مقدمة في

المعادلات التفاضلية العادية

إعـــداد

أ.د/ السيد محمد أبودهب خضيري

أستاذ الرياضيات التطبيقية
قسم الرياضيات -كلية العلوم بقنا جامعة جنوب الوادي – مصر
قسم الرياضيات والإحصاء -كلية العلوم -جامعة الطائف -السعودية

د/ طاهر عبد الحميد نوفل

أستاذ الرياضيات التطبيقية المساعد (المشارك)
قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة المنيا-مصر
قسم الرياضيات والإحصاء-كلية العلوم-جامعة الطائف-السعودية

مراجعـــة

أ.د/ عبد المعطي محمد عبد الله

أستاذ الرياضيات التطبيقية
قسم الرياضيات -كلية العلوم -جامعة سوهاج -مصر

الطبعة الأولى

١٤٤١هـ — ٢٠٢٠م

ماســـتر ©

مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية

أ.د/ السيد محمد أبودهب خضيري   د/ طاهر عبد الحميد نوفل

أ.د/ عبد المعطي محمد عبد الله

الجمع والإخراج

التجهيزات الفنية بدار ماستر للنشر

رقم الإيداع /٢٠٨٦٦ / ٢٠١٩م

ISBN: 978-977-85571-1-4

٢٠٢٠م

Email: master.publisher@hotmail.com

Facebook: facebook.com/Master.PH

Smashwords: smashwords.com/master.ph

Tel & Whatsapp/ 0128 730 3637

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديـــــم

إن الحمد لله نحمده حمداً كثيراً طيباً مباركاً فيه، والصلاة والسلام على سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم خير البرية، وإمام البشرية، وسيد المرسلين وعلى آله وأصحابه الأخيار البررة، وعلى من اتبع سنته وسار على شريعته إلى يوم الدين.

بحمد الله تعالى وعونه وتوفيقه تم إعداد هذا الكتاب ليتوافق مع تطلعات الجامعات والمعاهد في مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا لما يتسم به من خدمة الباحثين والبحث العلمي، في كليات العلوم والهندسة وعلوم فيزياء الأرض لما يحتويه من موضوعات لها تطبيقاتها العلمية، الهندسية، والجيوفيزيائية، وتتقدم لجنة الإعداد بخالص الشكر والتقدير للجنة تحكيم ومراجعة الكتاب.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

وصلي الله على سيدنا محمد وعلى آله وصحبة وسلم أجمعين

والله ولي التوفيق

لجنة الإعداد

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين سيدنا ونبينا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله وصحبه أجمعين.

وبعد،،،

تحتل المعادلات التفاضلية مكانة أساسية فى دراسة التحليل الرياضى وتطبيقاته وذلك لانها وسيلة مهمة فى حل كثير من المشاكل فى الفيزياء النظرية بل وتظهر المعادلات التفاضلية في كثير من العلوم الرياضية (البحتة والتطبيقية) كما تظهر أهمية المعادلات التفاضلية ليست في الرياضيات فقط بل وخلف ميادين المعرفة المختلفة من العلوم الهندسية والطبيعية والكيمياء وعلم البيئة والطب واقتصاد وإدارة.

وقد نشـأ ت نظرية المعادلات التفاضـلية في أعقاب نشـأة علم التفاضـل والتكامل في القرن السابع عشر الميلادي على يد العالمين العظيمين، الإنجليزي إسحق نيوتن(1727–1642) والألمـاني جونفرد ليبنتز (1716–1646). ولقـد ســـاهم في تطور هـذا الفرع الهـام من فروع الرياضـيات عدد كبير من العلماء، وتًعرف المعادلة التفاضـلية (Differential Equation) على أنها معادلة تحتوي على مشتقات ومتغيرات. كالأمثلة الآتية

$$\frac{dy}{dx}+y=\sin x\,,\quad y'''+y'=0$$

$$f\left(x\,,y\,,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

وإذا احتوت المعادلة التفاضلية متغيرا مستقلا واحدا فان المشتقات بها تكون مشتقات عادية وتسمى المعادلة في هذه الحالة بمعادلة تفاضلية عادية (Ordinary Differential Equation "ODE") أما إذا احتوت المعادلة التفاضلية اثنين أو اكثر من المتغيرات المستقلة فان المشتقات التي تحتويها المعادلة تكون مشتقات جزئية وتسمى المعادلة بمعادلة تفاضلية جزئية (Partial Differential Equation "PDE").

يتألف الكتاب من ستة فصول:

في الفصل الأول: مفاهيم أساسية.

في الفصل الثاني: طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

في الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجات العليا.

في الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتب العليا.

في الفصل الخامس: حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات اللانهائية.

في الفصل السادس: تحويلات لابلاس.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

لجنـــــة الإعـــــداد

فهرست المحتوى

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Basic Concepts

١/١-المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية هي معادلة تتضمن دالة مجهولة وتفاضلاتها وتنقسم المعادلات التفاضلية إلى نوعين هما:

١) معادلات تفاضلية عادية. **٢) معادلات تفاضلية جزئية.**

١/١/١-المعادلة التفاضلية العادية: Ordinary Differential Equation

هي علاقة تساوي بين دالة مجهولة تعتمد على متغير واحد وبين واحد أو أكثر من المشتقات (أو تفاضلات) الدالة المجهولة. فمثلاً إذا كانت الدالة المجهولة هي $y=f(x)$ والتي تعتمد على المتغير المستقل x فان الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية في هذه الحالة هي:

$$f\,(x\,,y\,,y'\,,y''\,,\,...\,,y^{(n)})=0,$$

حيث

$$y^{(n)}=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

٢/١/١-المعادلة التفاضلية الجزئية: Partial Differential Equation

هي علاقة تساوي بين دالة مجهولة تعتمد على أكثر من متغير وبين واحد أو أكثر من مشتقات (تفاضلات) جزئية للدالة المجهولة بالنسبة للمتغيرات المستقلة. فمثلاً إذا كانت الدالة المجهولة هي $z\,(x\,,y\,)$ والتي تعتمد على المتغيرين المستقلين $x\,,y$ فان المشتقات (التفاضلات) التي سوف تظهر في المعادلة هي مشتقات (تفاضلات) جزئية للدالة المجهولة z بالنسبة للمتغيرات المستقلة التي تعتمد عليها $(x\,,y\,)$، وبذلك فان المعادلات التفاضلية الجزئية في هذه الحالة تكون الصورة العامة لها هي:

$$\Phi\left(x\,,\,y\,,\,z\,,\,\frac{\partial z}{\partial x},\,\frac{\partial z}{\partial y},\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\,\dots\,,\,\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\,\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)=0$$

وسوف تقتصر دراستنا في هذا المقرر على المعادلات التفاضلية العادية فقط.

١/١/٣– رتبة المعادلة التفاضلية:

تعرف رتبة المعادلة التفاضلية العادية بأنها أعلى مشتقة فى المعادلة التفاضلية.

١/١/٤– درجة المعادلة التفاضلية:

تعرف درجة المعادلة التفاضلية العادية بأنها أعلى أس مرفوع لأعلى مشتقة بعد وضع المعادلة فى صورة كثيرة حدود فى المشتقات ... والأمثلة التالية توضح ذلك

١/٢– أمثلة:

الدرجة	الرتبة	المعادلة
1	1	$\frac{dy}{dx}=e^{x}$
1	2	$y''-3y'^{2}=8\cos x$
3	1	$(y')^{3}+4xy=5$
2	3	$(y''')^{2}+(y')^{5}-2xy=0$
1	2	$y''+2(y')^{6}=\ln y''$
4	5	$(y^{(5)})^{4}-7y=\sin y'$

١/٣– حل المعادلة التفاضلية:

تسمى الدالة $y=\Phi(x)$ والمعرفة على الفترة $]a,b[$ حلاً للمعادلة التفاضلية

$$f(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0,\qquad y^{(n)}=\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$$

إذا كانت $\Phi(x)$ قابلة للتفاضل n من المرات في الفترة $]a,b[$ تطابقياً في هذه الفترة أي أن:

$$f\ (x\ ,\Phi(x),\Phi'(x),\Phi''(x),\ ...\ ,\Phi^{(n)}(x))=0.$$

١/٣/١– الثوابت الاختيارية:

يقال لمجموعة الثوابت الموجودة بعلاقة ما بأنها ثوابت اختيارية إذا لم يكن من الممكن استبدال هذه المجموعة من الثوابت بعدد أقل من الثوابت، بحيث تحتفظ العلاقة بنفس خصائصها.

فمثلاً العلاقة $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ بها ثابتان اختياريان هما c_1,c_2، حيث لا يمكن استبدالهما بثابت واحد فقط أي أن الحلول $\cos x,\sin x$ تكون مستقلة خطياً.

٢/٣/١– أنواع حلول المعادلة التفاضلية:

١/٢/٣/١– الحل العام:

يسمى حل المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n والذي يحتوي على n من الثوابت الاختيارية بالحل العام.

٢/٢/٣/١– الحل الخاص:

هو أي حل يتم الحصول عليه من الحل العام وذلك بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً محددة

مثال: المعادلة $\ddot{y}=-\omega^2 y$ حلها العام هو $y=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.

بوضع $A=B=1$ مثلا نجد أن $y=\cos\omega t+\sin\omega t$، هو حل خاص للمعادلة المعطاة.

٤/١– تكوين المعادلة التفاضلية:

يمكننا تكوين معادلة تفاضلية وذلك بحذف الثوابت الاختيارية من الحل العام باستخدام المشتقات المختلفة للمتغير التابع.

فمثلاً: العلاقة $y^2=ax-b$ تحتوي على ثابتين اختياريين، لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد أن

$$2yy' = a\,,$$
$$2yy'' + 2y'^2 = 0.$$

وبالتالي نكون قد حصلنا على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

والعلاقة
$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

تحتوي على ثابتين اختياريين، لذلك نشتق العلاقة مرتين فنجد أن

$$y' = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x}$$

$$y'' = 4Ae^{2x} + 9Be^{3x}$$

وبحذف الثوابت نكون قد حصلنا على المعادلة التفاضلية الاتية من الرتبة الثانية

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

أما العلاقة

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{1}$$

فهي تحتوي على ثلاثة ثوابت اختيارية a, b, c.

ولتكوين المعادلة التفاضلية نشتق العلاقة (1) ثلاث مرات فنحصل على:

$$2yy' + 2x + a + by' = 0, \tag{2}$$
$$2yy'' + 2y'^2 + 2 + by'' = 0, \tag{3}$$
$$2yy''' + by''' + 6y'y'' = 0\,, \tag{4}$$

بحذف الثابت b بين المعادلتين (4) ,(3) نحصل على

$$\left[1 + (y')^2\right]y'' = 3y'(y'')^2 \tag{5}$$

المعادلة (5) هي المعادلة التفاضـــلية التي حلها العام هو المعادلة (1)، أي أن المعادلة (5) هي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

من المثالين السابقين نستنتج أن رتبة المعادلة التفاضلية التي نحصل عليها من حذف الثوابت تساوي عدد الثوابت الاختيارية في العلاقة المعطاة (حل المعادلة)، والعكس صحيح، أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية التي من رتبة n يحتوي على n من الثوابت الاختيارية.

١/٥– تمارين:

١- حدد رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$a)\; y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 7, \qquad b)\; y''' - 5xy'^3 = e^x,$$

$$c)\; \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^4 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = 6t^2, \qquad d)\; y'' - 9y' = \sin y'',$$

$$e)\; (1 - x^2)dy = \frac{y}{1 + y^2}dx, \qquad f)\; \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + y'^3},$$

$$g)\; y''' - 4y'^2 = \ln y, \qquad h)\; e^{y'''} - xy'' + y = 0.$$

٢–اثبت أن العلاقة $y = 2e^{-x} + xe^{-x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = 0$.

٣–بين أن العلاقة $y = \ln x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $x y'' + y' = 0$ على الفترة $(0, \infty)$ فقط.

٤–أوجد قيمة α بحيث تكون العلاقة $y = e^{\alpha x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y''' - 3y'' - 10y' = 0$.

٥-اثبت أن العلاقة $y = (x + a)^2$ هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y' = 2\sqrt{y}$، بينما $y = x^2$ هو حل خاص لهذه المعادلة.

٦– كون المعادلات التفاضلية بعد حذف الثوابت الاختيارية من العلاقات الآتية:

$$1)\ x = a\sin(\omega t + \varepsilon)$$
$$2)\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$
$$3)\ y = a\,e^{\alpha x}$$
$$4)\ x^2 + 4a\,y = b$$
$$5)\ y = ax^2 + be^x$$
$$6)\ y = ae^{2x} + be^x$$
$$7)\ \ln y = ax^2 + b$$
$$8)\ y = a\sin 4x + b\cos 4x$$

حيث $a, b, c, \alpha, \varepsilon$ ثوابت اختيارية و ω بارامتر.

٧–بين أن العلاقة $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ هي حل عام للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$ ، بينما العلاقة $(1-x)\,y^2 = x^3$ هي حل خاص للمعادلة التفاضلية $2x^3y' = y\left(y^2 + 3x^2\right)$.

٨-أى من الدوال الآتية تكون حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - 5y = 0$

$(i)\ y = x^5,\quad (ii)\ y = 5x,\quad (iii)\ y = 5,$

$(iv)\ y = 5e^{5x},\quad (v)\ y = 2e^{5x},\quad (vi)\ y = e^{5x}$

٩-أي من الدوال الآتية تكون حلا للمعادلة التفاضلية $y'' - 4y' + 4y = e^x$

$(i)\ y = e^{2x} + e^x,\quad (ii)\ y = e^{2x},\quad (iii)\ y = e^x,$

$(iv)\ y = e^{2x} + xe^x,\quad (v)\ y = xe^{2x} + e^x$

الفصل الثاني

طرق حل المعادلات التفاضلية

ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى

Methods of Solutions of Differential Equations

from First Order and First Degree

الصــورة العامــة للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى هي:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

ويكون الحل العام لها على الصورة

(2) حيث c ثابت اختياري $y = \phi(x, c)$

وفي بعض الأحيان نحصل على الحل في الصورة الضمنية

(3) حيث c ثابت اختياري $\Phi(x, y, c) = 0$

أي أن الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الأولى يكون عبارة عن عائلة منحنيات ذات بارامتر (ثابت اختياري) واحد في مستوى الإحداثيات (x,y)، ويمثل كل حل خاص أحد منحنيات العائلة. واضح أنه يمكننا الحصول كحالة خاصة على y' من المعادلة (1)، على الصورة

$$y' = f(x, y) \qquad (4)$$

حيث $f(x, y)$ هي دالة معرفة ومتصلة ووحيدة القيمة في منطقة ما.

أي أن المعادلة (4) هي علاقة بين إحداثي نقطة ما (x, y) وميل المماس للمنحني عند هذه النقطة.

٢/١- طرق حل المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية العادية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى هي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

وفي كثير من المسائل يكون من الأفضل وضع المعادلة على الصورة

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

وسوف نستعرض فيما يلي بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية:

١/١/٢-طريقة فصل المتغيرات:

إذا أمكن فصل متغيرات المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى والدرجة الأولى أى أن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$M(x)\, dx + N(y)\, dy = 0.$$

يكون من السهل حلها، حيث يكون الحل على الصورة

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

حيث c ثابت اختياري

ونلاحظ ان الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد، نظراً لأن المعادلة من الرتبة الأولى.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x + 3yy' = 0$$

الحل:

يمكن وضع المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3y}$$

وبفصل المتغيرات تصبح

$$3y\, dy = -x\, dx$$

وبالتكامل نحصل على

$$3\left(\frac{y^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + c$$
$$\therefore 3y^2 = -x^2 + c^*$$

حيث c^* ثابت اختياري.

مثال(٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}+(1+y^2)=0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{1}{1+x^2}dx+\frac{1}{1+y^2}dy=0$$

بالتكامل نجد أن

$$\int\frac{dx}{1+x^2}+\int\frac{dy}{1+y^2}=c$$

$$\therefore \tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c$$

حيث c ثابت اختيارى.

مثال(٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2y+(xy+3x)y'=0,\quad x\neq 0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$2y\,dx+x(y+3)dy=0$$

بقسمة المعادلة على xy والتكامل نحصل على

$$\int\frac{2}{x}dx+\int(1+\frac{3}{y})dy=c$$

$$\therefore 2\ln|x|+y+3\ln|y|=c$$

وبالتالي يكون الحل العام على الصورة

$$x^2 y^3 = e^{c-y}$$

لاحظ أننا حصلنا على الحل في الصورة الضمنية ومن الصعب الحصول عليه في الصورة $y = f(x)$.

مثال(٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^4 e^{2x} dx + dy = 0$$

الحل:

من السهل فصل المتغيرات بقسمة المعادلة على y^4 والتكامل نجد أن

$$\int e^{2x} dx + \int \frac{dy}{y^4} = c, \qquad y \neq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{3y^3} = c$$

ومنها نحصل على الحل في الصورة الصريحة

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{3e^{2x} - k}}, \qquad k = 6c$$

مثال (٥): اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i)\left(x^2 y^2 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 2xy + y \qquad (ii)\, x \cos y\, dx - e^{-x} \sec y\; dy = 0$$

الحل:

$$(i)\left(x^2 + 1\right) y^2 \frac{dy}{dx} = y\,(2x + 1)$$
$$\therefore \left(x^2 + 1\right) y dy = (2x + 1) dx$$
$$\therefore y dy = \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1}\right) dx$$

وبإجراء التكامل ينتج أن

$$\int y dy = \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left|x^2+1\right| + \tan^{-1} x + c$$

$$(ii)\, x \cos y \, dx - e^{-x} \sec y \, dy = 0$$

بالقسمة على $e^{-x} \cos y$ نجد أن

$$xe^x dx - \sec^2 y \, dy = 0$$

بالتكامل

$$\int \sec^2 y \, dy = \int xe^x dx + c$$

بالتكامل بالتجزيء يكون الحل العام هو

$$\therefore \tan y = xe^x - e^x + c$$

مثال (٦): اوجد حل مسألة القيمة الإبتدائية الآتية:

$$(\sin x \cos y)dx + (\cos x \sin y)dy = 0$$

التي تحقق الشرط $y(0) = 0$

الحل:

بالقسمة على $\cos x \cos y$ نجد أن

$$\frac{\sin x}{\cos x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

بالتكامل ينتج

$$-\ln|\cos x|-\ln|\cos y|=\ln a; \qquad a>0$$
$$\therefore -\ln|\cos x \ \cos y|=c; \qquad c=\ln a$$

لإيجاد قيمة c باستخدام الشرط $y(0)=0$ فإن

$$(\cos x)(\cos y)=c, \quad c=\frac{1}{a}$$

ويكون الحل الخاص هو

$$(\cos x)(\cos y)=1$$

أو

$$y=\cos^{-1}(\sec x)$$

٢/١/٢- معادلات يمكن تحويلها لمعادلات يمكن فصل متغيراتها:

توجد بعض المعادلات في صورة غير قابلة لفصل متغيراتها ولكن إذا قمنا بإجراء تحويل للمتغيرات فإننا نحصل على صورة يسهل فصل متغيراتها.

من أمثلة هذه المعادلات: المعادلات التي علي الصورة $\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$

وهذه الصورة لا يمكن فصل متغيراتها، ولكن باستخدام التعويض $z=ax+by+c$

فإن المعادلة تتحول إلى صورة يسهل فصل متغيراتها، حيث

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=f(z)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=b\,f(z)+a$$

ومن الواضح أن هذه الصورة يسهل فصل متغيراتها كالآتي

$$\frac{dz}{b\,f(z)+a}=dx \quad \therefore \int\frac{dz}{b\,f(z)+a}=x+c.$$

بإجراء التكامل ثم التعويض عن $z = ax + by + c$ نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة كما يتضح بالمثال التالي.

