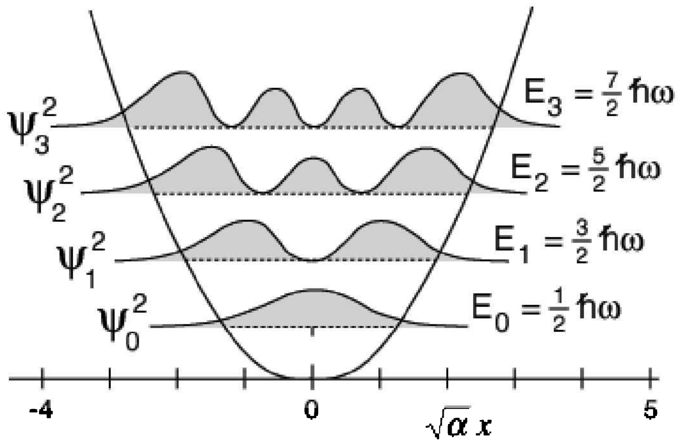


ولكل قيمة n يوجد لها دالة مميزة تعرف بالصورة:

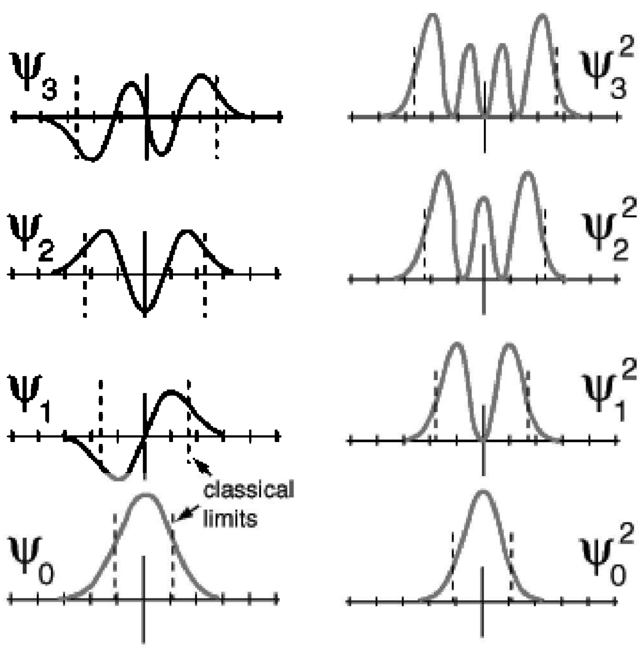
$$\psi_n(q) = N_n e^{-q^2/2} H_n(q), \qquad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}} \qquad (11)$$

حيث $H_n(q)$ تسمى دالة هرمت متعددة الحدود. انظر الملحق (5.A) لمراجعة تفاصيل حل دالة هرمت. الأربع دوال المميزة الأوائل موضحة بالجدول والشكل التاليين.

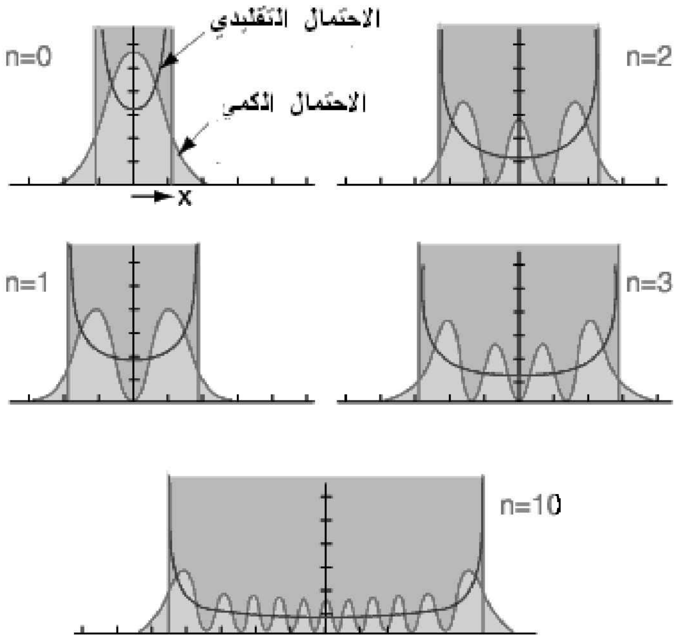
n	$\lambda = 2n+1$	E_n	$\psi_n(q)$
0	1	$\frac{1}{2}\hbar\omega$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-q^2/2}$
1	3	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\, q\, e^{-q^2/2}$
2	5	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	$\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\,(2q^2-1)\, e^{-q^2/2}$
3	7	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	$\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{\pi}}}\,(2q^2-3)\, q\, e^{-q^2/2}$



وأشكال الدوال ومربعاتها موضحة كالتالي، والخطوط المنقطة توضح المدى الكلاسيكي للدوال:



واجب منزلي: للأشكال التالية اشرح مدى مطابقة كثافة الاحتمال التقليدي مع كثافة الاحتمال بميكانيكا الكم.



