الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Basic Concepts

١/١-المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية هي معادلة تتضمن دالة مجهولة وتفاضلاتها وتنقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعين هما:

١) معادلات تفاضلية عادية. **٢) معادلات تفاضلية جزئية.**

١/١/١-المعادلة التفاضلية العادية: Ordinary Differential Equation

هي علاقة تساوي بين دالة مجهولة تعتمد على متغير واحد وبين واحد أو أكثر من المشتقات (أو تفاضلات) الدالة المجهولة. فمثلاً إذا كانت الدالة المجهولة هي $y = f(x)$ والتي تعتمد على المتغير المستقل x فان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية في هذه الحالة هي:

$$f\ (x\ , y\ , y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

حيث

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

٢/١/١-المعادلة التفاضلية الجزئية: Partial Differential Equation

هي علاقة تساوي بين دالة مجهولة تعتمد على أكثر من متغير وبين واحد أو أكثر من مشتقات (تفاضلات) جزئية للدالة المجهولة بالنسبة للمتغيرات المستقلة. فمثلاً إذا كانت الدالة المجهولة هي $z\,(x\,, y\,)$ والتي تعتمد على المتغيرين المستقلين $x\,, y$ فان المشتقات (التفاضلات) التي سوف تظهر في المعادلة هي مشتقات (تفاضلات) جزئية للدالة المجهولة z بالنسبة للمتغيرات المستقلة التي تعتمد عليها $(x\ , y\ )$، وبذلك فان المعادلات التفاضلية الجزئية في هذه الحالة تكون الصورة العامة لها هي:

$$\Phi\left(x\,, y\,, z\,, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \ \ldots\ , \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0$$

وسوف تقتصر دراستنا في هذا المقرر على المعادلات التفاضلية العادية فقط.

١/١/٣– رتبة المعادلة التفاضلية:

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية العادية بأنها أعلى مشتقة فى المعادلة التفاضلية.

١/١/٤– درجة المعادلة التفاضلية:

تعرف درجة المعادلة التفاضلية العادية بأنها أعلى أس مرفوع لأعلى مشتقة بعد وضع المعادلة فى صورة كثيرة حدود فى المشتقات ... والأمثلة التالية توضح ذلك

١/٢– أمثلة:

الدرجة	الرتبة	المعادلة
1	1	$\frac{dy}{dx}=e^{x}$
1	2	$y''-3y'^2=8\cos x$
3	1	$(y')^3+4xy=5$
2	3	$(y''')^2+(y')^5-2xy=0$
1	2	$y''+2(y')^6=\ln y''$
4	5	$(y^{(5)})^4-7y=\sin y'$

١/٣– حل المعادلة التفاضلية:

تسمى الدالة $y=\Phi(x)$ والمعرفة على الفترة $]a,b[$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0,\qquad y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$$

إذا كانت $\Phi(x)$ قابلة للتفاضل n من المرات في الفترة $]a,b[$ تطابقياً في هذه الفترة أي أن:

$$f\,(x\,,\Phi(x),\Phi'(x),\Phi''(x),\,...\,,\Phi^{(n)}(x))=0.$$

١/٣/١- الثوابت الاختيارية:

يقال لمجموعة الثوابت الموجودة بعلاقة ما بأنها ثوابت اختيارية إذا لم يكن من الممكن استبدال هذه المجموعة من الثوابت بعدد أقل من الثوابت، بحيث تحتفظ العلاقة بنفس خصائصها.

فمثلاً العلاقة $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ بها ثابتان اختياريان هما c_1, c_2، حيث لا يمكن استبدالهما بثابت واحد فقط أي أن الحلول $\cos x\,,\sin x$ تكون مستقلة خطياً.

٢/٣/١- أنواع حلول المعادلة التفاضلية:

١/٢/٣/١- الحل العام:

يسمى حل المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n والذي يحتوي على n من الثوابت الاختيارية بالحل العام.

٢/٢/٣/١- الحل الخاص:

هو أي حل يتم الحصول عليه من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً محددة

مثال: المعادلة $\ddot{y}=-\omega^2 y$ حلها العام هو $y=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.

بوضع $A=B=1$ مثلا نجد أن $y=\cos\omega t+\sin\omega t$ ، هو حل خاص للمعادلة المعطاة.

٤/١- تكوين المعادلة التفاضلية:

يمكننا تكوين معادلة تفاضلية وذلك بحذف الثوابت الاختيارية من الحل العام باستخدام المشتقات المختلفة للمتغير التابع.