مثال (٧): اوجد الحل العام المعادلة التفاضلية:

$$y' = (x + y)^2$$

الحل:

بوضع $z = x + y$

إذن $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ أو $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية يكون

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z^2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

أو $dz - (1 + z^2)dx = 0$

بفصل المتغيرات والتكامل

$$\frac{dz}{1 + z^2} - dx = 0$$

$$\therefore \tan^{-1} z - x = c$$

$$\therefore \tan^{-1} z = x + c$$

$$\therefore z = \tan(x + c)$$

الحل العام هو $y = \tan(x + c) - x$

مثال (٨): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(x + 2y)dx + dy = 0$$

الحل:

المعادلة يمكن وضعها على الصورة $\frac{dy}{dx} = -(x+2y)$

بوضع $z = x+2y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx} = 1+2\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = -z$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 1-2z$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\int \frac{dz}{1-2z} = \int dx - c$$

حيث c ثابت اختياري $\frac{1}{2}\ln(1-2z) + x = c,$

بوضع $z = x+2y$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\ln(1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = c - x$$

$$\therefore (1-2x-4y)^{\frac{1}{2}} = e^{c}.e^{-x} = k\,e^{-x}$$

$$\therefore 1-2x-4y = k^{2}e^{-2x}$$

فيكون الحل العام على الصورة

حيث k ثابت اختياري $\therefore y = \frac{1}{4}\left[1-2x+k^{2}e^{-2x}\right],$

مثال (٩): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$dy = (x+y)^2\, dx$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$

بأخذ التعويض $z=x+y$ نجد أن $\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=1+y'=1+z^2$$
$$\therefore \left(1-\frac{dz}{dx}\right)=z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=z^2+1$$
$$\therefore \int \frac{dz}{1+z^2}=\int dx$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\tan^{-1} z=x+c \Rightarrow z=\tan(x+c),$$ حيث c ثابت اختياري

بالتعويض عن z بـ $x+y$ نحصل على

$$y=[\tan(x+c)]-x$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة المعطاة في الصورة الصريحة.

٣/١/٢-حل المعادلة التفاضلية المتجانسة:

تعريف (١): يقال أن الدالة $f(x,y)$ أنها دالة متجانسة من الدرجة n في المتغيرين x,y إذا كانت لكل عدد حقيقي λ يكون

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

وأمثلة ذلك:

أ- الدالة $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy$ دالة متجانسة من الدرجة الثانية حيث

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y)$$

ب- الدالة

$$f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}+\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

دالة متجانسة من درجة صفر لأن

$$f(\lambda x,\lambda y)=e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\tan\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)\lambda^0 f(x,y)$$

ج- ولكن الدالة $f(x,y)=x^2+y$ دالة غير متجانسة

إذا وضعنا $y=xz$ فان أي دالة متجانسة من درجة n يمكن كتابتها في الصورة

$$f(x,y)=f(x,xz)=x^n f(1,z)$$

وهذا التعويض يبين أن الدالة المتجانسة $f(x,y)$ يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب x^n وهي دالة في x و $f(1,z)$ والتي هي دالة في z فقط.

تعريف (٢): يقال أن المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x,y)}{-\psi(x,y)} \quad or \qquad \varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0$$

أنها متجانسة إذا كان $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$ دالتين متجانستين ومن نفس الدرجة.

ولإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة نضع

$$dy=xdz+zdx, \qquad y=xz$$

وإذا كانت $\varphi,\ \psi$ متجانسة من درجة n فإن

$$\varphi=x^n\varphi(1,z)=x^n p(z)$$
$$\psi-x^n\psi(1,z)=x^n Q(z)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية $\varphi dx+\psi dy=0$ نحصل على

$$x^n P(z)dx+x^n Q(z)(zdx+xdz)=0$$

أو في الصورة

$$\left[P(z)+zQ(z)\right]dx+xQ(z)dz=0$$

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة السابقة بطريقة فصل المتغيرات ويكون حلها العام هو

$$\int \frac{Q(z)}{P(z)+zQ(z)}dz = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

حيث c ثابت اختياري وبعد إجراء عملية التكامل نضع $z=\frac{y}{x}$ أي أنه بالتعويض عن $y=xz$ تؤول المعادلة التفاضلية المتجانسة إلى معادلة تفاضلية في x, z يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$$

الحلـ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\ y}{x^2-y^2}=\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}$$

$$\therefore \varphi(x,y)=x\ y$$

$$\therefore \varphi(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2\varphi(x,y)$$

$$\therefore \varphi(x,y)=x\ y$$

$$\therefore \psi(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-(\lambda y)^2=\lambda^2\psi(x,y)$$

وبذلك تكون المعادلة متجانسة لحلها

بقسمة كل من البسط والمقام على x^2 نجد أن $$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

بوضع $v=\frac{y}{x}$ والتعويض عن $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ نحصل على

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^3}{1-v^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$\int\left(\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v}\right)dv-\int\frac{dx}{x}=\ln\frac{1}{k}$$

$$\therefore -\frac{1}{2}v^2-\ln v-\ln x=-\ln k,\quad k>0$$

$$\therefore \frac{1}{2}v^2=\ln\left(\frac{k}{vx}\right)$$

$$\therefore v^2=\ln\left(\frac{vx}{k}\right)^2$$

بوضع $v=\dfrac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y^2=x^2\ln\left(\frac{y}{k}\right)^2$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2ye^{\frac{y}{x}}-x)\frac{dy}{dx}+2x+y=0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(2x+y)dx+(2ye^{\frac{y}{x}}-x)dy=0;\quad y=xv$$

$$\therefore (2x+xv)dx+(2xve^{v}-x)\left(vdx+xdv\right)=0$$

بفصل المتغيرات واجراء التكامل نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+\left(\frac{y}{x}\right)}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)e^{\left(\frac{y}{x}\right)}}$$

واضح أن المعادلة متجانسة.

بوضع $v=\frac{y}{x}$ والتعويض عن $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ ، نجد أن

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2\left(1+v^2e^v\right)}{1-2ve^v}$$

بفصل المتغيرات والتكامل، نحصل على

حيث c ثابت اختياري $$k\,x^2\left(e^{-v}+v^2\right)=1$$

بوضع $v=\frac{y}{x}$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y^2+x^2e^{-\left(\frac{y}{x}\right)}=a,\qquad a=\frac{1}{k}.$$

لاحظ أن الحل في الصورة الضمنية ومن الصعب الحصول عليه في الصورة الصريحة $y=f(x)$.

مثال (٣): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y-x)dx-xdy=0$$

الحل:

$$\varphi(x,y)=y-x,\quad \varphi(\lambda x,\lambda y)=\lambda y-\lambda x=\lambda(y-x)=\lambda\varphi(x,y)$$
$$\psi(x,y)=-x,\quad \psi(\lambda x,\lambda y)=-\lambda x=\lambda\psi(x,y)$$

نضع

$$y = xz , \quad dy = xdz + zdx$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$(xz - x)dx - x(xdz + zdx) = 0$$
$$\therefore (z - 1)dx - (xdz + zdx) = 0$$
$$\therefore dz = -\frac{dx}{x}$$
$$\therefore z = c - \ln x \;\; or \;\; y = x(c - \ln x)$$

مثال (٤): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

الحل:

بوضع المعادلة على الصورة الآتية:

$$y^2dx - (xy - x^2)dy = 0$$

بوضع $y = xz$ لأن كلا من البسط والمقام دوال متجانسة من الدرجة الثانية إذن

$$\varphi(x,y) = y^2, \qquad \varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 y^2 = \lambda \varphi(x,y)$$
$$\psi(x,y) = -(xy - x^2), \quad \psi(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda^2 xy - \lambda^2 x^2) = \lambda^2 \psi(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = \frac{x^2y^2}{x^2z - x^2} = \frac{z^2}{z - 1}$$
$$\therefore x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{z - 1} - z = \frac{z}{z - 1}$$

بفصل المتغيرات يكون

$$\frac{z-1}{z}dz=\frac{dx}{x}$$
$$\therefore\left(1-\frac{1}{z}\right)dz=\frac{dx}{x}$$
$$\therefore z-\ln z=\ln x+\ln c$$
$$z=\ln cxz \qquad or \qquad e^{z}=cxz$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\therefore e^{y/x}=cy$$

مثال (٥): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(y^{2}-yx\right)dx+x^{2}dy=0$$

الحل:

نلاحظ أن هذه المعادلة ليست ذات متغيرات قابلة للفصل ولكنها معادلة تفاضلية متجانسة.

نضع $y=xz$

$$\therefore\left(x^{2}z^{2}-x^{2}z\right)dx+x^{2}\left(zdx+xdz\right)=0 \qquad (1)$$

بقسمة طرف المعادلة (١) على x^2 تصبح المعادلة (1) في الصورة

$$z^{2}dx+xdz=0$$
$$\therefore\frac{dz}{z^{2}}+\frac{dx}{x}=0$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$-z^{-1}+\ln|x|=\ln c, \qquad c>0$$
$$\therefore-\frac{x}{y}+\ln|x|=\ln c$$

أو

$$y=\frac{x}{\ln\left(x/c\right)}$$

٤/١/٢-معادلات تفاضلية يمكن تحويلها إلى معادات متجانسة:

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0 \qquad (1)$$

فإنه يمكن تحويلها إما إلى معادلة تفاضلية متجانسة أو معادلة يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات

(أ) إذا كان $a_1b_2 \neq a_2b_1$ فيكون في هذه الحالة المستقيمان $a_1x+b_1y+c_1=0,$ $a_2x+b_2y+c_2=0$ متقاطعان.

نفرض أن نقطة التقاطع هي (α,β) نضع

$$x=X+\alpha, \qquad y=Y+\beta$$

وفيها

$$dx=dX\ , \quad dy=dY$$

هذا التعويض يختزل المعادلة التفاضلية (1) إلى معادلة تفاضلية متجانسة في الصورة

$$(a_1X+b_1Y)dX+(a_2X+b_2Y)dY=0$$

والتي يمكن حلها مثل النوع السابق باستخدام التعويض Y = XZ ثم نستبدل المتغيرات الجديدة X, Y بالمتغيرات الأصلية x, y

(ب) إذا كان $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ أو $a_1b_2=a_2b_1$ أي أن المستقيمين $a_1x+b_1y+c_1=0,$ $a_2x+b_2y+c_2=0$ متوازيان وفي هذه الحالة نستخدم التعويض

$$a_1x+b_1y=u$$

ينتج أن

$$dy=\frac{du-a_1dx}{b_1}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نجد أنها تتحول إلى معادلة تفاضلية يمكن فيها فصل المتغيرات.

(ج) المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

بحيث $a_1b_2\neq a_2b_1$ فيمكن حلها كما في (أ)

(د) المعادلة التفاضلية التي في الصورة

$$\frac{dy}{dx}=F\left(ax+by+c\right)$$

تتحول إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات باستخدام التعويض

$$\therefore z=ax+by+c$$

مثال (١): أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$$

الحل:

حيث أن

$$a_1=1,\ b_1=-1,\ c_1=1,\ \ a_2=1,\ b_2=1,\ c_2=-3$$
$$\therefore \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}=-1$$

فإن الخطان متقاطعان

بحل المعادلتين $x+y-1=0$ ، $x-y+1=0$ نجد أن نقطة التقاطع هي $(1,2)$.

بوضع $y=Y+2$ ، $x=X+1$ نجد أن $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$

وتتحول المعادلة إلي الصــورة $\frac{dY}{dX}=\frac{1-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}$ وهى معادلة متجانســة. وباســتخدام التعويض $Y=vX$ نجد أن $\frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$ وتتحول المعادلة إلي الصورة

$$X\frac{dv}{dX}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\left(1-2v-v^2\right)X^2=c_1$$

بوضع $v=\frac{Y}{X}$ نجد أن

$$\left(X^2-2XY-Y^2\right)=c_1$$

بوضع $X=x-1,\ \ Y=y-2$ في المعادلة السابقة نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة على الصورة $x^2-2xy-y^2+2x+6y=c$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y-3}{2x-4y+5}$$

الحل:

حيث أن

$$a_1=-1, b_1=2, c_1=3,\ \ a_2=2, b_2=-4, c_2=5$$
$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2},\quad \frac{b_1}{b_2}=-\frac{1}{2}$$

وحيث أن $a_1b_2=a_2b_1=4$ ، فإن المســتقيمان $-x+2y-3=0,\ \ 2x-4y+5=0$ متوازيان.

لذلك يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+2y-3}{-2(x+2y)+5}$$

بأخذ التعويض $z=-x+2y$ نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=-1+2\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(1+\frac{dz}{dx}).$$

وتتحول المعادلة إلى الصورة

$$\frac{1}{2}(1+\frac{dz}{dx})=\frac{z-3}{-2z+5}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{4z-11}{-2z+5} \qquad (1)$$

و المعادلة (1) يسهل فصل متغيراتها

$$\therefore \int\frac{2z-5}{4z-11}dz+\int dx=c$$

حيث c ثابت اختياري

لاجراء التكامل $\int\frac{2z-5}{4z-11}dz$ نجري عملية القســـمة المطولة أولاً ثم نوجد التكامل فينتج أن

$$\therefore \frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{4}\ln\left(4z-11\right)\right]+x=c$$

بالتعويض عن $z=-x+2y$ نجد أن الحل العام للمعادلة المعطاة يكون على الصورة

$$4x+8y+\ln\left(8y-4x-11\right)=k, \qquad k=8c.$$

مثال (٣): اوحد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y-3}{x+y-1}$$

الحلـ:

حيث أن $a_1b_2 \neq a_2b_1$ إذن المستقيمان متقاطعان في النقطة (α, β) والتي يمكن إيجادها بحل

$$x - y - 3 = 0 \qquad (1)$$
$$x + y - 1 = 0 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين نحصل على $2x - 4 = 0 \therefore x = 2$ وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن $y = -1$ فنحصل على $\alpha = 2, \beta = -1$ بوضع $x = X + 2$ و $y = Y - 1$ تتحول المعادلة التفاضلية المعطاة إلى المعادلة التفاضلية المتجانسة

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

نستخدم التعويض $Y = Xz$ لنجد أن

$$\frac{dY}{dX} = X\frac{dz}{dX} + z$$
$$\therefore z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1-z}{1+z} \therefore X\frac{dz}{dX} = -\frac{z^2 2z - 1}{1+z}$$

بالتكامل

$$\int \frac{dX}{X} = -\int \frac{1+z}{z^2 + 2z - 1}dz$$
$$\therefore \ln X + \frac{1}{2}\left(z^2 + 2z - 1\right) = \ln c$$
$$or \ \ln X^2\left(z^2 + 2z - 1\right) = \ln c^2$$
$$X^2\left(z^2 + 2z - 1\right) = c^2$$
$$\therefore Y^2 + 2XY - X^2 = c^2$$

بدلالة x, y يكون الحل العام هو

$$\therefore (y+1)^2 + 2(x-2)(y+1) - (x-2)^2 = c^2$$

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 1}{x - 2y + 3}$$

الحل:

واضح أن $a_1b_2 = a_2b_1$ وبأخذ $x - 2y = u$ ، إذن

$$1-2\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right)$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد إن

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{du}{dx}\right) = \frac{u+1}{u+3}$$

$$-\frac{du}{dx} = \frac{2u+2}{u+3} - 1 = \frac{2u+2-u-3}{u+3} = \frac{u-1}{u-3}$$

بفصل المتغيرات يكون

$$dx = -\frac{u+3}{u-1}du$$

وبالتكامل

$$x = -\int\left(1+\frac{4}{u-1}\right)du + c$$

$$= -u - 4\ln|u-1| + c$$

$$2x - 2y + 4\ln|x-2y-1| = c$$

مثال (٥): حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = (2\chi - y + 1)^2 - 2$$

الحل:

نضع

$$z = 2x - y + 1$$

إذن

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

(يترك تكملة الحل للقاريء)

٢/١/٥- المعادلات التفاضلية التامة: (Exact differential equation)

تعريف: المعادلة التفاضلية التالية

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0 \tag{1}$$

تكون معادلة تامة لدالة $F(x,y)=c$ إذا كانت φ, ψ مرتبطتين بدالة $F(x,y)$ بالمعادلات

$$\varphi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x},\quad \psi(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$$

أى أنه توجد دالة $F(x,y)$ بحيث $F(x,y)=c$

$$F(x,y)=\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dx \tag{2}$$

وعلى هذا فان حلها هو

$$\therefore dF=0$$

ومن ثم فإن $F(x,y)=c$

إذا كانت $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ ومشتقاتها

$$\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

دوال متصلة نجد أن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial}=\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi\,\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

نظرية: إذا كانت φ, ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ جميعها دوال متصلة في x, y فان الشرط الضروري والمكافئ لكى تكون المعادلة التفاضلية $\varphi dx+\psi dy=0$ تامة هو

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

البرهان:

نفرض أن الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية

$$\varphi(x,y)dx+\Psi(x,y)dy=0 \tag{1}$$

هو تفاضل تام للدالة $F(x,y)$ أي أن

$$\varphi dx+\psi dy=dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$$

$$\therefore \varphi=\frac{\partial F}{\partial x}\ ,\ \psi=\frac{\partial F}{\partial y} \tag{2}$$

بتفاضل العلاقة الأولي من (2) بالنسبة إلى y والثانية بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

ومنها نجد أن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

وبذلك نكون قد برهنا أن الشرط ضروري

ولكن نبين أن الشرط كافي افرض أن الشرط تحقق وسوف نجد الدالة $F(x,y)$ بحيث يكون

$$dF=\varphi\,dx+\psi dy$$

نبحث عن الدالة $F(x,y)$ والتي تحقق الشرط الأول من (2) وذلك بتكاملها بالنسبة إلى x (بفرض أن y ثابت) فنحصل على

$$F(x,y)=\int\varphi(x,y)dx+g(y) \tag{3}$$

حيث A (y) دالة اختيارية في y سوف نختار g (y) بحيث أن التفاضل الجزئي للدالة $F(x,y)$ بالنسبة إلى y يساوي $\psi(x,y)$ أي أن

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi(x,y)dx+A'(y)=\psi(x,y)$$

ومنها يكون

$$A'(y)=\psi(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi(x,y)dx \qquad (4)$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة لا يعتمد على x وبالتالي x لا تدخل في الطرف الأيمن أيضا، سوف نوضح أن التفاضل الجزئي للطرف الأيمن بالنسبة إلى x من المعادلة (1) يكون مساويا للصفر.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right)\\&=\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\end{aligned}$$

بتكامل المعادلة (4) بالنسبة إلى y يكون لدينا

$$A(y)=\int\left[\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right]dy+c$$

حيث c ثابت التكامل.

بالتعويض عن قيمة A(y) في المعادلة (1) نجد أن الدالة F تعطى في الصورة

$$F(x,y)=\int\varphi dx+\int\left[\psi-\frac{\partial}{\partial y}\int\varphi dx\right]dy+c$$

والتي تفاضلها التام هو $\varphi dx+\psi dy$

مثال (٦): اثبت أن المعادلة التفاضلية الآتية تامة وأوجد حلها

$$(2xy-y)dx+(x^2-x)dx=0$$

الحل:

$$\varphi = 2xy - y, \qquad \psi = x^2 - x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x - 1, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x - 1$$

لذلك فالمعادلة تامة

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

اجراء التكامل على φ أو على ψ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi = 2xy - y$$

$$\therefore F = \int (2xy - y)\,dx = x^2 y - xy + A(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \psi = x^2 - x = x^2 - x + A'(y)$$

أى أن

$$g'(y) = 0$$

أو

$$g(y) = a$$

ويكون الحل العام هو

$$x^2 - xy = c$$

ملحوظة: لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة نكامل φ بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتة وتكامل ψ التى لا تحتوى على x بالنسبة إلى y ونضيف التكاملين وتساوى الناتج بمقدار ثابت. أو تكامل ψ بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتة وتكامل حدود φ التى لا تحتوى على y بالنسبة إلى x وتساوى مجموع التكاملين بمقدار ثابت. أو تكامل φ بالنسبة إلى x وتكامل ψ بالنسبة إلى y ونضيف التكاملين بحيث لا تدرج الحدود المتشابهة فى التكامل الا مرة واحدة وتساوى الناتج بمقدار ثابت. وهذا صحيح اذا كانت φ ، ψ كثيرة الحدود فى x, y.