مثال: افترض أن للمعادلة (٧) حلاً مميزاً يعطى بالصورة:

$$\psi = be^{-cx^2} \qquad (١٢)$$

احسب الثوابت b, c وعين القيمة المميزة لهذه الدالة.

الحل: لحساب الثابت c بالتعويض من المعادلة (١٢) في المعادلة (٧) نصل للمعادلة:

$$\left(4c^2 - \alpha^2\right)x^2 + \left(\beta - 2c\right) = 0 \quad \mathbf{(13)}$$

بالمعادلة (١٣)، بمساواة معاملات x^2 بالصفر نحصل على:

$$\left(4c^2 - \alpha^2 = 0\right) \quad \Rightarrow \quad c = \pm\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{m\omega}{2\hbar} \qquad \mathbf{(14)}$$

وذلك باستخدام قيمة $\alpha = m\omega/\hbar$ من المعادلة (٧). القيمة السالبة سوف تهمل، حيث إنها تعطي دالة تزايدية بالمعادلة (١٢)، ويصبح الحل غير مناسب فيزيائياً. بمساواة معاملات x^0 في كلا الطرفين بالمعادلة (١٣) نحصل على:

$$\beta = 2c = \frac{m\omega}{\hbar} \qquad (١٥)$$

وباستخدام قيمة $\beta = 2mE/\hbar^2$ من المعادلة (٧) نجد أن:

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad (١٦)$$

وهي قيمة الطاقة الصفرية للمهتز التوافقي. من ثم فإن الدالة والقيمة المميزة لهذا المستوى تصبح:

$$\psi_o = be^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad \Leftrightarrow \quad E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad (١٧)$$

٣- تمارين عامة

١- للدالة $\psi_o = be^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ أثبت أن:

أ- $b = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

ب-

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p}_x \rangle = 0, \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle \hat{p}_x^2 \rangle = \frac{1}{2}m\hbar\omega, \quad \Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

٢- أثبت أن الدالة $\psi = A\,x\,e^{-cx^2}$ تحقق المعادلة:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0$$

وتحقق من النتائج التالية:

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \text{ و } A = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \text{ ، } c = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

وذلك باستخدام التكامل القياسي: $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$.

٣- أثبت أن احتمالية وجود المستوي الأرضي، $n = 0$ ، للمتذبذب التوافقي البسيط خارج المنطقة الكلاسيكية هي 0.157.

٤- بمعلومية الدالة:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n!\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha}x) ،$$

تحقق من النتائج التالية:

$$\hat{x}_{mn} = \langle\psi_m(x)|x|\psi_n(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x) x \psi_n(x) dx = \begin{cases} 0\ , & \text{if} \quad m \neq n \pm 1 \\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n+1}{2}}, & \text{if} \quad m = n+1 \\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n}{2}}, & \text{if} \quad m = n-1 \end{cases}$$

$$\hat{x}^2_{nn} = \langle\psi_n(x)|x^2|\psi_n(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) x^2 \psi_n(x) dx = \frac{2n+1}{2\alpha},$$

$$\langle\hat{p}_x\rangle = \langle\psi_n(x)|-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}|\psi_n(x)\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_n(x)\right)dx = 0,$$

$$\langle\hat{p}^2_x\rangle = \langle\psi_n(x)|-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi_n(x)\rangle = -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_n(x)\right)dx = \hbar^2\alpha\left(\frac{2n+1}{2}\right),$$

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2m}\langle\hat{p}^2_x\rangle = \frac{\omega\hbar}{2}(n+\frac{1}{2}),$$

$$\langle V\rangle = \frac{m\omega^2}{2}\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\omega\hbar}{2}(n+\frac{1}{2}),$$

$$\langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle V\rangle = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

ملحق (5.A)

المتذبذب التوافقي الخطي (حل متعددة الحدود)