فمثلاً: العلاقة $y^2=ax-b$ تحتوي على ثابتين اختياريين، لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد أن

$$2yy'=a\ ,$$
$$2yy''+2y'^2=0.$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

والعلاقة
$$y=Ae^{2x}+Be^{3x}$$

تحتوي على ثابتين اختياريين، لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد أن

$$y'=2Ae^{2x}+3Be^{3x}$$

$$y''=4Ae^{2x}+9Be^{3x}$$

وبحذف الثوابت نكون قد حصلنا على المعادلة التفاضلية الاتية من الرتبة الثانية

$$y''-5y'+6y=0$$

أما العلاقة

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad (1)$$

فهي تحتوي على ثلاثة ثوابت اختيارية a,b,c.

ولتكوين المعادلة التفاضلية نشتق العلاقة (1) ثلاث مرات فنحصل على:

$$2yy'+2x+a+by'=0, \qquad (2)$$
$$2yy''+2y'^2+2+by''=0, \qquad (3)$$
$$2yy'''+by'''+6y'y''=0\ , \qquad (4)$$

بحذف الثابت b بين المعادلتين (4) ,(3) نحصل على

$$\left[1+(y')^2\right]y''=3y'(y'')^2 \qquad (5)$$

المعادلة (5) هي المعادلة التفاضــلية التي حلها العام هو المعادلة (1)، أي أن المعادلة (5) هي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

من المثالين السابقين نستنتج أن رتبة المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها من حذف الثوابت تساوي عدد الثوابت الاختيارية في العلاقة المعطاة (حل المعادلة)، والعكس صحيح، أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية التي من رتبة n يحتوي على n من الثوابت الاختيارية.

١/٥– تمارين:

١- حدد رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$a)\, y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 7, \qquad b)\, y''' - 5xy'^3 = e^x,$$

$$c)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^4 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = 6t^2, \qquad d)\, y'' - 9y' = \sin y'',$$

$$e)\,(1 - x^2)\,dy = \frac{y}{1+y^2}\,dx, \qquad f)\,\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + y'^3},$$

$$g)\, y''' - 4y'^2 = \ln y, \qquad h)\, e^{y'''} - xy'' + y = 0.$$

٢–اثبت أن العلاقة $y = 2e^{-x} + x\,e^{-x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = 0$.

٣–بين أن العلاقة $y = \ln x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $x\,y'' + y' = 0$ على الفترة $(0,\infty)$ فقط.

٤–أوجد قيمة α بحيث تكون العلاقة $y = e^{\alpha x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y''' - 3y'' - 10y' = 0$.

٥-اثبت أن العلاقة $y = (x+a)^2$ هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y' = 2\sqrt{y}$، بينما $y = x^2$ هو حل خاص لهذه المعادلة.

٦– كون المعادلات التفاضلية بعد حذف الثوابت الاختيارية من العلاقات الآتية:

$$1)\, x = a\sin(\omega t + \varepsilon)$$
$$2)\, (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$
$$3)\, y = a\, e^{\alpha x}$$
$$4)\, x^2 + 4a\, y = b$$
$$5)\, y = ax^2 + be^x$$
$$6)\, y = ae^{2x} + be^x$$
$$7)\, \ln y = ax^2 + b$$
$$8)\, y = a\sin 4x + b\cos 4x$$

حيث $a, b, c, \alpha, \varepsilon$ ثوابت اختيارية و ω بارامتر.

٧–بين أن العلاقة $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$ ، بينما العلاقة $(1-x)\,y^2 = x^3$ هي حل خاص للمعادلة التفاضلية $2x^3y' = y\,\left(y^2 + 3x^2\right)$.

٨-أى من الدوال الآتية تكون حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - 5y = 0$

$(i)\, y = x^5,\quad (ii)\, y = 5x,\quad (iii)\, y = 5,$

$(iv)\, y = 5e^{5x},\quad (v)\, y = 2e^{5x},\quad (vi)\, y = e^{5x}$

٩-أي من الدوال الآتية تكون حلا للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 4y = e^x$

$(i)\, y = e^{2x} + e^x,\quad (ii)\, y = e^{2x},\quad (iii)\, y = e^x,$

$(iv)\, y = e^{2x} + xe^x,\quad (v)\, y = xe^{2x} + e^x$