مثال (٧): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(2x+3\cos y)dx+(2y-3x\sin y)dy=0$$

الحل:

$$\varphi=2x+3\cos y,\quad \psi=2y-3x\sin y$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-3\sin y=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية تامة

$$\because \frac{\partial F}{\partial x}=2x+3\cos y$$
$$\therefore F(x,y)=\int(2x+3\cos y)dy+A(y)$$
$$=x^2+3x\cos y+A(y)$$

بالتفاضل جزئيا بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3x\sin y+A'(y)=2y-3x\sin y$$
$$\therefore \frac{dA}{dy}=2y\Rightarrow A(y)=y^2$$
$$\therefore F(x,y)=x^2+3x\cos y+y^2=c$$

الحل العام هو

$$x^2+3x\cos y+y^2=c$$

طريقة أخرى:

$$\int\varphi dx=\int(2x+3\cos y)dx=x^2+3x\cos y$$
$$\int\Psi dx=\int(2x-3\sin y)dy=y^2+3x\cos y$$

بجمع التكاملين بحيث لا يدرج الحد المكرر الا مرة واحدة نحصل على الحل العام في صورة

$$x^2+3x\cos y+y^2=c$$

مثال (٨): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(y\cos xy+e^{x}\right)dx+\left(x\cos xy-2ye^{y^{2}}\right)dy=0$$

$$\varphi=y\cos xy+e^{x},\ \psi=x\cos xy-2ye^{y^{2}}$$

الحل:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\cos xy-xy\sin xy,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\cos xy-xy\sin xy$$

المعادلة تامة لأن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\int\left(y\cos xy+e^{x}\right)dx=\sin xy+e^{x}$$

$$\int\left(x\cos xy-2ye^{y^{2}}\right)dy=\sin xy-e^{y^{2}}$$

الحل العام هو:

$$\sin xy+e^{x}-e^{y^{2}}=c$$

٦/١/٢- معادلات يمكن تحويلها إلى معادلات تامة:

المعادلة التفاضلية $\left(2y-4x^{2}\right)dx+xdy=0$ غير تامة ولكن بضربها في الدالة $\mu(x)=x$ تصبح المعادلة في الصورة

$$\left(2xy-4x^{3}\right)dx+x^{2}dy=0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة وحلها العام هو

$$x^{2}y-x^{4}$$

في هذا المثال الدالة $\mu(x)=x$ تسمى بالعامل المكامل للمعادلة التفاضلية الأصلية لأنه بضربها في هذا العامل تصبح معادلة تفاضلية تامة يمكن إيجاد الحل العام لها، أي أنه إذا كانت المعادلة التفاضلية:

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

غير تامة فإنه يوجد عامل مكامل $\mu=\mu(x,y)$ بحيث

$$\mu\varphi\,dx+\mu\psi\,dy=0 \qquad (2)$$

تصبح معادلة تامة.

إيجاد المعامل المكامل:

المعادلة (2) معادلة تفاضلية تامة بعد ضربها في المعامل المكامل μ وعليه فإن:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu\varphi)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu\psi)$$

أي أن

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

أو

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=\psi\frac{\partial\mu}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\mu}{\partial y} \qquad (3)$$

من هذه المعادلة التفاضلية الجزئية يمكن تعيين العامل المكامل μ وحل هذه المعادلة في الحالة العامة قد يكون بالغ الصعوبة إلا انه في بعض الحالات الخاصة مثل $\mu=\mu(x)$ أو $\mu=\mu(y)$.

قد يمكن الحصول على العامل المكامل. وسوف ندرس هاتين الحالتين الخاصتين:

١/٦/١/٢- إذا كانت μ دالة في x فقط:

حيث أن $\mu=\mu(x)$ فإن

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

وتأخذ المعادلة (3) الصورة

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=\psi\,\frac{\partial\mu}{\partial x}=\psi\,\frac{d\,\mu}{dx}$$

ومنها

$$\frac{1}{\mu}d\,\mu=\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$

ومعامل التكامل هو

$$\mu=e^{\int\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx}$$

٢/٦/١/٢- إذا كانت μ دالة في y فقط:

في هذه الحالة المعادلة (3) تأخذ الصورة

$$\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=-\varphi\,\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

ومنها

$$\frac{d\,\mu}{\mu}=-\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dy$$

ويكون العامل المكامل هو

$$\mu=e^{-\int\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dy}$$

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(1-xy)dx+\left(xy-x^{2}\right)dy=0$$

الحل:

$$\varphi = 1 - xy\,, \qquad \psi = xy - x^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x\,, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = y - 2x$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية المعطاة غير تامة

$$\therefore \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{x - y}{xy - x^2} = -\frac{1}{x}$$

إذن فإنه يكون العامل المكامل دالة في x بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في μ حيث $\mu = \mu(x)$ يكون

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}$$

$$\mu(1 - xy)dx + \mu\left(xy - x^2\right)dy = 0$$

$$\left(x^{-1} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

ويكون

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -1$$

$$\therefore \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial \psi^*}{\partial x}$$

وهي معادلة تفاضلية تامة.

إذن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(1 - xy)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(xy - x^2\right)\right]$$

$$\therefore -\mu x = \mu(y - 2x) + \left(xy - x^2\right)\frac{d\mu}{dx}$$

$$\therefore (y-x)\mu dx + x(y-x)d\mu = 0$$
$$\therefore \mu dx + x d\mu = 0 \therefore \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x}$$
$$\therefore \ln\mu = -\ln x \ \therefore \mu = \frac{1}{x}$$

وبضرب طرفي المعادلة التفاضلية المطلوب إيجاد حلها العام في هذا العامل المكامل تصبح

$$\left(\frac{1}{x} - y\right)dx + (y-x)dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة حلها العام هو

$$\ln x - xy + \frac{1}{2}y^2 = c$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(y + xy^2\right)dx - xdy = 0$$

الحل:

$$\varphi = y + xy^2, \qquad \psi = -x$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 + 2xy\ , \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -1$$

إذن المعادلة غير تامة لأن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ولكن

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2 + 2xy = 2(1+xy)$$
$$\therefore -\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = -\frac{2(1+xy)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$
$$\therefore \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$$

إذن

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\varphi}=\frac{2+2xy}{y+xy^2}=\frac{2}{y}$$

إذن العامل المكامل دالة في y أي أن $\mu=\mu(y)$.

المعادلة

$$\mu\left(y+xy^2\right)dx-\mu x\,dy=0$$

تامة أي أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(y+xy^2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\mu x\right]$$

$$\mu\left[1+2xy\right]+\left(y+xy^2\right)\frac{d\mu}{dy}=-\mu$$

$$\therefore 2\mu+\frac{y\,d\mu}{dy}=0\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=-2\frac{dy}{y}$$

$$\ln\mu=-2\ln y\Rightarrow\mu=1/y^2$$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في $\mu=1/y^2$ يكون

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

تصبح المعادلة تامة وبالتالي يمكن حلها كما سبق فنحصل على

$$\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=c$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(x^2+y^2+x\right)dx+xydy=0$$

الحل:

$$\varphi = x^2 + y^2 + x\,,\ \psi = xy\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

المعادلة غير تامة

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y - y = y$$

$$\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

∴ العامل المكامل دالة في x فقط، ويكون العامل المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx} e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب المعادلة التفاضلية بهذا العامل المكامل لنحصل على معادلة تفاضلية تامة هي

$$\left(x^2 + xy^2 + x\right)dx + x^2 y\,dy = 0$$

وحلها العام هو

$$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c$$

٢/١/٧-المعادلة التفاضلية الخطية: (Linear differential equation)

تكون المعادلة التفاضلية التي من الرتبة الأولي خطية إذا كانت y', y من الدرجة الأولي. والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولي هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \qquad (2)$$

حيث $Q\,,\,P$ دالتان متصلتان ولهذه المعادلة التفاضلية الخطية أهمية كبيرة في الرياضيات البحتة والتطبيقية. ولحل هذه المعادلة نعيد كتابتها على الصورة

$$dy+\left(Py-Q\right)dx=0$$

$$\varphi(x,y)=Py-Q,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=P(x),\ \psi(x,y)=1,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

$$\therefore\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=P(x)$$

$$\therefore\frac{1}{\psi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]=P(x)$$

وهذه المعادلة غير تامة وعامل المكامل لها دالة في x. بضرب هذه المعادلة في عامل المكامل $\mu=\mu\left(x\right)$ فتصبح

$$\mu dy+\left(\mu Py-\mu Q\right)dx=0$$

وتكون هذه المعادلة تامة إذا تحقق الشرط:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu Py-\mu Q\right)\qquad(3)$$

$$\therefore\frac{d\mu}{dx}=\mu P$$

$$\therefore\ln\mu=P\int dx+c\qquad(4)$$

ويكون العامل المكامل هو

$$\mu(x)=e^{\int pdx}\qquad(5)$$

من المعادلة (٤)، يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\mu dy+yd\mu=\mu Q$$

ومنها

$$\frac{d}{dx}\left(\mu y\right)=\mu Q$$

بالتكامل

$$\mu y=\int\mu Qdx+c\qquad(6)$$

وبالتعويض عن $\mu = e^{\int P dx}$ نحصل على الحل العام في الصورة

$$y.e^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c$$

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3$$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى عاملها الكامل μ هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية هو

$$xy = \int x.x^3 dx + c$$

$$xy = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\therefore 5xy = x^5 + a, \quad a = 5c$$

مثال (٥): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = \operatorname{cosec}^2 x$$

الحل:

$$\mu = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

ويكون الحل العام هو

$$y \sin x = \int \sin x \operatorname{cosec}^2 x dx + c$$

$$= \int \operatorname{cosec} x dx + c = \ln\left|\operatorname{cosec} x - \cot x\right| + c$$

$$\therefore y = -\operatorname{cosec} x \ln\left|\operatorname{cosec} x - \cot x\right| + c \operatorname{cosec} x$$

مثال (٦): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\left(x^4+2y\right)dx-xdy=0$$

الحل:

نعيد كتابة هذه المعادلة كما يلي

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=x^3$$

وهي معادلة تفاضلية خطية معاملها المكامل هو

$$\mu=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2}$$

والحل العام هو

$$y.\frac{1}{x^2}=\int x^3\frac{1}{x^2}dx+c$$
$$=\frac{x^2}{2}+c\Rightarrow y=\frac{x^4}{2}+cx^2$$
$$\therefore 2y=x^4+c^*x^2,\quad c^*=2c$$

مثال (٧): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dx}{dy}+x\sec y=\cos^2 y$$

الحل:

$$\mu=e^{\int\sec y dy}=e^{\ln(\sec y+\tan y)}$$
$$=\sec y+\tan y$$

∴ الحل العام هو

$$x\left(\sec y+\tan y\right)=\int\cos^2 y\left(\sec y+\tan y\right)dy+c$$
$$=\int\left(\cos y+\sin y\cos y\right)dy+c$$
$$=\sin y+\frac{1}{2}\sin^2 y+c$$

٨/١/٢- معادلة برنولى التفاضلية: (Bernoulli differential equation)

الصورة العامة لهذه المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \qquad (1)$$

حيث Q , p دوال متصلة معلومة في x فقط وأن n عدد حقيقي لا يساوي صفر أو الواحد الصحيح، إذا كانت $n=0$ فإن المعادلة (1) تكون معادلة خطية وعندما $n=1$ فإنها تكون معادلة تفاضلية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات لذا سنفرض أن $n\neq 0,\ n\neq 1$ ولتحويل معادلة برونلي إلى معادلة خطية نتبع الآتي

١- نقسم طرفي المعادلة (1) على y^{n} فتصبح

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^{n-1}}P=Q$$

$$\therefore y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}P=Q$$

٢- نضع $z=y^{1-n}$ إذن

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx}+(1-n)zp=(1-n)Q$$

وهذه المعادلة خطيه عاملها المكامل μ هو

$$\mu=e^{\int(1-n)pdx}$$

وحلها العام هو

$$\mu z=(1-n)\int \mu Qdx+c$$

ويكون الحل العام لمعادلة برنوللى هو

$$\mu y^{1-n}=\int(1-n)\mu Qdx+c$$

مثال (٨): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$$

الحل:

بالقسمة على xy^2 تصبح المعادلة في الصورة

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{xy}=\frac{\ln x}{x}$$

نضع $z=y^{-1}$ ومنها

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z}{x}=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=-\frac{\ln x}{x}$$

وهذه المعادلة خطيه عاملها المكامل هو $\mu=e^{-\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x}$

$$\therefore\frac{1}{x}z=-\int\frac{1}{x^2}\ln x\,dx+c$$

باجراء التكامل بالتجزيء نحصل على

$$\frac{1}{x}z=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة هو

$$\therefore\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{x}+c$$

or

$$\frac{1}{y}=\ln x+cx+1$$

مثال (٩): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$$

الحل:

بالقسمة على y^3

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y^2}=x^3$$

نضع $z=y^{-2}$ إذن $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\frac{-1}{2}\frac{dz}{dx}+xz=x^3 \therefore \frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$$

$$\therefore \mu=e^{\int -2xdx}=e^{-x^2}$$

$$\therefore e^{-x^2}z=-2\int x^3e^{-x^2}dx+c=-2\int x^2\left(xe\right)^{-x^2}dx+c$$

$$\therefore e^{-x^2}z=-2\left[-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+\int x^3e^{-x^2}dx\right]+c$$

$$=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c$$

الحل العام هو

$$\frac{e^{-x^2}}{y^2}=x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}+c$$

$$\therefore y^2=\frac{1}{x^2+1+ce^{x^2}}$$

٩/١/٢-معادلة ريكاتي: (Ricati's equation)

الصورة القياسية لهذه المعادلة هي:

$$y'=p\left(x\right)y^2+q\left(x\right)y+r\left(x\right)$$

حيث $p(x), q(x), r(x)$ دوال معلومة في x, $p(x) \neq 0$

يمكن حل هذه المعادلة إذا علم أي حل خاص $y = y_1$

باستخدام التعويض $y = y_1 + \frac{1}{z}$ حيث z متغير تابع جديد تتحول معادلة ريكاتي إلى المعادلة الخطية الآتية

$$\frac{dz}{dx} + (2py_1q)z + p = 0$$

١٠/١/٢- تمارين

١- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2y' = (x-1)(y^2 - x')+2xy$$

علماً بأن $y = x$ يمثل حلاً للمعادلة

٢-أوجد حل المعادله التفاضليه

$$\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$$

٣- أوجد حل المعادله التفاضليه الآتيه

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = 3x^{2e^{-x}}$$

٤- أوجد حل المعادلة التفاضليه

$$\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x + y^3 = 0$$

٥- أوجد حل المعادلة التفاضليه

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^2 linx$$

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

Differential Equations from First Order and Higher Degrees

لقد بينا في الفصل الثاني أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي يمكن كتابتها في الصورة:

$$f\left(x,y,y'\right)=0$$

ومن المعتاد في مثل هذا النوع من المعادلات أن نرمز للمشتقة الأولي y' بالرمز P، فحل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة النونية سوف نقدمها في هذا الباب وفي كل حالة سنعود لحل معادلة أو عدة معادلات من الرتبة الأولى أو الدرجة الأولى.

١/٣-معادلات قابلة للحل في P:

نعتبر أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة n يمكن كتابتها في الصورة

$$A_n\left(x,y\right)y^{(n)}+A_{n-1}\left(x,y\right)y^{(n-1)}+...+A_0\left(x,y\right)=0 \qquad (1)$$

وإذا اعتبرنا أن الطرف الأيسر من هذه المعادلة على أنه كثيرة حدود في P من الدرجة n فإذا أمكن حلها بالنسبة إلى P فإن

$$A_n\left(P-\varphi_1\right)\left(P-\varphi_2\right)...\left(P-\varphi_n\right)=0,\quad P=\frac{dy}{dx}$$

حيث $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n$ دوال للمتغيرين x,y

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\varphi_1\left(x,y\right),\frac{dy}{dx}=\varphi_2\left(x,y\right),...,\frac{dy}{dx}=\varphi_n\left(x,y\right)$$

وهذه معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى قد يمكن حلها بإحدى الطرق السابق ذكرها في الباب الثاني نفرض أن حلول هذه المعادلات على الصورة

$$f_1\left(x,y,c\right)=0, f_2\left(x,y,c\right)=0,..., f_n\left(x,y,c\right)=0$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$f_1\left(x,y,c\right).f_2\left(x,y,c\right)...f_n\left(x,y,c\right)=0$$

وهو يحتوي على ثابت اختياري واحد لأن المعادلة من الرتبة الأولى.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2P^2+3xyP+2y^2=0, \quad P=y'$$

الحل:

بالتحليل نجد أن

$$(xP+y)(xP+2y)=0$$

$$\therefore xP+y=0 \qquad or \quad xP+2y=0$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad or \quad x\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$\therefore \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0 \qquad or \quad 2\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\therefore \ln x+\ln y=\ln c \qquad or \quad 2\ln|x|+\ln|y|=\ln c$$

$$xy=c \qquad or \quad x^2y=c, \quad c>0$$

$\because$ الحل المطلوب يكون في الصورة

$$(xy-c)(x^2y-c)=0$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0$$

الحل:

بوضع $y'=P$

إذن $P^2-2xP+x^2-y^2=0$

بالتحليل يكون

$$\left[P-(x+y)\right]\left[P+y-x\right]=0$$
$$\therefore P-x-y=0 \quad or \quad P+y-x=0$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}-y=x \quad or \quad \frac{dy}{dx}+y=x$$
$$\therefore \mu_1=e^{-x}, \qquad \mu_2=e^{x}$$
$$ye^{-x}=\int xe^{-x}dx+c, \quad ye^{x}=\int xe^{x}+c$$
$$\therefore y-ce^{x}+x+1=0 \quad or \quad y-ce^{-x}-x+1=0$$

∴ الحل العام هو

$$\left(y-ce^{x}+x+1\right)\left(y-ce^{-x}-x+1\right)=0$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$P^2+2P\cosh x+1=0$$

الحل:

$$P=\frac{-2\cosh x\pm\sqrt{4\cosh^2 x-4}}{2}=\frac{-2\cosh x\pm 2\sqrt{\cosh^2 x-1}}{2}$$
$$=\cosh x\pm\sinh x$$
$$\therefore P=\frac{dy}{dx}=\cosh x+\sinh x=e^{x} \quad or \quad P=\cosh x+\sinh x=e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x} \;\therefore \int dy=\int e^{x}dx \;\therefore y=e^{x}+c$$
$$\frac{dy}{dx}=e^{-x} \;\therefore \int dy=\int e^{-x}dx \;\therefore y=e^{-x}+c$$

∴ الحل العام هو

$$\left(y-e^{x}-c\right)\left(y+e^{-x}-c\right)=0$$

حيث c ثابت اختياري.

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y')^2 - 2y'\sinh x - 1 = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$P^2 - 2P\, sinh\, x - 1 = 0$$

$$\because \; sinh\, x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\therefore \; P^2 - P\left(e^{x} - e^{-x}\right) - 1 = 0 \qquad \therefore \left(P - e^{x}\right)\left(P - e^{-x}\right) = 0$$

$$\therefore P = e^{x} \quad or \quad P = -e^{-x}$$

$$\because P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y = e^{x} + c, \quad y = e^{-x} + c$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\therefore \left(y - e^{x} + c\right)\left(y - e^{-x} + c\right) = 0$$

لاحظ أننا استخدمنا ثابت اختياري واحد، نظراً لأن المعادلة المعطاة من الرتبة الأولى.

مثال (٥): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^2 - (x+y)y' + xy = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$P^2 - (x + y)P + x\,y = 0$$

$$\therefore (P - x)(P - y) = 0$$

$$\therefore P = x \quad or \quad P = y$$

$$\because P = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + c_1, \quad y = c_1 e^x$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$\left(y - \frac{1}{2}x^2 + c\right)(y - ce^x) = 0, \quad c = -c_1$$

لاحظ أن كلا الحلين يحقق المعادلة الأصلية.

٢/٣- معادلات قابلة للحل في y:

في هذه الحالة تأخذ المعادلة التفاضلية الصورة

$$y = f(x, P) \quad P = \frac{dy}{dx} \tag{2}$$

وبالتفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = P = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial P}\frac{dP}{dx}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والدرجة الأولى في $x, P, \frac{dP}{dx}$.