تم تعريف الهاملتونيان للمتذبذب التوافقي الخطي بالمعادلة:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2}+(\lambda-q^2)\psi=0 \qquad (١)$$

حيث تم تعريف القيمة المميزة (العديمة الأبعاد) λ بالشكل:

$$\lambda=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2E}{\hbar\omega} \qquad (٢)$$

وقبل أن نستعرض الحل العام للمعادلة (١) دعونا نتوقف قليلاً لنبحث عن طبيعة الحل التقاربي للدالة ψ، أي عندما $q\rightarrow\pm\infty$. بوضع $q\rightarrow\pm\infty$ بالمعادلة (١) فإننا يمكننا إهمال المقدار λ وذلك بالمقارنة مع q^2. وعليه نحصل على المعادلة:

$$\frac{d^2\psi_\infty}{dq^2}-q^2\psi_\infty=0 \qquad (٣)$$

التي يمكن وضع حلها بالصورة:

$$\psi_\infty=e^{aq^2}$$

ولإيجاد القيمة a نفاضل الدالة مرتين فنجد:

$$\frac{d^2\psi_\infty}{dq^2}=(4a^2q^2+2a)e^{aq^2}\approx 4a^2q^2e^{aq^2}$$

ومنها ومن المعادلة (٣) نجد أن:

$$a^2=\frac{1}{4}\qquad\Rightarrow\qquad a=\pm\frac{1}{2}$$

ومن ثم نستخلص أن:

$$\psi_\infty=ce^{-q^2/2}+de^{+q^2/2}$$

حيث c و d ثابتان اختياريان. الحل ($e^{+q^2/2}$) هو حل مرفوض لأن الشرط $\lim_{q\to\infty} e^{+q^2/2} = \infty$ لا يحقق شروط ميكانيكا الكم من حيث محدودية الدالة في اللانهاية. لذلك يمكننا وضع المعامل d مساوياً للصفر. وحيث إننا لم نتكلم عن معيارية الدالة فيمكننا وضع المعامل c مساوياً للواحد. من ثم فإن الحل التقاربي للدالة يصبح:

$$\psi_\infty = e^{-q^2/2} \tag{٤}$$

دعونا نرجع مرةً أخرى للحل العام للمعادلة (١)، الذي سوف نفترضه بالشكل التالي:

$$\psi = \psi_\infty H(q) = e^{-q^2/2} H(q) \tag{٥}$$

حيث $H(q)$ هي متسلسلة القوى للمتغير q (التي سنعرفها لاحقاً بدالة هرمت متعددة الحدود Hermit polynomial). وسوف نوقفها عند حد معين لا نتعداه حتى تحقق شروط ميكانيكا الكم بالنسبة لمحدودية الدالة في اللانهاية.

واجب منزلي: باستخدام $\psi = e^{-q^2/2} H(q)$ أثبت أن

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} = \left[\frac{d^2H(q)}{dq^2} - 2q\frac{dH(q)}{dq} + (q^2-1)H(q)\right]e^{-q^2/2}$$

باستخدام المعادلة (٥) تصبح المعادلة (١) بالشكل:

$$\frac{d^2H(q)}{dq^2} - 2q\frac{dH(q)}{dq} + (\lambda-1)H(q) = 0 \tag{٦}$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية (٦) يمكن حلها حلاً كاملاً، حيث إنها مشابهة لمعادلة هرمت، التي تأخذ الشكل:

$$\frac{d^2H_n(q)}{dq^2} - 2q\frac{dH_n(q)}{dq} + 2n\,H_n(q) = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{٧}$$

وذلك بوضع $H(q) = H_n(q)$ و $\lambda - 1 = 2n$. ومنها نجد:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n+1,$$
$$E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega = (n+\frac{1}{2})h\nu, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{٨}$$

واجب منزلي: باستخدام المتسلسلات حل المعادلة التفاضلية (٦). انظر الحل بالملحق ($5.B$).