بفرض أن حلها العام هو

$$P = \varphi(x, c) \quad or \quad x = \psi(P, c) \tag{3}$$

بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) نحصل على

$$y = f(x, \varphi(x, c))$$

وهذا يعتبر الحل العام للمعادلة (2)، أما إذا لم يمكن حذف P بين المعادلتين (2)، (3) فإنه يمكن التعبير عن x , y بدلالة P وتكون المعادلتين

$$x = \varphi(P,c), \quad y = f\left(\varphi(P,c),P\right)$$

هما المعادلات البارامترية للحل العام.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = P + P^3$$

الحل:

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$\frac{dy}{dx} = P = \frac{dP}{dx} + 3P^2 \frac{dP}{dx}$$

$$\therefore P = \left(1+3P^2\right)\frac{dP}{dx}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dx = \int \frac{1+3P^2}{P} dP + c$$

$$\therefore x = \ln P + \frac{3}{2}P^2 + c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو المعادلتان البارامتريتان

$$x = \ln P + \frac{3}{2}P^2 + c \qquad y = P + P^3$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$P^2 - yP + x = 0$$

الحل:

هذه المعادلة قابلة للحل في y لأنه يمكن كتابتها في الصورة

$$y = P + \frac{x}{P}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$P = \frac{dP}{dx} + \frac{1}{P} - \frac{x}{P^2}\frac{dP}{dx} \Rightarrow P - \frac{1}{P} = \left(1 - \frac{x}{P^2}\right)\frac{dP}{dx}$$

$$\therefore \frac{P^2 - 1}{P} = \left(1 - \frac{x}{P^2}\right)\frac{dP}{dx} \Rightarrow \left(\frac{P^2 - 1}{P}\right)\frac{dx}{dP} = 1 - \frac{x}{P^2}$$

$$or \quad \frac{dx}{dP} + \frac{x}{P\left(P^2 - 1\right)} = \frac{P}{P^2 - 1}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية معاملها المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{P\left(P^2 - 1\right)} dP} = e^{\int \left[\frac{1/2}{P - 1} + \frac{\frac{1}{2}}{P + 1} - \frac{1}{P}\right] dP}$$

باستخدام الكسور الجزئية لايجاد $\int \frac{1}{P\left(P^2 - 1\right)} dP$ نحصل على

$$\mu = e^{\ln\sqrt{P - 1} + \ln\sqrt{(P + 1)} - \ln P} = \frac{\sqrt{P^2 - 1}}{P}$$

وحلها العام هو:

$$\frac{\sqrt{P^2 - 1}}{P} x = \int \frac{dP}{\sqrt{P^2 - 1}} + c$$

$$\frac{\sqrt{P^2 - 1}}{P} x = \cosh^{-1} P + c \;\therefore x = \frac{P}{\sqrt{P^2 - 1}}\left[\cosh^{-1} P + c\right] \tag{1}$$

$$\therefore y = P + \frac{x}{P} = P + \frac{1}{\sqrt{P^2 - 1}}\left(\cosh^{-1} P + c\right) \tag{2}$$

المعادلتان (1)، (2) هي الحل البارامتري للمعادلة التفاضلية.

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^2-2xy'+y=0$$

الحل:

بوضع $y'=P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y=2xP-P^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=P=2x\frac{dP}{dx}+2P-2P\frac{dP}{dx}$$

وهذه المعادلة تؤول إلى الصورة

$$\frac{dP}{dx}=\frac{P}{2(p-x)}$$

واضح أن هذه المعادلة ليست خطية في P ولكن إذا وضعناها على الصورة

$$\frac{dx}{dP}+\frac{2}{P}x=2$$

نجد أنها معادلة خطية في x وعامل المكاملة لها هو

$$\mu=e^{\int\frac{2}{P}dP}=e^{2\ln P}=P^2$$

ويكون حلها العام هو

$$P^2x=\int 2P^2dP+c=\frac{2}{3}P^3+c$$

$$\therefore x=\frac{2}{3}P+\frac{c}{P^2} \qquad (2)$$

بالتعويض عن x من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على

$$y=\frac{1}{3}P^2+\frac{2c}{P} \qquad (3)$$

بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) نحصل على حل المعادلة المعطاة على الصورة

$$y = F(x)$$

مثال (٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y = y'^5 + y'^3 + y' + 5$$

الحل:

بوضع $y' = P$ ، تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y = P^5 + P^3 + P + 5 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = \left(5P^4 + 3P^2 + 1\right)\frac{dP}{dx} \qquad (2)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$x = \frac{5}{4}P^4 + \frac{3}{2}P^2 + \ln P + c \qquad (3)$$

بحذف P بين المعادلتين (3) ,(1) نحصل على الحل العام للمعادلة في الصورة

$$y = F(x).$$

٣/٣-معادلات قابلة للحل في x:

إذا أمكن وضع المعادلة التفاضلية بحيث نحصل على x بدلالة y، P أي يمكن وضعها على الصورة

$$x = F(y, P), \qquad P = \frac{dy}{dx} \qquad (1)$$

وبإجراء التفاضل بالنسبة الى y بدلالة P

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial P}\frac{dP}{\partial y}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبحلها y بدلالة P.

$$y=\psi\left(P,c\right) \qquad (2)$$

وبالتعويض عن y في (2) نحصل على x بدلالة P في الصورة

$$x=F\left(\psi\left(P,c\right),P\right) \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة (1) ينتج بحذف P بين المعادلتين (2)، (3) قد يتعذر حذف P بين المعادلتين (2)، (3) للحصول على الحل العام فنكتفي بالمعادلتين (2)، (3) كمعادلتين باراميتريتين للحل العام.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x=4P+4P^{3},\quad P=y'$$

الحل:

هذه المعادلة قابلة للحل في x بالتفاضل بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{P}=\left(4+12P^{2}\right)\frac{dP}{dy}$$
$$\therefore dy=\left(4P+12P^{3}\right)dP$$
$$\therefore \int dy=\int\left(4P+12P^{3}\right)dP$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore y=2P^{2}+3P^{4}+c\\ x=4P+4P^{3}\end{array}\right\}$$

تسميان (المعادلتان البارامتريتان)

هاتان المعادلتان هما التمثيل البارامترى للحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y\,y'^{2}-2x\,y'+y=0$$

الحلـ:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$y P^2 - 2x P + y = 0$$

$$\therefore x = \frac{y}{2P}\left(P^2 + 1\right) = \frac{1}{2} y \left(P + \frac{1}{P}\right) \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{P} = \frac{1}{2} y \left(1 - \frac{1}{P^2}\right)\frac{dP}{dy} + \frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{P}\right)$$

$$\therefore \frac{y}{P}\frac{dp}{dy} = -1$$

بفصل المتغيرات والتكامل ينتج أن

$$y = \frac{c}{P} \qquad (2)$$

بحذف P بين المعادلتين (2) , (1) ينتج أن

$$y^2 = c\left(2x - c\right)$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة المعطاة.

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'^3 - y' = x + 1$$

الحلـ:

بوضع $y' = P$ تتحول المعادلة إلى الصورة

$$x = P^3 - P - 1 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{1}{P} = \left(3P^2 - 1\right)\frac{dP}{dy}$$

$$\therefore y = \int \left(3P^3 - P\right) dP + c$$

أي أن

$$y = \frac{3}{4}P^4 - \frac{1}{2}P^2 + c \qquad (2)$$

بحذف p بين المعادلتين (2) , (1) نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة في الصورة

$y = f(x)$.

٤/٣- معادلة دالمبرت (D'Alembert equation)

تعتبر معادلة دالمبرت حالة خاصة من معادلة دالبرت

$$y = xg(P) + f(P), \quad g(P) \neq P \qquad (7)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$P = g(P) + \left[xg'(P) + f'(P)\right]\frac{dP}{dx}$$

بـالـقـســـمـة عـلـى $\frac{dP}{dx} \neq 0$ نجد أن:

$$\left[g(P) - P\right]\frac{dx}{dP} + g'(P)x + f'(P) = 0$$

أو

$$\frac{dx}{dP} + \frac{g'(P)}{g(P) - P}x = -\frac{f'(P)}{g(P) - P} \qquad (8)$$

هذه معادلة تفاضــلية خطية يمكن حلها بالطرق الســابق ذكرها في الباب الثاني حيث μ عامل مكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{g'(V)}{g(P) - P}dP}$$

ويكون الحل العام للمعادلة (8) هو

$$\mu x = -\int \frac{f\,'(P)}{g(P)-P}\,\mu dP + c$$

أي أنه يمكن إيجاد x في الصورة $x=\Psi(P,c)$

وبالتعويض في معادلة البرت نحصل على

$$y=\psi(P,c)\,g(P)+f(P)$$

وبذلك نكون قد حصلنا على $x\,,\,y$ كدوال في البارامتر P وهما يمثلان المعادلات البارامترية لمعادلة البرت، وإذا أمكن حذف P بين هاتين المعادلتين يمكن ان نحصل على الحل العام في الصورة $\varphi(x,y,c)=0$.

مثال (١): اوجد الحل العام لمعادلة دالبرت:

$$y=2xP+P^2$$

الحلـ:

بالتفاضل بالنسبة إلى x يكون

$$P=2P+2(x+P)\frac{dP}{dx}$$

$$\therefore \frac{dx}{dP}+\frac{2x}{P}=-2$$

لحل هذه المعادلة الخطية نوجد العامل المكامل

$$\mu=e^{\int\frac{2}{p}dP}=e^{2\ln P}=P^2$$

ويكون

$$xP^2=-2\int P^2dP+c$$

$$x=\frac{c}{P^2}-\frac{2}{3}P$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاه نجد أن

$$y = \frac{2c}{P} - \frac{P^2}{3}$$

وبذلك نكون قد عبرنا عن x , y كدالتين فى البرامتر P والثابت الاختياري، أى حصلنا على الحل العام فى صورته البارامترية.

مثال (٢): اوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة

$$3y = 2Px - 2\frac{P^2}{x}, \quad P = y'$$

الحل:

هذه المعادلة قابلة للحل في y بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$3P = 2P + \frac{2P^2}{x^2} + \left(2x - \frac{4P}{x}\right)\frac{dP}{dx}.$$

أو

$$P-\frac{2P^2}{x^2}-\left(2x-\frac{4P}{x}\right)\frac{dP}{dx}=0$$

$$Px^2-2P^2-\left(2x^3-4Px\right)\frac{dP}{dx}=0$$

$$x^2\left(P-2x\frac{dP}{dx}\right)-2P\left(P-2x\frac{dP}{dx}\right)=0$$

$$\therefore\left(x^2-2P\right)\left(P-2x\frac{dP}{dx}\right)=0$$

$$P-2x\frac{dP}{dx}=0 \qquad or \qquad x^2-2P=0$$

$$\frac{dx}{x}=2\frac{dP}{p} \qquad or \qquad x^2=2P$$

$$\therefore \ln|x|=2\ln|P|+\ln c \Rightarrow x=cP^2, \qquad c>0$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $P=\sqrt{\frac{x}{c}}$ ينتج أن

$$3y=2x\sqrt{\frac{x}{c}}-\frac{2}{c}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية وللحصول على الحل الشاذ بحذف P بين المعادلة التفاضلية والمعادلة $x^2=2P$ فنحصل على

$$3y=x^3-2\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x^3$$

وهو يمثل الحل الشاذ.

٣/٥- المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى ودرجة عليا:

سوف ندرس في هذا الباب طرق حل بعض المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى ومن درجة أعلى، وكذلك طرق حل بعض معادلات الرتبة الثانية والتي يمكن أن تؤول إلي معادلات ذات الرتبة الأولى.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية غير الخطية ذات الرتبة الأولى هي $F\ (x\ ,\ y\ ,\ y') = 0$ وسوف نرمز للمشتقة $y' = \dfrac{dy}{dx}$ بالرمز P وبالتالي فإن المعادلة السابقة تكتب على الصورة

$$F\ (\,x\ ,y\ ,p\,) = 0 \qquad (1)$$

وتعتمد طريقة حل هذه المعادلة على إمكانية حلها بالنسبة لأحد المتغيرات x أو y أو المشتقة P.

٣/٥/١- معادلة كليروت: (Clairout's equation)

هي معادلة غير خطية من الرتبة الأولى على الصورة

$$y = xy' + f\ (y') \qquad (1)$$

حيث $f\,(\,y'\,)$ دالة معلومة في المتغير y'

لإيجاد حل المعادلة (1) نفاضل طرفيها بالنسبة إلى x فنحصل على

$$y' = x\,y' + y' + f'(\,y'\,)\,y''$$

$$\therefore\ \left[\,x + f'(\,y'\,)\,\right] y'' = 0 \qquad (2)$$

المعادلة (2) تتحقق عندما $y'' = 0$ ، أو عندما $x + f'(y') = 0$.

عندما $y'' = 0$ فإن $y' = c$ ، حيث c ثابت اختياري، وبالتعويض بهذا الحل في المعادلة (1) نحصل على الحل العام لمعادلة كليرو على الصورة

$$y = cx + f(c) \qquad (3)$$

وعندما $x + f'(y') = 0$ فإنها تعطي حلاً مفرداً يتوقف على شكل الدالة f'،

ويمكن التعبير عنه في الصورة البارامترية باستبدال y' بالبارامتر P في هذه العلاقة، وفي المعادلة (1) في ذات الوقت، لنحصل على

$$x = -f'(P), \quad y = -Pf'(P) + f(P) \qquad (4)$$

المعادلة البارامترية (4) هي حل مفرد للمعادلة (1).

مثال (١): اوجد الحل العام والحل الشاذ للمعادلة التفاضلية:

$$(y - xy')\sqrt{1 + y'^2} = ay'$$

حيث a مقدار ثابت.

الحل:

المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} \qquad (1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة (1) هو

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} = cx + k, \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختياري، $k = \dfrac{ac}{\sqrt{1 + c^2}}$.

للحصول على الحل المفرد، نعلم أن المعادلة (1) هي معادلة كليرو، حيث

$$f(y') = \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \qquad f'(y') = \frac{a}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

وتكون المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد هما (بوضع $y' = P$):

$$x=-f'(P)=\frac{-a}{\left(1+P^{2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y=-Pf'(P)+f(P)=\frac{aP^{3}}{\left(1+P^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

بحذف P بين المعادلتان السابقتان ، نحصل على الحل المتفرد على الصورة

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

مثال (٢): اوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلة التفاضلية:

$$y=xy'-y'^{2} \qquad (1)$$

الحل:

الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y=cx-c^{2}=c(x-c), \qquad (2)$$

حيث c ثابت اختياري.

للحصول على الحل المفرد لمعادلة كليرو (المعادلة المعطاة)، حيث أن

$$f(y')=-y'^{2} \qquad \therefore \qquad f'(y')=-2y'$$

وتكون المعادلتان البارامتريتان للحل المفرد هما (بوضع $y'=p$):

$$x=-f'(P)=2P,$$

$$y=-Pf'(P)+f(P)=2P^{2}-P^{2}=P^{2}.$$

بحذف P بين المعادلتين السابقتين ، نحصل على الحل المفرد على الصورة

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2}$$

لاحظ أن الحل المفرد يحقق المعادلة المعطاة ولا يمكن الحصـــول عليه من الحل العام الذي حصلنا عليه (معادلة (2)).

مثال (٣): اوجد الحل العام والمفرد للمعادلة التفاضلية:

$$y=xP+\frac{a}{P}$$

الحلـ:

بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن

$$P=P+\left(x-\frac{a}{P^{2}}\right)\frac{dP}{dx}$$

أولا: $\frac{dP}{dx}=0$ أو $P=c$ تعطي الحل العام $y=cx+\frac{a}{c}$

ثانيا: $x=\frac{a}{p^{2}}$ ومنها $y=\frac{a}{P^{2}}\cdot P+\frac{a}{P}=\frac{2a}{P}$

وبحذف P نحصـــل على $y^{2}=4ax$ وهذا هو الحل الشـــاذ (المفرد) ويمثل قطع مكافئ "كغلاف الخطوط"

$$y=cx+\frac{a}{c}$$

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y=xP-\sin P,\qquad P=y'$$

الحلـ:

بالتفاضل

$$P=P+\left(x-\cos P\right)\frac{dP}{dx}$$

أو

$$\left(x-\cos P\right)\frac{dP}{dx}=0$$

$\frac{dP}{dx}=0$ منها $P=c$ ويكون الحل العام هو

$$y=cx-\sin c$$
$$x=\cos P \therefore P=\cos^{-1}x$$
$$\therefore \frac{dy}{dx}=\cos^{-1}x$$
$$\therefore \int dy=\int \cos^{-1}x\,dx$$

باجراء التكامل بالتجزيء نحصل على الحل المفرد في الصورة

$$y=x\cos^{-1}x-\sin\left(\cos^{-1}x\right)$$

٢/٥/٣- معادلة لاجرانج:

المعادلة التي على الصورة $y=x\,f\left(y'\right)+g\left(y'\right)$

حيث $f\,,g$ دالتان معلومتان في y'، تسمى معادلة لاجرانج، نسبة للعالم الفرنسي لاجرانج $(1736-1813)$، وهي معادلة خطية في كل من $x\,,\,y$.

لاحظ أن معادلة كليرو حالة خاصة من معادلة لاجرانج وذلك عندما $f\left(y'\right)=y'$.

وطريقة حل معادلة لاجرانج هي ذاتها طريقة حل معادلة كليرو وذلك باستبدال y' بالبارامتر P، فتأخذ معادلة لاجرانج الصورة

$$y=x\,f\,(P)+g\,(P) \tag{1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=P=f\,(P)+\left[x\,f'(P)+g'(P)\right]\frac{dP}{dx}$$

$$or \quad P-f(P)=\left[xf'(P)+g'(P)\right]\frac{dP}{dx} \qquad (2)$$

من المعادلة (2) يمكن الحصـــول مباشـــرة على حلول معينة، وذلك لأنها تتحول إلى متطابقة لأي قيمة ثابتة $P=P_0$، تحقق الشـرط $P_0-f(P_0)=0$، ودائماً عند أي قيمة ثابتة P_0 يكون $\frac{dP}{dx}=0$ وينعدم الطرف الأيمن للمعادلة (2)

وبالتالي عندما يتحقق الطرف الأيسر فإن الطرف الأيمن يكون متحقق تلقائياً.

الحل المناظر لكل قيمة $P=P_0$ (أي $\frac{dy}{dx}=P_0$) هو دالة خطية في x ، نظراً

لكون المشتقة تكون ثابتة في حالة الدوال الخطية فقط.

لإيجاد هذه الدالة يكفي أن نضع $P=P_0$ في معادلة لاجرانج فينتج أن

$$y=xf(P_0)+g(P_0)$$

وإذا اتضح أن هذا الحل لا ينتج من الحل العام لأي قيمة للثابت الاختياري P_0، كان هذا الحل هو الحل المفرد.

إيجاد الحل العام:

لإيجاد الحل العام نكتب المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dx}{dP}-\frac{f'(P)}{P-f(P)}x=\frac{g'(P)}{P-f(P)}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x وبحلها نحصل على

$$x=h(P,c) \qquad (3)$$

وبحذف البارامتر P بين المعادلتين $(1),(3)$ نحصل على الحل العام لمعادلة لاجرانج على الصورة

$$F(x,y,c)=0$$

مثال: اوجد الحل المفرد والحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y = x y'^2 + y'^2$$

الحل:

بوضع $y' = P$ ينتج أن

$$y = x P^2 + P^2 \qquad (1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = P = P^2 + [2x P + 2P] \frac{dP}{dx}$$

أي أن

$$P - P^2 = [2x P + 2P] \frac{dP}{dx} \qquad (2)$$

والحل المفرد الذي يحقق العلاقة $P - P^2 = 0$ هو

$$P_0 = 0 \quad or \quad P_1 = 1$$

وبالتعويض بهما في المعادلة (1) نحصل علي

$$y = 0 \quad or \quad y = x + 1$$

وعندما نحصل على الحل العام سوف يتبين لنا أيهما حل مفرد.

لإيجاد الحل العام نكتب المعادلة (2) على الصورة

$$\frac{dx}{dP} - \left(\frac{2}{1-P}\right) x = \frac{2}{1-P}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x، عامل المكاملة لها هو

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{1-P} dP} = e^{2\ln(1-P)}$$

$$\therefore \mu = (1-P)^2$$

وحلها العام هو

$$\left(1-P\right)^{2}x = 2\int\left(1-P\right)dP + c_1$$

$$= -\left(1-P\right)^{2} + c_1$$

$$\therefore x = -1 + \frac{c_1}{\left(1-P\right)^{2}} \qquad (3)$$

بحذف P بين المعادلتين (3), (1) نحصل على الحل العام، على الصورة

$$y = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^{2}$$

لذلك فإن الحل المفرد للمعادلة المعطاة هو $y = 0$ نظراً لأن هذا الحل لا يمكن الحصـــول عليه من الحل العام بوضـــع قيمة للثابت c، في حين أن الحل $y = x + 1$ حل خاص، حيث يمكن الحصول عليه من الحل العام بوضع $c = 0$ ، حيث c ثابت اختياري.

٣/٥/٣- معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية تؤول إلى معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى:

هناك نوعان من معادلات الرتبة الثانية والتي تؤول إلى معادلات من الرتبة الأولى، هما:

أ – معادلات خالية من y

هي المعادلات التي على الصورة

$$y'' = f\left(x, y'\right) \qquad (1)$$

بوضع $y' = P$ فإن $y'' = \dfrac{dP}{dx}$ وبالتالي فإن المعادلة (1) تصبح

$$\frac{dP}{dx} = f\left(x, P\right)$$

وهذه المعادلة من الرتبة الأولى في P وحلها يكون على الصورة

$$P = g\left(x, c_1\right)$$

وحيث أن $P=\frac{dy}{dx}$ فبالتكامل مرة أخرى نحصل على الحل العام للمعادلة (١) على الصورة

$$y=\int g\left(x\ ,c_1\right)d\ x\ +c_2$$

مثال: اوجد الحل العام لمنحنى الكتينة:

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+\ y'^{\ 2}}\ \text{التي تحقق}\ \ y\,(a)=a,\quad y\,'(a)=0$$

الحل:

بوضع $y'=P$ فإن $y''=\frac{dP}{dx}$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة من الرتبة الأولى في P، على الصورة

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+P^2}$$

و بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\sinh^{-1}P=\frac{x}{a}+c_1$$

$$\therefore P=\sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$$

وحيث أن $P=\frac{dy}{dx}$، لذلك فإن

$$\frac{dy}{dx}=\sinh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)$$

$$\therefore y=a\cosh\left(\frac{x}{a}+c_1\right)+c_2$$

و من شروط منحنى الكتينة أن

$$y=a,\qquad y'=0\quad at\quad x=a$$

وباســتخدام هذه الشــروط نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ وفي هذه الحالة فإن معادلة الكتينة تصبح على الصورة

$$y = a \cosh \frac{x}{a}.$$

ب– معادلات خالية من x:

هي المعادلات التي على الصورة

$$y'' = f(y, y') \tag{1}$$

وهي لا تحتوي على المتغير x صراحةً.

لحل المعادلة (1) نضع $\frac{dy}{dx} = P$ وبالتالي فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}.\frac{dy}{dx} = P \frac{dP}{dy} \tag{2}$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نجد أن

$$P \frac{dP}{dy} = f(y, P)$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على P كدالة في y وثابت اختياري (c_1)

$$\therefore P = h(y, c_1) \quad \text{or} \quad \frac{dy}{dx} = h(y, c_1)$$

بفصل المتغيرات والتكامل، نجد أن

$$x = \int \frac{dy}{h(y, c_1)} + c_2$$

بالحصول على التكامل نكون قد حصلنا على الحل العام للمعادلة (1) على الصورة

$$F(x, y, c_1, c_2) = 0.$$

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y = 0$$

الحل:

بوضع $y' = P$ فإن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}.\frac{dy}{dx} = P\,\frac{dP}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن

$$P\frac{dP}{dy} + y = 0$$

بفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$P^2 + y^2 = c_2{}^2, \quad c_2 = 2c_1$$

$$\therefore P = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_2{}^2 - y^2}$$

بفصل المتغيرات وبالتكامل نحصل على

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{c_2}\right) = \pm\left(x + c_3\right)$$

$$\therefore y = \pm\, c_2 \sin\left(x + c_3\right)$$

وذلك نظراً لأن دالة الجيب دالة فردية.

٣/٦- تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى:

٣/٦/١- إيجاد معادلة مجموعة من المنحنيات:

١) المعادلة التفاضــلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى $y'=f(x,y)$ هي علاقة بين ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة واقعة على المنحنى وإحدى موضــع هذه النقطة بحل هذه المعادلة نحصــل على معادلة مجموعة المنحنيات والتي تحقق المعادلة التفاضلية وفيما يلي بعض العلاقات التي تشمل المشتقة الأولي

أ- ميل المماس عند أي نقطة (x,y) هو $\frac{dy}{dx}$ وميل العمودي هو $-\frac{dx}{dy}$

ب- معادلة المماس عند القطة (x_1,y_1) هي

$$y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$$

(ج) طول تحت المماس $y\frac{dx}{dy}$ وطول تحت العمودي $y\frac{dy}{dx}$

(د) طول العمودي إلى محور السينات هو $y\sqrt{1+y'^2}$.

مثال (١): اوجد معادلة المنحني الذي له طول تحت المماس عند أي نقطة (x,y) يكون متناسبا مع مربع الجزء المقطوع من محور السينات ويمر بالنقطة $(1,e)$.

الحل:

المعادلة التفاضلية هي

(حيث k ثابت التناسب)
$$y\frac{dx}{dy}=kx^2$$

$$\therefore \frac{dx}{x^2}=k\frac{dy}{y}\Rightarrow k\ln y=\frac{-1}{x}+c$$

عندما يكون $x=1$ $y=e,$ نجد أن $c=k+1$

ويكون المنحني المطلوب هو

$$k \ln y = \frac{-1}{x} + k + 1$$

مثال (٢): اوجد المعادلة العامة لمجموعة المنحنيات التي بها طول تحت العمودي عند أي نقطة عليها يساوي $\frac{1}{2}(x+y)$.

الحل:

المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات هي

$$y\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x+y)$$

أو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)}{2y}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة لحلها نضع $y = xz$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = z + x\,\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{2z}$$

$$x\,\frac{dz}{dx} = \frac{1+z}{2z} - z = \frac{1+z-2z^2}{2z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2z\,dz}{1+z-2z^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{2z\,dz}{(2z+1)(z-1)} = c$$

$$\therefore \frac{dx}{x} + \frac{2/3}{2z+1}dz + \frac{2/3}{z-1}dz = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{3}\ln|2z+1| + \frac{2}{3}\ln|z-1| = \ln c, \qquad c > 0$$

$$x^3(2z+1)(z-1)^2 = a \qquad or$$

$$x^3\left(\frac{2y}{x}+1\right)\left(\frac{y}{x}-1\right)^2 = a \qquad or$$

معادلة مجموع المنحنيات هي

$$(2y+x)(y-x)^2 = a$$

٢/٦/٣- المسارات المتعامدة:

يقال للمجموعتين من المنحنيات إنهما يكونان مجموعتين من المسارات المتعامدة إذا كانت المنحنيات تتقاطع على التعامد. المنحنيات المتعامدة تكون مماساتها عند نقطة التقاطع متعامدة. ولإيجاد معادلة المسارات المتعامدة على مجموعة من المنحنيات التي تمثلها المعادلة $f\left(x,y,c\right)=0$ ، حيث c بارامتر. وبالتفاضل بحذف البارامتر c نحصل على المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعلومة في الصورة

$$\varphi\left(x,y,y'\right)=0$$

وحيث أن المماسات للمنحنيات المعلومة والمسارات المتعامدة تكون متعامدة عند نقطة تقاطعها أي أن

$$\varphi\left(x,y,\frac{-dx}{dy}\right)$$

هي المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات المعطاة

إذا للحصول على المسارات المتعامدة على مجموعة من المنحنيات المعلومة نكون أولا المعادلة التفاضلية لهذه المنحنيات ثم نضع $-\frac{dx}{dy}$ بدلالة $\frac{dy}{dx}$ فنحصل على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة وبحلها نحصل على معادلة المسارات المتعامدة

مثال (١): اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات:

$$y^2=cx$$

الحل:

بالتفاضل نحصل على

$$2yy'=c$$

إذاً المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات هى

$$y = 2xy' \qquad \text{أو} \qquad y^2 = \frac{2}{xyy'}$$

المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة نحصل عليها بوضع $-\frac{dx}{dy}$ بدلاً من y' فى المعادلة السابقة

$$\therefore y = -2x\frac{dx}{dy} \Rightarrow ydy + 2xdx = 0$$

وبذلك تكون المسارات المتعامدة هى

$$y^2 + 2x^2 = c$$

مثال (٢): اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر:

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

الحل:

بالتفاضل نجد أن

$$2x + 2yy' = 2c$$

بحذف c نحصل على المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر المعطاة

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

بوضع $-\frac{dx}{dy}$ بدلاً من y' نحصل على المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة وهي

$$\left(x^2 - y^2\right)y' - 2xy = 0$$

وهذه هـ معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نضع $y = xz$

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z = \frac{2z}{1-z^2}$$

أو

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{2z}{1-z^2}-z=\frac{z^3+z}{1-z^2}$$

بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z^2}{z^3+z}dz=\left(\frac{1}{z}-\frac{2z}{z^2+1}\right)dz$$

بالتكامل

$$\therefore \ln x=\ln z-\ln\left(z^2+1\right)+\ln c$$

$$\therefore \frac{x\left(z^2+1\right)}{z}=c\Rightarrow\frac{x^2}{y}\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=c$$

اذن الحل العام هو $y^2+x^2=cy$ وتمثل المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر المعطاة.

ملحوظة: إذا كانت المسارات مائلة بزاوية ثابتة α مع مجموعة المنحنيات فإن المعادلة التفاضلية لمجموعات المسارات التي تميل بزاوية معلومة نحصل عليها من المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات المعطاة وذلك بوضع

$$\frac{\frac{dy}{dx}-\tan\alpha}{\frac{dy}{dx}\tan\alpha+1}$$

بدلالة $\frac{dy}{dx}$ للمنحنيات المعطاة أي أن:

إذا كانت $F\left(\chi,y,y'\right)=0$ هي المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات المعطاة فإن المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات التي تميل بزاوية معلومة α هي

$$F\left(x,y,\frac{y'-\tan\alpha}{1+y'\tan\alpha}\right)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على المسارات المائلة (**Obliqne trajectories**).

مثال (٣): اوجد المسارات المائلة والتي تصنع زاوية ٤٥ درجة لمجموعة الدوائر المتحدة المركز

$$x^2 + y^2 = c$$

الحل:

المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر هي $x + yy' = 0$، وبوضع

$\dfrac{y' - \tan 45}{1 + y' \tan 45} = \dfrac{y' - 1}{1 + y'}$ بدلالة y' في المعادلة السابقة نحصل على

$$x + y\,\frac{y' - 1}{1 + y'} = 0 \Rightarrow (x + y)\,dy + (x - y)\,dx = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية لمجموعة المسارات التي تميل بزاوية ٤٥ مع مجموعة الدوائر المعطاة وهي معادلة تفاضلية متجانسة ولحلها نضع $y = xz$ فيكون

$$\left(z^2 + 1\right)dx + x\,(z + 1)\,dz = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{z + 1}{z^2 + 1}\,dz = 0$$

وبإجراء التكامل نحصل على

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln\left(z^2 + 1\right) + \tan^{-1} z = \ln A_1$$
$$\ln x^2\left(z^2 + 1\right) = \ln A - 2\tan^{-1} z$$

وتكون معادلة المسارات المائلة المطلوبة هي:

$$x^2 + y^2 = A e^{-2\tan^{-1}}\left(y / x\right)$$

٧/٣- تطبيقات طبيعية:

للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولي والدرجة الأولي عدة تطبيقات في المجالات الطبيعية وسوف نوضح ذلك بالأمثلة الآتية:

مثال (١): يتناسب معدل ازدياد عدد الجراثيم في مزرعة جرثومية مع عدد العناصر الموجودة بها وإذا كان العدد تضاعف بعد أربع ساعات فكم يصبح العدد بعد 12 ساعة؟

الحلـ:

نفرض أن عدد الجراثيم في اللحظة t هو x وعندما $t = 0$ عدد الجراثيم هو x_0 فتكون المعادلة التفاضلية هي

$$\frac{dx}{dt} = Kx \qquad \text{أو} \qquad \frac{dx}{x} = Kdt$$

حيث K ثابت التناسب

$$\therefore \ln x = kt + \ln c \quad or \quad x = ce^{kt}$$

وبفرض أن $x = x_0$ عندما $t = 0$ إذن $c = x_0$

ونحصل على

$$x = x_0 e^{kt}$$

عندما $t = 4$ يكون $x = 2x_0$ ، فبالتعويض في المعادلة السابقة

$$2x_0 = x_0 e^{4k} \;\therefore e^{4k} = 2$$

عندما $t = 12$ نحصل على

$$x = x_0 e^{12k} = x_0 \left(e^{4k}\right)^3 = 8x_0$$

أي أنه يوجد عدد من الجراثيم يساوي ثماني مرات عددها الإبتدائي.

مثال (٢): تحتوي دائرة كهربية مقاومتها R ومكثف سعته C متصلين على التوالي بمنبع قوته الدافعة الكهربية

$E = E_0 \sin wt$ حيث E_0, w, R, C ثوابت وتعطى الشحنة q للمكثف للمعادلة

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E$$

اوجد الشحنة q عند أي لحظة t إذا علم أن $q=0$ عندما $t=0$

الحل:

المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن كتابتها فى الصورة

$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{Rc}=\frac{Eo}{R}\sin wt$$

وهى معادلة تفاضلية خطية عاملها المكامل هو $\mu=e^{tiRc}$

وحلها العام هو

$$qe^{t/Rc}=A+\int\frac{Eo}{R}e^{t/Rc}\sin wt\,dt$$
$$=A+\frac{cEo\,e^{t/Rc}}{1+R^2c^2w^2}\left(\sin wt-Rcw\cos wt\right)$$

عندما $t=0$ يكون $q=0$ فإن

$$\therefore 0=A-\frac{c^2wEo}{1+R^2c^2w^2}$$
$$A=c^2wEo/\left(1R^2c^2w^2\right)$$

وتعطى الشحنة q في الصورة

$$q=\frac{cEo}{1+R^2c^2w^2}\left[Rcwe^{-t/Rc}+\sin wt-Rcw\cos wt\right]$$

مثال (٣): اذا ارتبطت شدة التيار الكهربائي I والقوة الدافعة الكهربية E فى دائرة بها مقاومة R وملف ذاتي L بالعلاقة

$$L\frac{di}{dt}+RI=E$$

اوجد شدة التيار I إذا كان L,R,E ثوابت وإذا علم أن $I=0$ عندما $t=0$

الحلـ:

المعادلة التفاضلية $\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$ معادلة تفاضلية خطية حلها العام هو

$$\mu I=\int \mu \frac{E}{L}dt+c$$

$$\therefore Ie^{\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}e^{Rt/L}+c \quad \therefore I=\frac{E}{R}+ce^{-Rt/L}$$

لتعيين c من الشرط الابتدائي عندما $t=0$ نجد أن $c=\frac{-E}{R}$ ويكون الحل الخاص المطلوب تعينه هو $I=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-Rt}{L}}\right)$

مثال (٤): تدلي زنبرك مهمل الوزن رأسيا يعلق بطرفة الحركتلة قدرها m كجم فإذا كانت معادلة حركتها هي

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kx$$

فاوجد السرعة v كدالة في الاستطالة الحادثة x للزنبرك علماً بأنه عندما يكون طول الزنبرك مساوياً طوله الأصلي تكون سرعة الكتلة هي V_0

الحلـ:

يمكن إعادة كتابة المعادلة التفاضلية في الصورة

$$m\frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt}=mg-kx \;\; or \;\; mv\frac{dv}{dx}=mg-kx$$

$$\therefore = mvdv=mgdx-kxdx$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2}=mgx-k\frac{x^2}{2}+c$$

وعندما $x=0$ فإن $v=v_0$

$$\therefore c = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\therefore mv^2 = 2gmx - kx^2 + mv_0^2$$

مثال (٥): ينص قانون نيوتن للتبريد على أن معدل تغيير درجة حرارة جسم تتناسب مع فرق درجة حرارة الجسم عن الأجسام المحيطة به فإذا انخفضت درجة حرارة جسم 80^oم إلى 60^o م في 20 دقيقة اوجد درجة الحرارة بعد 40 دقيقة إذا كانت درجة الحرارة الأجسام المحيطة هي 20^o م.

الحل:

نفرض أن x هي درجة حرارة الجسم بعد زمن t دقيقة

$$\therefore \frac{dx}{dt} \propto x - 20 \qquad or \qquad \frac{dx}{dt} = k\,(x-20)$$

بحل هذه المعادلة نجد أن

$$\frac{dx}{x-20} = kdt \quad \therefore \ln(x-20) = kt + \ln c$$

$$\therefore x = 20 + ce^{kt}$$

وحيث أن $x = 80$ عندما $t = 0$ فإن $c = 60$ وبذلك تكون

$$x = 20 + 60e^{kt}$$

أيضا $x = 60$ عندما $t = 20$ تعطى

$$60 = 20 + 60e^{20k} \quad \therefore e^{20k} = \frac{2}{3} \ or \ e^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/20}$$

$$\therefore x = 20 + 60e^{kt} = 20 + 60\left(e^k\right)^t = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^{t/20}$$

وعندما $t = 40$ فإن

$$x = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^2 .$$

٨/٣- تمارين:

(١) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) P^2 - (x+y)P + xy = 0, \qquad P = y'$$

$$(b) y = (2+P)x - P^2$$

$$(c) y = xP + \sqrt{4+P^2}$$

$$(d) xyP^2 + (x^2 + xy + y^2)P + x^2 + xy = 0$$

$$(e) e^{P-y} = P^2 - 1 \qquad (f) x = 2P + \ln P$$

$$(g) P^3 - 2xyP + 4y^2 = 0 \qquad (h) y'^2 = 9y^4$$

$$(i) P^2 - yP + x = 0 \qquad (j) P^2 + 2yP\cot x - y^2 = 0$$

(٢) اوجد الحل العام والحل الشاذ لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(a) xP^2 - 2yP + 4x = 0, \qquad P = y'$$

$$(b) y = x + aP - a\ln P,$$

$$(c) yP^2 - 2xP + y = 0 \qquad (d) y = x^2 + 2xP + \frac{1}{2}P^2$$

$$(e) y = \frac{x}{x+1}P + \frac{(x+1)e^{x}}{P} \qquad (f) xP^2 + 2xP - y = 0$$

حيث a ثابت اختياري

(٣) اوجد الحل العام للمعادلات الآتية:

$$(a) y'^3 - e^{2x}y' = 0 \qquad (b) y'^2 + 2yy'\cot x - y^2 = 0$$

$$(c) y'^3 - 2xy' + y = 0 \qquad (d) xyP^2 - (x^2 + y^2)P + xy = 0$$

(٤) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

$a)\ y'^3 - e^{2x} y' = 0 .$

$b)\ y'^2 + 2y\cot x\, y' - y^2 = 0 .$

$c)\ y'^2 - 2\cosh x\, y' - y^2 = 0 .$

$d)\ (y' - x)^2 = y' + x.$

$e)\ x - 4y' - 4y'^3 = 0 .$

$f)\ x - y + y'^3 = 0 .$

$g)\ y'^3 - (y+3)\, y' + x = 0 .$

$h)\ y - x y'^2 + y' = 0 .$

$i)\ y = 2xy' - y'^2 .$

(٥) اوجد الحل العام والحل المفرد للمعادلات التفاضلية الآتية:

$a)\ y = x^2 + 2xy' + \frac{1}{2} y'^2 .$

$b)\ y\left(1 + y'^2\right) = a$ $\quad$ a ثابت اختياري

$c)\ y'^2 + (x+a)\, y' - y = 0,$ $\quad$ a ثابت اختياري

$d)\ y = xy' + \sqrt{1 - y'^2} .$

$e)\ y = xy' - \frac{1}{y'^2} .$

$f)\ y = xy' - 2y'^2 .$

$g)\ y = -xy' + x^4 y'^2 .$

$h)\ xy'^2 - 2yy' + 4x = 0 .$

$i) y^2 y'^2 + 3x p - y = 0$.