وصلنا الآن إلى هدفنا الأساسي، ونستطيع هنا أن نميز دوال وطاقة المستويات بالرمز n ، الذي يدل على درجة دالة هرمت كثيرة الحدود. أخيراً :

$$\psi_n(q) = N_n e^{-q^2/2} H_n(q), \qquad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}}$$
$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega = (n+\frac{1}{2})h\nu, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

ملحق (5.B)

حل معادلة هرمت متعددة الحدود

معادلة هرمت التفاضلية تُعرف بالشكل:

$$\frac{d^2H(q)}{dq^2}-2q\frac{dH(q)}{dq}+(\lambda-1)H(q)=0 \qquad (١)$$

وتُحل باستخدام متسلسلة القوى كالتالي:

١- نفترض الحل العام بصورة متسلسلة بالشكل:

$$H(q)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k q^k = e_0+e_1q+e_2q^2+e_3q^3+\cdots$$

أ- بإجراء التفاضلات:

$$\frac{dH(q)}{dq}=\sum_{k=0}^{\infty}ke_kq^{k-1}=e_1+2e_2q+3e_3q^2+\cdots\,;$$
$$\frac{d^2H(q)}{dq^2}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)e_kq^{k-2}=2e_2+2\cdot 3e_3q+3\cdot 4e_4q^2+\cdots$$

ب- بالتعويض من القيم العليا بالمعادلة (١) ومساواة معاملات كل حد من q^m له نفس الدرجة بالصفر، نحصل على العلاقات التالية:

$$2e_2+(\lambda-1)e_0=0$$
$$2\cdot 3e_3+(\lambda-1-2)e_1=0$$
$$3\cdot 4e_4+(\lambda-1-2\cdot 2)e_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وعامةً نصل إلى الحد k نجد العلاقة:

$$(k+1)(k+2)e_{k+2}+(\lambda-1-2k)e_k=0$$

ومنها نحصل على:

$$e_{k+2}=\frac{\lambda-1-2k}{(k+1)(k+2)}e_k \qquad (٢)$$

المعادلة (٢)، تدعى علاقة تكرارية (Recursion relation) ، وتوضح كيف نحصل على قيم المعاملات بمعلومية المعاملات e_0 و e_1. ويصبح المعاملان e_0 و e_1 ثابتين

اختياريين مطلوبين للحل العام للمعادلة (١). يمكننا الآن وضع الحل العام للمعادلة (١) كمجموع متسلسلتين، واحدة تحتوي الحدود الفردية وأخرى تحتوي الحدود الزوجية:

$$H(q) = e_0\left(1+\frac{e_2}{e_0}q^2+\frac{e_4}{e_2}\frac{e_2}{e_0}q^4+\frac{e_6}{e_4}\frac{e_4}{e_2}\frac{e_2}{e_0}q^6+\cdots\right) + e_1\left(q+\frac{e_3}{e_1}q^3+\frac{e_5}{e_3}\frac{e_3}{e_1}q^5+\frac{e_7}{e_5}\frac{e_5}{e_3}\frac{e_3}{e_1}q^7+\cdots\right) \qquad (٣)$$

واجب منزلي:

أ- اختبر سلوك الدالة $H(q)$ مع زيادة الدرجة k، بمعني أن $k >> 1$، وأثبت أن النسبة

$$\frac{e_{k+2}}{e_k} \to \frac{2}{k}$$

ب- قارن سلوك الدالة $H(q)$ مع سلوك الدالة $e^{q^2} = 1+q^2+\frac{q^4}{2}+\cdots+\frac{q^{2k}}{k!}+\cdots$ لتثبت أن الدالة $H(q)$ يمكن تمثيلها بالشكل $H(q) \propto e^{q^2}$.

من الواجب المنزلي نجد أن

$$\psi \propto e^{-q^2/2}e^{q^2} \propto e^{q^2/2}$$

وهي دالة تزايدية وغير محددة عندما $q \to \pm\infty$. هذا يضطرنا إلى وقف المتسلسلات عند حد معين لا نتعداه حتى تحقق الدالة ψ شروط ميكانيكا الكم بالنسبة لمحدوديتها في ما لا نهاية.

العلاقة التكرارية (٢) تدلنا على أنه عندما نضع $k = n$، بحيث $\lambda = 2n+1$، فإن واحدة من المتسلسلات (٣) سوف تتوقف مع e_n، حيث إن جميع الحدود بدءاً من e_{n+2} سوف تنعدم (أي تتساوى بالصفر). بإمكاننا حذف المتسلسلة الأخرى بوضع $e_0 = 0$ في حالة كون n فردية، أو وضع $e_1 = 0$ في حالة كون n زوجية. ونتيجةً لتوقف المتسلسلات نحصل على قيم الطاقة المميزة بالمعادلة:

$$E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega = (n+\frac{1}{2})h\,\nu, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$