(٦) حول المعادلات التفاضلية التالية (ذات الرتبة الثانية)، إلى معادلات من الرتبة الأولى، ثم اوجد الحل العام لكل منها.

$a)\ x y'' - y' = x^2 e^x$.

$b)\ y y'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

$c)\ y'' + y' \tan x = \sin 2x$.

$d)\ y''^2 + y'^2 = a^2$, a ثابت اختياري

$e)\ 3y'' = y^{-\frac{5}{3}}$

$f)\ y'' = \sin ax$ a ثابت اختياري

$g)\ y'' = a x^2$ a ثابت اختياري

(٧) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$(1)\left(4x + xy^2\right)dx + \left(y + xy^2\right)dy = 0$

$(2)\, y' \tan x = y$ $\qquad (3)\,\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

$(4)\, 3e^x \tan y dx + \left(1+e^x\right)\sec^2 y$

$(5)\, e^{x2-y3} + \frac{y^2}{x} y' = 0$ $\qquad (6)\, x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+y^2}dy = 0$

$(7)\left(x + y\right)dy + \left(x + y\right)dx = 0$

$(8)\left(x^2 + y^2\right)y' - 2xy = 0$

$(9)\left(2ye^{2y/x}+x\right)dy+\left(2x-y\right)dx=0$

$(10)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{y-x}$ $\qquad$ $(11)x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

$(12)2y^2dy=\left(x^3+y^3\right)dx$ $\qquad$ $(13)y'=\dfrac{x+y+3}{x-y-5}$

$(14)\left(2x-4y+5\right)dy+\left(x-2y+3\right)dx=0$

$(15)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+3y-3}{2x-y-3}$ $\qquad$ $(16)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$

(٨) اثبت أن المعادلات التفاضلية الآتية تامة ثم اوجد حلها العام:

$(1)y\cos x\,dx+\sin x\,dy$ $\qquad$ $(2)\left(xy^2-y\right)dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$

$(3)\left(1+\sin x\tan y\right)dx-\left(\cos x\sec^2 y\right)dy=0$

$(4)\left(y+e^y\right)dx+2e^{y/2}x\cosh\left(\dfrac{y}{2}\right)dy=0$

(٩) اثبت أن المعادلات التفاضلية الآتية غير تامة ثم اوجد المعامل المكامل لكل منها وحلها العام:

$(1)xy^2dx+\left(x^2y^2-1\right)dy=0$

$(2)\left(x-y^2\right)dx+2xydy=0$

$(3)xdy-\left(y-x^3e^x\right)dx=0$

$(4)\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$

$(5)dx+\cos y\left(\sin y-3x^2\cos y\right)dx=0$

(١٠) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية و اوجد الحل الخاص عند وجود الشروط الابتدائية:

$$(i)\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3, \qquad y(1)=0$$

$$(ii)\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3, \qquad y(1)=0$$

$$(iii)x^2y-\ x^3y'=y^4\cos x$$

$$(iv)xy'-4yx^2\sqrt{y} \qquad (v)y'+\frac{y}{x}=y^2\sin x$$

$$(vi)y'=\frac{y^2}{1-3xy} \qquad (vii)y'-\frac{y}{x}e^{x^2}y^2$$

(١١) حل المعادلة $y'=y^2-\frac{2}{x^2}$ علماً بأن $\frac{1}{x}$ حلاً خاصاً لها.

(١٢) اوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

$$(i)\sin x\cos y\,dy+\left(\cos x\sin+\cos xe^{\sin x}\right)dx=0$$

$$(ii)\left(y\cos(xy)+e^x\right)dx+\left(x\cos xy-2ye^{y^2}\right)dx=0$$

$$(iii)\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2+y^2}dx=0$$

$$(iv)y^2dx+(xy+1)dy=0$$

$$(v)\left(y-x^2y^3\right)dx+xdy=0$$

$$(vi)ydx-xdy+3x^2y^2e^xdx=0$$

$$(vii)\left(2x^3+y^3\right)dx-3xy^2dy=0$$

(١٣) اوجد المسارات المائلة التي تصنع زاوية ثابتة 45^o مع مجموعة القطاعات الزائدة

$$.x^2-y^2=a^2$$

(١٤) اثبت المسارات المائلة التي تصنع زاوية ثابتة α مع مجموعة المستقيمات $y=cx$ هي

$$\sqrt{x^2+y^2}=ce^{\frac{1}{m}\tan^{-1}(y/x)}, \quad m=\tan\alpha$$

(١٥) اوجد معادلة المنحنيات التي فيها طول تحت العمودي ثابت.

(١٦) اوجد مائل المنحنيات التي فيها طول تحت المماس ثابت.

(١٧) (أ) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $x^2+2y^2=c^2$

(ب) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة $xy=c$

(١٨) (أ) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة الدوائر

$$x^2+y^2=cy$$

(ب) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $y^2=cx^2$.

(١٩) بين أن المجموعة القطاعات الناقصة ذات البارامتر

$$\frac{x^2}{c}+y^2=\frac{a^2}{c-1}$$

تكون متعامدة فيما بينها.

(٢٠) كتلة المادة التي تلعب دورا في تفاعل كميائي هي x جرام عند أي خطة t بعد بدأ التفاعل فإذا كانت $\frac{dx}{dt}=-kx$.

حيث k ثابت وكانت $x=a$ عندما $t=0$ فاوجد x بدلالة t.

(٢١) إذا ارتبط الضغط أ والحجم δ لفاز بالمعادلة $pd\delta+\delta dp=0$ فاوجد معادلة الفاز.

(٢٢) إذا تضاعف عدد سكان مدينة ما في ٥٠ عاما ففي كم عاما يصبح عدد السكان ثلاث مرات العدد الأصلي إذا علم أن معدل زيادة السكان يتناسب مع عدد السكان.

(٢٣) اوجد المسارات المتعامدة على مجموعة المنحنيات $y=6x^2$.

(٢٤) تحتوي دائرة كهربائية مقاومة مقدارها ١٥ وبطارية قوتها الدافعة الكهربية $E=20e^{-3t}$ متصل على التوالي اوجد شدة التيار علما بأن $I=0$ عندما تغلق الدائرة.

(٢٥) يسـقط جسـم وزنة 4kg من السـكون عند الزمن $t = 0$ في وسـط مقاومته بالكيلو جرام تسـاوي مربع السـرعة الخطية مقدرة بالمتر/ ثانية. اوجد السـرعة عن أي زمن $t > 0$.

الفصل الرابـــع

المعـــــادلات التفاضليـــــة الخطيـــــة

ذات المعاملات الثابتة من الرتب العليا

Linear Differential Equqtions of Constant Coefficients and Higher Orders

مقدمة:

المعادلة التفاضــلية الخطية ذات المعاملات الثابتة من الرتبة n وهي معادلة تظهر فيها y ومشــتقاتها من الرتبة الأولى فقط وبدون حوا صــل ضــرب. والصــورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة هي

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x) \qquad (*)$$

حيـث $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابـت وإذا رمزنـا للعـامـل التفـاضــلي $\frac{d}{dx}$ أو الرمز D أو المؤثر التفاضلي ويمكن كتابة المعادلة (*) على الصورة

$$\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n\right] y = f(x)$$

أو باختصار

$$L(D) y = f(x)$$

حيث $L(D)$ كثيرة حدود من درجة n في المؤثر التفاضلي D.

الحل العام للمعادلة التفاضــلية هو علاقة تربط بين المتغيرات وتحتوي على عدد معين من الثوابت الاختيارية مساويا لرتبة المعادلة التفاضلية وهو يمثل مجموعة من المنحنيات.

١/٤- المعادلات التفاضلية الخطية:

فى هذا الجزء سوف نعتبر مجموعة من المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة التي يمكن كتابتها فى الصورة:

$$\left.\begin{array}{l} F_{11} y_1 + F_{12} y_2 + \dots + F_{1n} y_n = f_1, \\ F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + \dots + F_{2n} y_n = f_2, \\ . \\ . \\ . \\ F_{n1} y_1 + F_{n2} y_2 + \dots + F_{nn} y_n = f_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

حيث F_{ij} $(i,j=1,2,...,n)$ عبارة عن كثيرات حدود في المؤثر التفاضلي $D=\frac{d}{dx}$ ذوات معاملات ثابتة $(i=1,2,...,n)$ F_i هي دوال في المتغير x (المستقل)، $y_1, y_2,..., y_n$ هي المتغيرات التابعة

٤/١/١- طرق حل المعادلات التفاضلية الخطية:

توجد طريقتان لحل المعادلات التفاضلية الخطية هما:

(أ) طريقة الحذف **(ب) طريقة المحددات**

(أ) طريقة الحذف: اعتبر مجموعة من المعادلات التفاضلية عددها اثنان التى على الصورة

$$F_{11}y_1+F_{12}y_2=F_1 \qquad (2)$$
$$F_{21}y_1+F_{22}y_2=F_2 \qquad (3)$$

بالتأثير على المعادلة (2) بالمؤثر التفاضلي F_{21} والمعادلة (3) بالمؤثر التفاضلي F_{11} وطرح المعادلة (3) من المعادلة (2) نحصل على:

$$\left(F_{21}F_{12}-F_{11}F_{22}\right)y_2=F_{21}F_1-F_{22}F_2 \qquad (4)$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في المتغير x, y_2 يمكن حلها وبالتعويض عن قيمة y_2 في أي من المعادلتين (2) أو (3) نصل على معادلة تفاضلية في المتغير x, y_1 بحلها نوجد y_1

مثال (١): حل المعادلة التفاضلية:

$$(D-1)x+Dy=2t+1 \qquad (1)$$
$$(2D+1)x+2Dy=t \qquad (2)$$

الحل:

بضرب المعادلة (1) في 2 وطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نحصل على

$$-3x=3t+2$$

أي أن

$$x=-t-\frac{2}{3}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على:

$$(D-1)\left\{-t-\frac{2}{3}\right\}+Dy=2t+1$$

$$-1+t+\frac{2}{3}+Dy=2t+1$$

$$Dy=t+\frac{4}{3}$$

الحل الكامل هو:

حيث c ثابت اختياري $$x=-t-\frac{2}{3},\ \ y=\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{3}t+c$$

مثال (٢): حل المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$(D+2)x+y=\cos t \qquad (1)$$

$$(D-3)x+(D+1)y=0 \qquad (2)$$

الحل:

بالتأثير على المعادلة (1) بالمؤثر التفاضلي (D+1) والطرح:

$$\therefore \left\{(D+1)(D+2)-(D+3)\right\}x=(D+1)\cos t$$

أي أن

$$(D^2+2D+5)x=-\sin t+\cos t \qquad (3)$$

الحل العام للمعادلة المتجانسة للمعادلة (3) هو

$$x=e^{-t}\left(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t\right)$$

والحل الخاص يعطى من:

$$x=\frac{1}{D^2+2D+2}\{\cos t-\sin t\}$$
$$=\frac{1}{2D+4}\cos t-\frac{1}{2D+4}\sin t$$
$$=\frac{2D-4}{4D^2-16}\cos t-\frac{2D-4}{4D^2-16}\sin t$$
$$=-\frac{1}{15}(D-2)\cos t+\frac{1}{15}(D-2)\sin t$$
$$=-\frac{1}{15}\{-\sin t-2\cos t-\cos t+2\sin t\}$$
$$=-\frac{1}{15}(\sin t-3\cos t)$$

الحل العام للمعادلة (3) يعطى من:

$$x=e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)\frac{1}{5}(\sin t-3\cos t)$$

بالتعويض في المعادلة (1) عن x نحصل على

$$y=\cos t-(D+2)\left\{e^{-t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)\frac{1}{5}(\sin t-3\cos t)\right\}$$
$$\therefore y=\cos t-e^{-t}(D+2)$$
$$-e^{t}(c_1\cos 2t+c_2\sin 2t)$$
$$+\frac{1}{5}\{\cos t+2\sin t+3\sin t-6\cos t\}$$
$$=\cos t-e^{t}\{-2c_1\sin 2t+2c_1\cos 2t+2c_2\cos 2t$$
$$+2\sin 2t-c_1\cos 2t-c_2\sin 2t\}$$
$$+\frac{1}{5}\{5\sin t-5\cos t\}$$

$$\therefore y = \cos t - e^{-t}\left\{(c_2 - 2c_1)\sin 2t + (c_1 + 2c_2)\cos 2t\right\}$$
$$+\frac{1}{5}\{5\sin t - 5\cos t\}$$
$$= \cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t + e^{-t}\ (c_2 - 2c_1)\sin 2t + (c_1 + 2c_2)\cos 2t\}$$

$$y = e^{-t}\left\{(c_1 - 2c_2)\cos 2t + (c_1 + 2c_2)\sin 2t\right\}$$
$$+\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$$

ملحوظة: يمكن إيجاد y بنفس الطريقة التي اوجدنا بها x أي نحذف x بين المعادلتين التفاضليتين.

(ب) طريقة المحددات:

باعتبار أن المؤثر التفاضلي يتبع قوانين الجبر الأساسية والتي تمكن المقادير الجبرية يمكن حل مجموعة المعادلات التفاضلية الخطية بنفس الطرق التي تحل بها المعادلات الآنية الخطية في الكميات الجبرية أي اعتبار أن F_{ij} عبارة عن معاملات ثابتة فإذا رمزنا لمحدد مجموعة لمعادلات بالرمز Δ ورمزنا للمحددات التالية باستبدال الأعمدة الأولي والثانية،....، والأخيرة على الترتيب بالعمود الذي عناصره $F_1, F_2, \ldots F_n$ بالرموز $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ فيكون الشرط الضروري الكافي لكي يكون لمجموعة المعادلات (*) لحل هو $\Delta \neq o$ الحد Δ هو كثيرة حدود في المؤثر Δ ، المحددات $\Delta_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ هي عبارة عن دوال في المتغير x.

من نظرية المعادلات الآتية الخطية فإن حل المجموعة تتحدد بالعلاقات الآتية:

$$\Delta y_i = \Delta_i\ , \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (**)$$

العلاقات (**) تكون n من المعادلات التفاضلية الخطية ذوات معاملات ثابتة رتبة كل منهما على الأكثر هي درجة كثيرة الحدود Δ.

بفرض أن Δ من الدرجة r في المؤثر التفاضلي Δ فيكون الحل المكمل لكل من المعادلات (2) هو حل المعادلة المختزلة (المتجانسة) $\Delta y_i = 0$ أي أن الحل العام لكل متغير y_i يحتوي على r من الثوابت الاختيارية وبذلك نحصل على $n \times r$ من الثوابت بالتعويض عن

$y_1, y_2, \dots, y_n$ في المعادلات التفاضلية (*) نحصل على متطابقات في x ومنه بمقارنة المعاملات نحصل على $(n-1)r$ من العلاقات بين الثوابت الاختيارية التي عددها nr فيتبقى لدينا r من الثوابت المستقلة وهو العدد الواجب توافره في حلول المعادلات (*) لأن Δ من الدرجة r في المؤثر Δ.

مثال (٣): حل المعادلتين التفاضليتين الآتيتين.

$$2(D-2)x+(D-1)y=e^t \qquad (1)$$
$$(D-3)x+y=0 \qquad (2)$$

الحل:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2D-4-D^2-2D+3=-\left(D^2+1\right)$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=e^t$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix}=-4e^t$$

من المعادلتين

$$\Delta_x=\Delta_1, \quad \Delta y=\Delta_2$$
$$\left(D^2+1\right)x=-e^t$$
$$\left(D^2+\right)y=4e^t$$

الحل العام للمعادلتين السابقين هو:

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}e^t$$
$$y=C_3\cos t+C_4\sin t+2e^t \qquad (3)$$

بالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على

$$(D+3)\left\{C_1\cos t+C_2\sin-\frac{1}{2}e^t\right\}$$
$$+C_3\cos t+C_4\sin t+2e^t=0$$

$$\therefore (C_2+3C_1+C_3)\cos t+(3C_2-C_1+C_4)\sin t=0$$

وهذه صحيحة لجميع قيم t بما أن $\cos t,\ \sin t$ دوال مستقلة

$$\therefore C_2+3C_1+C_3=0,\quad 3C_2-C_1+C_4=0$$
$$\therefore C_3=-(3C_1+C_2),\quad C_4=(C_1-3C_2)$$

وبالتعويض عن $C_3,\ C_4$ في المعادلة (3) فإن

$$y=-(3C_1+C_2)\cos t+(C_1-3C_2)\sin t+2e^t$$

مثال (٤): حل المعادلتين الآتيتين:

$$(D^2-2)x-3y=e^{2t} \qquad (1)$$
$$(D^2+2)y+x=0 \qquad (2)$$

الحل:

$$\Delta=\begin{vmatrix} D^2-1 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix}=(D^4-4)+3=D^4-1$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} e^{2t} & -3 \\ 0 & D^2+2 \end{vmatrix}=(D^2-2)e^{2t}=6e^{2t}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} D^2-2 & e^{2t} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-e^{2t}$$

من المعادلتين

$$\Delta x=\Delta_1,\quad \Delta y=\Delta_2$$

$$\therefore \left(D^4-1\right)x=6e^{2t}, \quad \left(D^2-1\right)y=-e^{2t}$$

وحلها العام على هذه الصورة

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{2}{5}e^{2t} \qquad (3)$$

$$y=c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t+\frac{1}{15}e^{2t} \qquad (4)$$

بالتعويض في المعادلة (1) بالمعادلتين (4) ،(3) نحصل على نحصل على:

$$\left(D^2-2\right)\left\{c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t+\frac{2}{5}e^{2t}\right\}$$
$$-3\left\{c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t+\frac{1}{15}e^{2t}\right\}=e^{2t}$$

$$\left\{c_1e^t-c_2e^{-t}-3c_3\cos t-3c_4\sin t+\frac{4}{s}e^{2t}\right\}$$
$$-3c_5e^tc_6e^{-t}-c_7\cos t-c_8\sin t+\frac{3}{15}e^{2t}=e^{2t}$$
$$\therefore \left(c_1e^t+3c_5\right)e^t+\left(c_2e^t+3c_6\right)e^{-t}-3\left(c_3+c_7\right)\cos t$$
$$-\left(3c_4+c_8\right)\sin t+e^{2t}=e^{2t}$$
$$\therefore c_1=-3c_5, c_2=-c_6, c_3=-c_7, c_4=-c_8$$

بالتعويض عن c_1, c_2, c_3, c_4 في المعادلة (3) نحصـــل على الحل العام للمعادلتين على الصورة

$$x=-3c_5e^t-3c_6e^{-t}-c_7\cos t-c_8\sin t+\frac{2}{5}e^{2t}$$

$$y=c_5e^t+c_6e^{-t}+c_7\cos t+c_8\sin t-\frac{2}{5}e^{2t}$$

٢/٤- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة:

تعريف (١): تسمي المعادلة التفاضلية خطية إذا كانت الدالة المجهولة (y) وجميع مشتقاتها الواردة في المعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى ولا يوجد حاصل ضرب بين الدالة المجهولة (y) وأي من مشتقاتها.

الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة هي:

$$p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = f(x), \qquad (1)$$

حيث

$$y' = \frac{dy}{dx}, \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}; \quad p_0 \neq 0 \text{ ،}$$

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n$$

جميعها كميات ثابتة.

باستخدام الرموز $D = \frac{d}{dx}, \; D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, \; D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$.

فإن المعادلة (1) تأخذ الصورة

$$(p_0 D^{(n)} + p_1 D^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} D + p_n) y = f(x) \qquad (2)$$

المعادلة (2) يمكن كتابتها على الصورة المختصرة

$$F(D) y = f(x)$$

حيث $F(D)$ مؤثر تفاضلي خطي، يعطى بالعلاقة

$$F(D) = p_0\, D^{(n)} + p_1\, D^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, D + p_n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} p_r\, D^{n-r} \qquad (3)$$

تعريف (٢):

المعادلة الخطية (1) تكون غير متجانسة عندما $f(x)\neq 0$ ، أما عندما $f(x)=0$ فإنها تسمى متجانسة، حيث تكون متجانسة في الدالة المجهولة (y) ومشتقاتها.

١/٢/٤- خواص المؤثر التفاضلي الخطي $F(D)$:

من السهل اثبات الخواص التالية:

حيث c ثابت اختياري

$$1)F(D)(cy) = c\,F(D)(y)$$

$$2)\ F(D)(y_1 \pm y_2) = F(D)(y_1) \pm F(D)(y_2).$$

نتيجة:

من الخاصيتين $(2),(1)$ نستنتج أن

حيث c_i ثوابت اختيارية

$$F(D)\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} c_i F(D)(y_i)$$

باستخدام خواص المؤثر التفاضلي الخطي $F(D)$ يمكننا أثبات النظريات التالية:

نظرية (١):

إذا كان y_1 حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ فإن $c\,y_1$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة، حيث c ثابت اختياري.

البرهان:

حيث أن y_1 حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ لذلك فهو يحققها.

أي أن

$$F(D)y_1 = 0$$

بضرب طرفي المعادلة السابقة في c نجد أن

$$c\,F(D)y_1 = F(D)(c\,y_1) = c \times 0 = 0\,.$$

وذلك باستخدام الخاصية الأولي ، أي أن $c\,y_1$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة.

نظرية (٢):

إذا كان $y_1\,,\,y_2$ حلان للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$. فإن $(y_1 \pm y_2)$ يكون حل لهذه المعادلة أيضاً.

البرهان:

حيث أن $y_1\,,\,y_2$ حلان للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ فإن

$$F(D)y_1 = 0, \qquad F(D)y_2 = 0$$

باستخدام الخاصية (٢) نجد أن

$$F(D)(y_1 \pm y_2) = F(D)(y_1) \pm F(D)(y_2) = 0 \pm 0 = 0.$$

أي أن $(y_1 \pm y_2)$ يحقق المعادلة $F(D)y = 0$.

لذلك فإن $(y_1 \pm y_2)$ حل أيضاً.

نتيجة:

من النظريتين (١)، (٢) نستنتج أنه إذا كان $y_1\,,\,y_2\,,\,y_3\,,\,\ldots\,,\,y_n$ حلول للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$ وكانت مستقلة خطياً فإن أي تركيب خطي من هذه الحلول على الصورة $\sum_{i=1}^{n} c_i\,y_i$ يكون أيضاً حلاً لهذه المعادلة ، حيث c_i ثوابت اختيارية.

نظرية (٣):

إذا وجد للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ ذات المعاملات الحقيقية p_i ، حلاً مركباً على الصورة $y_1=a(x)+ib(x)$ ، فإن الجزء الحقيقي $a(x)$ لهذا الحل والجزء التخيلي له $b(x)$ يكونان، كل على حدة، حلاً للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$.

البرهان:

حيث أن $y_1=a(x)+ib(x)$ حل للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$ ، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)\ [a(x)+i\ b\ (x)]=0$ ، باستخدام الخاصيتين $(1),(2)$ نستنتج أن

$$F(D)\big(a(x)+ib(x)\big)=F(D)\,a(x)+iF(D)\,b(x)=0$$

وحيث أن الدالة المركبة ذات المتغير الحقيقي عندما تتلاشى فإن كل حد من حديها، الحقيقي والتخيلي، يتلاشى كلاً على حدة، أي أن

$$F(D)\,a(x)=0\ ,\qquad F(D)\,b(x)=0$$

وهذا يعني أن $a(x)$ ، $b(x)$ يكونان، كل على حدة، حلين للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$.

نظرية (٤):

المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الرتبة النونية ذات المعاملات الثابتة ، حلها العام يتكون من جزئين، الأول (y_h) الحل العام للمعادلة المتجانسة $F(D)y=0$.

والثاني (y_p) الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F(D)y=f(x)$.

أي أن الحل العام للمعادلة غير المتجانسة (y_g) ، يعطى بالعلاقة $y_g=y_h+y_p$.

البرهان:

حيث أن y_h هو الحل العام للمعادلة المتجانسة $F(D)y = 0$، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)y_h = 0$.

وحيث أن y_p هو الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F(D)y = f(x)$، لذلك فهو يحققها، أي أن $F(D)y_p = f(x)$.

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} F(D)y_g = F(D)(y_h + y_p) &= F(D)y_h + F(D)y_p \\ &= 0 + f(x) \end{aligned}$$

أي أن y_g يحقق المعادلة غير المتجانسة $F(D)y = f(x)$، وحيث أنه يحتوى على عدد من الثوابت الاختيارية تساوي رتبة المعادلة (الثوابت التي يحتوي عليها y_h)، لذلك فإن الحل y_g هو الحل العام للمعادلة غير المتجانسة.

وسوف نستعرض، فيما يلي كيفية الحصول على كل حل على حدة.

٣/٤- الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:

بفرض أن الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة والتي على الصورة

$$\left[p_0\ D^n + p_1\ D^{n-1} + \ . \ . \ . + \ p_{n-1} D + p_n\right] y = 0 \qquad (4)$$

يكون على الصورة

$$y = e^{rx}, \quad r \neq 0$$

وبالتالي فإن

$$De^{rx} = re^{rx}\ ,\ D^2 e^{rx} = r^2 e^{rx}\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ D^n e^{rx} = r^n e^{rx}.$$

بالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة (4) نجد أن

$$\left[p_0 r^n + p_1 r^{n-1} + \ . \ . \ . + \ p_{n-1} r + p_n\right] e^{rx} = 0$$

وحيث أن $e^{rx} \neq 0$ ، لذلك فإن

$$p_0 r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1} r + p_n = \sum_{r=0}^{n} p_r r^{n-r} = 0 \qquad (5)$$

وهذه كثيرة حدود من الدرجة n (في المتغير r) ولذلك فإن لها n من الجذور(حقيقية أو مركبة)، وتسمى المعادلة المساعدة، ويمكن الحصول عليها مباشرةً من المعادلة (4) وذلك باستبدال المؤثر D بالمتغير r في التعبير الموجود بين القوسين ومساواته بالصفر.

الحالات المختلفة للجذور:

١) جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومختلفة.

إذا كانت جذور المعادلة المساعدة هي $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ وكانت جميعها حقيقية ومختلفة، فقد حصلنا بذلك على n حلاً للمعادلة (4) هي

$$y_1 = e^{r_1 x} \;,\; y_2 = e^{r_2 x} \;,\; \ldots, \; y_n = e^{r_n x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة (4) هو

$$y_h = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

حيث c_i ثوابت اختيارية

وذلك باستخدام نظرية (١).

والجدير بالذكر أن أويلر ودانيال برنوللي توصلا كل منهما إلى طريقة حل المعادلة الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة قبل عام ١٧٤٣ م، و نشرها أويلر (قبل برنوللي) عام ١٧٤٣م.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^2+5D+6\right)y=0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^2+5r+6=0$$
$$\therefore (r+2)(r+3)=0$$

جذور هذه المعادلة هي $r=-2\ ,\ r=-3$ وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=c_1\,e^{-2x}+c_2\,e^{-3x}$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'''-y''-4y'+4y=0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3-D^2-4D+4\right)y=0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3-r^2-4r+4=0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$(r-1)(r-2)(r+2)=0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r=1\ ,\ r=2,\ r=-2$ ، وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=c_1\,e^{x}+c_2\,e^{2x}+c_3\,e^{-2x}$$

٢) بعض جذور المعادلة المساعدة حقيقية ومكرره (متساوية).

إذا كان أحد الجذور حقيقي ومكرر m من المرات، في هذه الحالة فإنه يوجد m من الحلول المكررة $y_1 = e^{rx}\,,\, y_2 = e^{rx}\,, \ldots ,\, y_m = e^{rx}$ ، وبالتالي فإن الحل الذي سنحصل عليه لا يكون حل عام، لأن عدد الثوابت الاختيارية التي ستظهر فيه يكون أقل من رتبة المعادلة المعطاة، حيث أن عدد الثوابت الاختيارية المرتبطة بالـ m حلاً، سوف تصبح ثابتاً واحداً (مجموع m ثابت يعطي ثابت واحد) وليس m.

نظرية:

المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$(D-r)^m y = 0 \tag{6}$$

يكون حلها العام على الصورة

$$y = e^{rx}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}\right) \tag{7}$$

البرهان:

بفرض أن الحل العام للمعادلة (6) يكون على الصورة

$$y = e^{rx}\ X(x)$$

حيث $X(x)$ دالة قابلة للتفاضل m من المرات بالنسبة لـx. لذلك فإن هذا الحل يحقق المعادلة (6)، أي أن $(D-r)^m e^{rx} X(x) = 0$.

ولكن من خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$ أن

$$F(D)\left(e^{rx}\ X(x)\right) = e^{rx} F(D+r)\, X(x)$$

(سوف نثبت هذه الخاصية فيما بعد) وبالتالي فإن

$$(D-r)^m e^{rx} X(x) = e^{rx}\ D^m\ X(x) = 0$$

ولكن $e^{rx} \neq 0$، لذلك فإن

$$D^m X(x) = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$X = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}\right)$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (6) يكون على الصورة

$$y = e^{rx}\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}\right)$$

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - 3D + 2\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - 3r + 2 = 0 \quad \therefore \quad (r+2)(r-1)^2 = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r = 1,\ r = 1,\ r = -2$.

بالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2 x\right) e^{x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - D^2 - 4D + 4\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - r^2 - 4r + 4 = 0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$\left(r - 1\right)\left(r - 2\right)\left(r + 2\right) = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي

$$r = 1\,,\ \ r = 2,\ \ r = -2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{2x} + c_3\, e^{-2x}$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(4)} + 6\, y^{(3)} + 5y^{(2)} - 24\, y^{(1)} - 36y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^4 + 6D^3 + 5D^2 - 24D - 36\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^4 + 6r^3 + 5\, r^2 - 24r - 36 = 0$$

وبتحليل الطرف الأيسر من المعادلة المساعدة، نجد أن

$$\left(r + 3\right)^2 \left(r - 2\right)\left(r + 2\right) = 0$$

أي أن جذور المعادلة المساعدة هي $r=-3\,,\ r=-3\,,\ r=2,\ r=-2$ ، وبالتالي

فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=\left(c_1+c_2x\right)e^{-3x}+c_3e^{2x}+c_4\,e^{-2x}$$

٣) بعض جذور المعادلة المساعدة مركبة.

حيث أن معاملات المعادلة المســاعدة حقيقية ، فإن الجذور المركبة إذا وجدت فإنها تكون أزواجاً مترافقة.

بفرض وجود جذرين مركبين مترافقين في الصورة

$$r_1=a+i\,b,\quad r_2=a-i\,b$$

وبالتالي فإن الحلين المناظران لهما هما

$$e^{(a+i\,b)x},\qquad e^{(a-i\,b)x}$$

كما يمكن كتابتهما على الصورة

$$e^{(a+i\,b)x}=e^{ax}\left(\cos bx+i\ \sin bx\right),$$

$$e^{(a-i\,b)x}=e^{ax}\left(\cos bx-i\ \sin bx\right)$$

وطبقاً لنظرية (3) ، يكون كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لهذين الحلين، حلاً للمعادلة التفاضلية، أي أن الجذرين المركبين المترافقين

$$r_1=a+i\,b\,,\quad r_2=a-i\,b$$

يناظرهما الحلان الحقيقيان

$$e^{ax}\left(\cos bx\right),\quad e^{ax}\left(\sin bx\right)$$

واللذان يمكن تركيبهما على الصورة

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right)$$

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y' + y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^2 + D + 1\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

وجذراها هما

$$r_1 = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad r_2 = \frac{-1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' + 9y' = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 + 9D\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 + 9r = 0 \qquad \therefore \quad r\left(r^2 + 9\right) = 0$$

وجذورها هي

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 3i, \quad r_3 = -3i$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - y'' + 16y' - 16y = 0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^3 - D^2 + 16D - 16\right)y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^3 - r^2 + 16r - 16 = 0$$

وجذورها هي

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 4i, \qquad r_3 = -4i$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 4x + c_3 \sin 4x.$$

٤) بعض جذور المعادلة المساعدة مركبة ومكررة.

حيث أن معاملات المعادلة المساعدة حقيقية، فإن الجذور المركبة إذا وجدت فإنها تكون أزواجاً مترافقة، لذلك إذا وجد الجذر المركب $(a+ib)$ مكرر m من المرات فإن الجذر المركب $(a+ib)$ سوف يوجد مكرر m من المرات أيضاً.

وفي هذه الحالة، مثل الحالة الثانية، يمكن إثبات أن الحل العام يكون على الصورة

$$y = e^{ax}\left(c_1+c_2x+c_3x^2+\ldots+c_mx^{m-1}\right)\cos bx+e^{ax}\left(c_1'+c_2'x+c_3'x^2+\ldots+c_m'x^{m-1}\right)\sin bx$$

وهذا الحل يحتوي على $2m$ ثابت اختياري (= رتبة المعادلة المعطاة).

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(4)}+4y^{(2)}+4y=0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^4+4D^2+4\right)y=0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^4+4r+4=0 \quad\Rightarrow\quad \left(r^2+2\right)^2=0$$

وجذورها هي

$$r_1=i\sqrt{2}\ ,\quad r_2=-i\sqrt{2}\ ,\quad r_3=i\sqrt{2}\ ,\quad r_4=-i\sqrt{2}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h=\left(c_1+c_2x\right)\cos\sqrt{2}\,x+\left(c_3+c_4x\right)\sin\sqrt{2}\,x\ .$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(6)}+3y^{(4)}-9y^{(2)}-27y=0$$

الحل:

بكتابة المعادلة المعطاة على الصورة

$$\left(D^6 + 3D^4 - 9\,D^2 - 27\right) y = 0$$

وبالتالي فإن المعادلة المساعدة هي

$$r^6 + 3r^4 - 9\,r - 27 = 0 \quad \therefore \left(r^2+3\right)^2 \left(r - \sqrt{3}\right)\left(r + \sqrt{3}\right) = 0$$

وجذورها هي

$$r_{1,2} = i\sqrt{3}, \quad r_{3,4} = -i\sqrt{3}, \quad r_5 = \sqrt{3}, \quad r_6 = -\sqrt{3}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2\,x\right)\cos\sqrt{3}\,x + \left(c_3 + c_4\,x\right)\sin\sqrt{3}\,x + c_5\,e^{\sqrt{3}\,x} + c_6\,e^{-\sqrt{3}\,x}.$$

٤/٤-الحل الخاص للمعادلة الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة

لإيجاد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة $F\left(D\right)y = f\left(x\right)$ ، سوف نستخدم طريقة المؤثرات، وذلك بالتأثير على الدالة $f\left(x\right)$ بالمؤثر العكسي $\dfrac{1}{F\left(D\right)}$ ، ولذلك سوف ندرس الآن خواص المؤثر التفاضلي $F(D)$ ، والمؤثر العكسي $\dfrac{1}{F\left(D\right)}$ ، عندما يؤثر كل منهما على بعض الدوال الأساسية.

حيث α ثابت اختياري $\qquad 1)\,F\left(D\right)e^{\alpha x} = F\left(\alpha\right)e^{\alpha x}$

الإثبات:

$$\because De^{\alpha x} = \alpha\,e^{\alpha x}, \quad D^2 e^{\alpha x} = \alpha^2 e^{\alpha x}, \ldots, D^n e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

$$\therefore F\left(D\right)e^{\alpha x} = \left(p_0\,D^n + p_1\,D^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\,D + p_n\right)e^{\alpha x}$$

$$= \left(p_0\,\alpha^n + p_1\,\alpha^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\,\alpha + p_n\right)e^{\alpha x}$$

$$= F(\alpha)\, e^{\alpha x}.$$

$$2)\quad F(D)\left(e^{\alpha x}u(x)\right) = e^{\alpha x}F(D+\alpha)u(x)$$

الإثبات:

$$\because\ D\left(e^{\alpha x}\,u(x)\right) = e^{\alpha x}(D+\alpha)\,u(x),$$

$$\begin{aligned} D^2\left(e^{\alpha x}\,u(x)\right) &= e^{\alpha x}\left(D^2+\alpha D\right)u(x) + \alpha e^{\alpha x}(D+\alpha)\,u(x) \\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)(D+\alpha)\,u(x) \\ &= e^{\alpha x}(D+\alpha)^2\,u(x). \end{aligned}$$

وبالتالي، يمكن إثبات أن $D^n\left(e^{\alpha x}\,u(x)\right) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n\,u(x),$

$$\begin{aligned} \therefore\ F(D)\left(e^{\alpha x}\,u(x)\right) &= \sum_{r=0}^{n} p_r\, D^{n-r} e^{\alpha x}\,u(x) \\ &= \sum_{r=0}^{n} p_r\, e^{\alpha x}(D+\alpha)^{n-r}\,u(x) \\ &= e^{\alpha x}\,F(D+\alpha)\,u(x). \end{aligned}$$

$$3)\ F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta),$$

$$F\left(D^2\right)\left(\cos(\alpha x+\beta)\right) = F\left(-\alpha^2\right)\cos(\alpha x+\beta)$$

حيث α, β ثوابت.

الإثبات:

$$\because D\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \alpha\cos(\alpha x+\beta)$$

$$\therefore D^2\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = -\alpha^2\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\therefore \left(D^2\right)^2\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \left(-\alpha^2\right)^2\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\left(D^2\right)^n\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \left(-\alpha^2\right)^n\sin(\alpha x+\beta).$$

$$\therefore\ F\left(D^2\right)\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)=\sum_{r=0}^{n} p_r\left(D^2\right)^{n-r}\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{n} p_r\left(-\alpha^2\right)^{n-r}\left(\sin\left(\alpha x+\beta\right)\right)$$

$$=F\left(-\alpha^2\right)\sin\left(\alpha x+\beta\right).$$

وبالمثل يمكن اثبات أن

$$F\left(D^2\right)\left(\cos\left(\alpha x+\beta\right)\right)=F\left(-\alpha^2\right)\cos\left(\alpha x+\beta\right)$$

4) $$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x},\qquad F(\alpha)\neq 0$$

الإثبات:

$$\because \frac{1}{F(D)}\left(F(D)e^{\alpha x}\right)=e^{\alpha x},\quad F(D)e^{\alpha x}=F(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{F(D)}\left(F(\alpha)e^{\alpha x}\right)=e^{\alpha x}$$

بقسمة الطرفين على $F(\alpha)$، حيث $F(\alpha)$ ثابت، $F(\alpha)\neq 0$، نحصل على

$$\frac{1}{F(D)}e^{\alpha x}=\frac{1}{F(\alpha)}e^{\alpha x},\qquad F(\alpha)\neq 0$$

5) $$\frac{1}{F(D)}\left(e^{\alpha x}u(x)\right)=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)$$

الإثبات:

$$\because F(D)e^{\alpha x}\left[\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)\right]=e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\left[\frac{1}{F(D+\alpha)}u(x)\right]$$

$$=e^{\alpha x}u(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\frac{1}{F(D)}$ نجد أن

$$\frac{1}{F(D)}\left(e^{\alpha x}u(x)\right) = e^{\alpha x}\frac{1}{F(D+\alpha)}\,u(x)$$

6) $$\frac{1}{F(D^2)}\left(\sin(\alpha x+\beta)\right) = \frac{1}{F(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta),$$

$$\frac{1}{F(D^2)}\left(\cos(\alpha x+\beta)\right) = \frac{1}{F(-\alpha^2)}\cos(\alpha x+\beta)$$

حيث α, β ثوابت، $F\left(-\alpha^2\right)\neq 0$.

الإثبات:

$$\because F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta),$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\frac{1}{F(D^2)}$ نجد أن

$$\frac{1}{F(D^2)}F\left(D^2\right)\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F(D^2)}F\left(-\alpha^2\right)\sin(\alpha x+\beta)$$

$$\therefore \left(\sin(\alpha x+\beta)\right)= F\left(-\alpha^2\right)\frac{1}{F(D^2)}\sin(\alpha x+\beta),$$

بقسمة الطرفين على $F\left(-\alpha^2\right)$ نحصل على

$$\frac{1}{F(D^2)}\left(\sin(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta).$$

بالمثل يمكن اثبات أن

$$\frac{1}{F(D^2)}\left(\cos(\alpha x+\beta)\right)=\frac{1}{F(-\alpha^2)}\cos(\alpha x+\beta).$$

$$7)\ \frac{1}{F(D)}c = \frac{c}{F(0)}, \qquad F(0) \neq 0$$

الإثبات

$$\frac{1}{F(D)}c = c\,\frac{1}{F(D)}e^{0x} = c\,\frac{1}{F(0)}e^{0x} = \frac{c}{F(0)}.$$

نتيجة: المعادلة التفاضلية

$$p_0\,y^{(n)} + p_1\,y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}\,y' + p_n\,y = c,\ \ c \text{ is a constant}.$$

لها حل خاص على الصورة $y_p = \dfrac{c}{p_n}$.

وذلك لأن $F(0) = p_n$ ، p_n هو معامل y .

مثال (١): اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\ y'' - 4y' + 3y = 2$$

$$2)\ y'' + 9y = e^{5x}$$

$$3)\ y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$$

الحل:

*__المعادلة الأولى__ يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = 2$

حيث $F(0) = 3,\quad F(D) = (D^2 - 4D + 3)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو $y_p = \dfrac{2}{3}$ (الخاصية (7)).

*__المعادلة الثانية__ يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = e^{5x}$

حيث $F(5) = 34 \neq 0,\quad F(D) = (D^2 + 9)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو $y_p = \frac{1}{34} e^{5x}$ (الخاصية (٤)).

***المعادلة الثالثة** يمكن كتابتها على الصورة $F(D)y = 8e^{-2x}$.

حيث $F(D) = (D^3 + 4D^2 + 4D)$, $F(-2) = 0$.

لذلك فإننا نكتب $F(D)$ على الصورة

$$F(D) = D(D^2 + 4D + 4) = D(D+2)^2$$

ويصبح الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = 8\frac{1}{D(D+2)^2} e^{-2x} = 8\frac{1}{(D+2)^2}\left(\frac{1}{D} e^{-2x}\right)$$

$$= 8\frac{1}{(D+2)^2}\left(\frac{-1}{2}\right) e^{-2x}$$

$$= -4\left(\frac{1}{(D+2)^2} x^0 e^{-2x}\right)$$

$$= -4\left(e^{-2x}\frac{1}{(D+2-2)^2} x^0\right)$$

$$= -4e^{-2x}\frac{1}{D^2} x^0 = -4e^{-2x} D^{-2} x^0$$

$$= -2x^2 e^{-2x}$$

لاحظ أن

$$D^{-2} x^0 = D^{-1}(D^{-1} x^0) = \int\left(\int x^0\, dx\right) dx = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2$$

ولم يتم إضافة ثوابت أثناء التكامل نظراً لأن الحل الخاص لا يحوي أي ثوابت.

مثال (٢): اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\ y'' - y' - 2y = 4x^2 .$$
$$2)\ y'' - 2y' + y = x^2 e^x .$$
$$3)\ y'' + 2y' = x^3 e^{-x} .$$

الحل:

المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = 4x^2$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - D - 2\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه، كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D^2 - D - 2}\left(4x^2\right) = 4\left(\frac{1}{(D+1)(D-2)}\right)x^2$$

باستخدام الكسور الجزئية نجد أن

$$\left(\frac{1}{(D+1)(D-2)}\right) = \frac{-1}{3(D+1)} - \frac{1}{6\left(1 - \frac{D}{2}\right)}$$

$$\therefore\ y_p = 4\left[\frac{-1}{6}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{3}\left(1 + D\right)^{-1}\right]x^2$$

باستخدام نظرية ذات الحدين، نجد أن

$$\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{-1} x^2 = \left(1 + \left(\frac{D}{2}\right) + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \ldots\right)x^2 = x^2 + x + \frac{1}{2},$$
$$\left(1 + D\right)^{-1} x^2 = \left(1 - D + D^2 - \ldots + \ldots\right)x^2 = x^2 - 2x + 2 .$$

$$y_p = \frac{-4}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + \left(x^2 - 2x + 2\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{3}\left(6x^2 - 6x + 9\right)$$

المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x^2 e^x$$

حيث

$$F(D) = \left(D^2 - 2D + 1\right)$$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = \frac{1}{\left(D^2 - 2D + 1\right)} x^2 e^x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} x^2 e^x$$

$$\therefore y_p = \left[e^x \frac{1}{(D-1+1)^2} x^2\right]$$

$$= e^x D^{-2} x^2$$

$$= \frac{1}{12} x^4 e^x$$

المعادلة الثالثة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x^3 e^{-x}$$

حيث

$$F(D) = \left(D^2 + 2D\right) = D(D+2)$$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D(D+2)} x^3 e^{-x} = e^{-x} \frac{1}{(D-1)(D+1)} x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1-D\right)^{-1}\left(1+D\right)^{-1} x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D+D^2+D^3+\ldots\right)\left(1-D+D^2-D^3\right)x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D+D^2+D^3+\ldots\right)\left(1-D+D^2-D^3\right)x^3$$

$$= -e^{-x}\left(1+D^2\right)x^3$$

وذلك بإهمال الكميات التي من الدرجة الأعلى من الثالثة.

$$\therefore\ y_p = -\ e^{-x}\left(x^3+6x\right)$$

مثال (٣): اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y''+9y = \sin 3x$.

2) $y''+y = x\cos x$.

3) $y''-6y'+13y = 4e^{3x}\sin 5x$.

الحل:

*المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = \sin 3x$$

حيث $F(D) = \left(D^2+9\right)$ ، $F\left(-\alpha^2\right) = F(-9) = -9+9 = 0$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D^2+9}\left(\sin 3x\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+9}e^{3ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(D+3i)(D-3i)}e^{3ix}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\frac{1}{(D-3i)}\left(\frac{1}{6i}e^{3ix}\right) = \operatorname{Im}\frac{1}{6i}\frac{1}{(D-3i)}\left(x^0 e^{3ix}\right)$$

$$= \operatorname{Im}\frac{1}{6i}\frac{1}{(D-3i)}\left(x^0 e^{3ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-i}{6}e^{3ix}\frac{1}{(D)}x^0\right)$$

$$= \mathrm{Im}(\frac{-i\,x}{6}\, e^{3i\,x}) = \mathrm{Im}(\frac{-i\,x}{6}(\cos 3x + i\,\sin 3x))$$

$$= -\frac{1}{6}\,x\,\cos 3x$$

حيث Im هي الجزء التخيلي للعدد المركب.

لاحظ أننا لم نستطع تطبيق الخاصية السادسة والتي تنص على

$$\frac{1}{F(D^2)}(\sin(\alpha x+\beta)) = \frac{1}{F(-\alpha^2)}\sin(\alpha x+\beta), \quad F(-\alpha^2)\neq 0$$

وذلك لأن $F(-\alpha^2) = 0$

لذلك تستخدم الطريقة السابقة في هذه الحالة.

*المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x\cos x$$

حيث $F(D) = (D^2+1)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{(D^2+1)}(x\,\cos x)$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1}{(D^2+1)}(x\,e^{i\,x})$$

$$= \mathrm{Re}\,e^{i\,x}\,\frac{1}{((D+i)^2+1)}(x)$$

$$= \mathrm{Re}\,e^{i\,x}\,\frac{1}{(D^2+2i\,D)}(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{D(D+2i)}(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i} D^{-1}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-1}(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i} D^{-1}\left(1-\frac{D}{2i}-\frac{D^2}{4}+\ldots\right)(x)$$

$$= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1}{2i}\left(D^{-1}-\frac{1}{2i}-\frac{D}{4}\right)(x)$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2i}x-\frac{1}{4}\right)(\cos x+i\sin x)$$

$$= \frac{1}{8}(2x^2-1)\sin x+\frac{1}{4}x\cos x$$

المعادلة الثالثة يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = 4e^{3x}\sin 5x$$

حيث

$$F(D)=(D^2-6D+13)$$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة هو

$$y_p = \frac{1}{(D^2-6D+13)} 4e^{3x}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{((D+3)^2-6(D+3)+13)}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{(D^2+4)}\sin 5x$$

$$= 4e^{3x}\frac{1}{(-25+4)}\sin 5x$$

$$= \frac{-4}{21} e^{3x} \sin 5x$$

مثال (٤): اوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$1)\ y'' - 4y = x + 3\cos x + e^{-2x}.$$
$$2)\ y'' - 2y' + 2y = x\, e^{x} \cos x.$$

الحل:

*المعادلة الأولى يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D) = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - 4\right)$

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة يكون عبارة عن مجموع الحلول الخاصة للمعادلات

$$F(D) = x \ ,\quad F(D) = 3\cos x \ ,\quad F(D) = e^{-2x}.$$

و نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 4}\left\{x + 3\cos x + e^{-2x}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(D+2)(D-2)}\left\{e^{-2x}\right\} + 3\frac{1}{D^2-4}(\cos x)$$
$$= \frac{1}{D^2-4}(x)$$

$$= \frac{1}{(D-2)(D+2)}\{x\} - \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{(D-2)^2-4}\left\{x^0\right\}$$

$$= \frac{1}{4(D-2)}x - \frac{1}{4(D+2)}x - \frac{3}{-5}\cos x + \left\{e^{-2x}\right\}\frac{1}{D(D-4)}\left\{x^0\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-1}(x) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1}(x) - \frac{3}{5}\cos x$$

$$-\frac{1}{4}\, e^{-2x} D^{-1}\left(1-\frac{D}{4}\right)^{-1} x^{0}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\left(1+\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}+\ldots\right)+\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}-\ldots+\ldots\right)\right)x -$$

$$-\frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{4}e^{-2x}D^{-1}\left(1+\frac{D}{4}+\frac{D^2}{16}\ldots\right)x^{0}$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2+\frac{D^2}{2}\right)(x) - \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{4}e^{-2x}\left(D^{-1}+\frac{1}{4}\right)x^{0}$$

$$= -\frac{1}{4}x - \frac{3}{5}\cos x - \frac{1}{16}(4x+1)e^{-2x}$$

*المعادلة الثانية يمكن كتابتها على الصورة

$$F(D)y = x\, e^{x}\cos x ،$$

حيث $F(D) = \left(D^2 - 2D + 2\right)$.

لذلك فإن الحل الخاص لهذه المعادلة نحصل عليه كما يلي

$$y_p = \frac{1}{\left(D^2-2D+2\right)}e^{x}x\cos x$$

$$= e^{x}\frac{1}{\left((D+1)^2-2(D+1)+2\right)}x\cos x$$

$$= e^{x}\frac{1}{\left(D^2+1\right)}x\cos x$$

المقدار $\frac{1}{(D^2+1)}x\cos x$ سبق أن حصلنا عليه من خلال المعادلة الثانية من مثال (٣)

وهو يساوي $\frac{1}{8}\left(2x^{2}-1\right)\sin x+\frac{1}{4}x\cos x$.

وبالتالي فإن حل المعادلة المعطاة هو

$$y_p = e^{x}\left(\frac{1}{8}\left(2x^{2}-1\right)\sin x+\frac{1}{4}x\cos x\right)$$

لاحظ أننا أثرنا أولاً بالمؤثر على الدالة الأسية ثم على الدالة المثلثية، وغالباً يكون من المفيد عمل ذلك.

فيما سبق، استطعنا إيجاد الحل العام (y_h) للمعادلة المتجانسة

$$p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = 0$$

والحل الخاص (y_p) للمعادلة غير المتجانسة

$$p_0\, y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = f(x)$$

ولذلك يمكننا إيجاد الحل العام y_g للمعادلة غير المتجانسة، على الصورة

$$y_g = y_h + y_p$$

٤/٥- معادلة أويلر الخطية:

معادلة أويلر الخطية هي المعادلة التي على الصورة

$$\begin{aligned} a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} &+ \\ + \ldots + a_{n-1}(ax+b)\,y' + a_n\, y &= f(x), \end{aligned}$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{(n-1)}, a_n, a, b$ ثوابت.

ويمكن تحويلها إلى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

استخدام التعويض

$$ax+b=e^{z}\ \therefore\ z=\ln\left(ax+b\right)$$

نجد أن

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a}{ax+b}\ ,\quad (ax+b)y'=a\frac{dy}{dz}=a\,\Theta y\,,\quad \Theta=\frac{d}{dz}\,,$$

$$(ax+b)^{2}\ y''=a^{2}\left(\frac{d^{2}y}{dz^{2}}-\frac{dy}{dz}\right)=a^{2}\,\Theta(\Theta-1)\,y,$$

$$(ax+b)^{3}\ y'''=a^{3}\,\Theta(\Theta-1)(\Theta-2)y,$$

وبالتالي فإن

$$(ax+b)^{n}\,y^{(n)}=a^{n}\,\Theta(\Theta-1)(\Theta-2)\ldots(\Theta-n+1)y$$

بالتعويض بالعلاقات السابقة في معادلة أويلر نحصل على معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة، وتحل كما سبق، فنحصل على الحل العام بدلالة $y\,,\,z$ ، ثم بالتعويض عن z بدلالة x نكون قد اوجدنا الحل المطلوب لمعادلة أويلر.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^{2}y''-4xy'+6y=x$$

الحل:

هذه المعادلة هي معادلة أويلر، حيث

$$n=2\,,\ a=1\,,\ b=0\,,\ a_0=1\,,\ a_1=-4\,,\ a_2=6$$

بأخذ التعويض $x=e^{z}\quad or\quad z=\ln x$، نجد أن

$$y'=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\ ,\quad y''=\frac{1}{x^{2}}\left(\frac{d^{2}y}{dz^{2}}-\frac{dy}{dz}\right)$$

وتتحول المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=e^z$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F(\Theta)=\Theta^2-5\Theta+6 \ ، \ F(\Theta)y=e^z$$

المعادلة المتجانسة $\frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=0$ ،

يمكن كتابتها على الصورة

$$\left(\Theta^2-5\Theta+6\right)y=0$$

وتكون المعادلة المساعدة لها هي

$$\left(r^2-5r+6\right)=0$$

$$\therefore (r-2)(r-3)=0$$

وجذور هذه المعادلة هي

$$r_1=2\ ,\quad r_2=3$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}=c_1x^3+c_2x^2$$

أما الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فنحصل عليه كما يلي

$$y_p=\frac{1}{\Theta^2-5\Theta+6}e^z=\frac{1}{2}e^z$$

وذلك لأن $F(1)=2$.

والحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2} x$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dz^2} - 5\frac{dy}{dz} + 6y = e^z$ ، هو

$$y_g = y_h + y_p = c_1 e^{3z} + c_2 e^{2z} + \frac{1}{2} e^z$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 6x^2 \ln x + \frac{6}{x}$$

الحل:

هذه المعادلة هي معادلة أويلر، حيث

$$n = 2 ,\ a = 1 ,\ b = 0 ,\ a_0 = 1 ,\ a_1 = -3 ,\ a_2 = 4$$

بأخذ التعويض $x = e^z \quad or \quad z = \ln x$ ، نجد أن

$$y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz} \ ,\ \ y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

وتتحول المعادلة المعطاة إلى الصورة

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 4y = 6z\, e^{2z} + 6e^{-z}$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) - 3\frac{dy}{dz} + 4y = 6z\, e^{2z} + \frac{6}{e^z}$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F(\Theta) y = 6z e^{2z} + 6e^{-z}$$

وتكون المعادلة المساعدة لها هي

$$\left(r^2-4r+4\right)=0 \quad \therefore \quad (r-2)^2=0$$

وجذور هذه المعادلة هي

$$r_1 = r_2 = 2$$

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$y_h = \left(c_1 + c_2 z\right) e^{2z}$$

أما الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة فنحصل عليه كما يلي

$$y_p = 6\,\frac{1}{(\Theta-2)^2}\left(z\,e^{2z} + z^0 e^{-z}\right)$$

$$= 6\,z\,e^{2z}\,\Theta^{-2} + 6\,\frac{1}{(-1-2)^2}e^{-z}$$

$$= z^3 e^{2z} + \frac{2}{3}e^{-z}$$

لذلك فإن الحل العام للمعادلة

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 4\frac{dy}{dz} + 4y = 6ze^{2z} + 6e^{-z}$$

هو

$$y_g = y_h + y_p = \left(c_1 + c_2 z\right)e^{2z} + z^3 e^{2z} + \frac{2}{3}e^{-z}$$

والحل العام للمعادلة المعطاة هو

$$y_g = x^2\left(c_1 + c_2 \ln x\right) + x^2(\ln x)^3 + \frac{2}{3x}$$

مثال (٣): أوجد حل مجموعة المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(D+2)x + 3y = 0 \qquad (1)$$

$$3x + (D+2)y = 2e^{2t} \qquad (2)$$

الحل:

بالتأثير على المعادلة (1) بالمؤثر (D+2) وضرب (2) في (3) وطرح (2) من (1) نحصل على:

$$\left(D^2+4D-5\right)x=-6e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية ذات معادلات ثابتة حلها لعام على الصورة

$$x=c_1e^t+c_2e^{-5t}-\frac{6}{7}e^{2t} \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$y=-\frac{1}{3}\left[\left(D+2\right),c_1e^t+c_2e^{-st}-\frac{6}{7}e^{2t}\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\left[3c_1e^t-3c_2e^{-st}-\frac{24}{7}e^{2t}\right]$$

$$\therefore y=c_1e^t+c_2e^{-st}-\frac{8}{7}e^{2t} \qquad (4)$$

الحل الكامل يعطى بالمعادلتين (4) ،(3).

٦/٤- تمارين:

١- اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y''-3y'+2y=0$.

2) $y''-6y'+9y=0$.

3) $y''+3y=0$.

4) $y''+2y'+10y=0$.

5) $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

6) $y'''-4y''-3y'+18y=0$.

7) $y^{(iv)}-9y''+20y=0$.

8) $y^{(iv)}+8y'''+24y''+32y'+16y=0$.

9) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

10) $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$.

11) $y^{(iv)} - 64y = 0$.

12) $y^{(iv)} - 4y''' + 7y'' - 4y' + 6y = 0$.

15) $y^{(iv)} - 6y''' + 13y'' - 12y' + 4y = 0$.

16) $y^{(vi)} + 9y^{(iv)} + 24y'' + 16y = 0$.

17) $y^{(iv)} - 8y'' + 16y = 0$.

18) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

19) $4y^{(v)} - 3y''' - y'' = 0$.

20) $y^{(vi)} + 3y^{(iv)} + 3y'' + y = 0$.

21) $y^{(iv)} - y''' - 9y'' - 11y' - 4y = 0$.

22) $\left(D^2 - 2D + 5\right)^2 y = 0, \qquad D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

٢- اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$.

2) $y''' - y'' - y' - y = \cos 2x$.

3) $y'' - 8y' + 15y = 9xe^{2x}$.

4) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 3x^2e^x - 7e^x$.

5) $y'' + 4y' = 195e^{2x}\sin 3x$.

6) $y''' - 6y'' + 9y' - 4y = 3 + 8x^2 - 6e^{2x}$.

7) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 3xe^x + 2e^x - \sin x$.

8) $y'' + 7y' + 10y = 4xe^{-3x}$.

9) $y''' + y' = 2x^2 + 4\sin x$.

10) $y'' + y' - 6y = 10e^{2x} - 18e^{3x} - 6x - 11$.

11) $y'' + 3y' - 40y = \sin 20x + 40\cos 20x$.

12) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 5\sin 2x + 10x^2 - 3x + 7$.

13) $y^{(4)} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$.

14) $y'' + 2y' + 4y = e^x \sin 2x$.

15) $y^{(4)} + 2y'' + y = \cos x$.

16) $y'' + y = \sin 3x \cos x$.

17) $x^2 y'' - x y' + y = x(\ln x)^3$.

18) $(1+x)y'' - 3y' + \dfrac{4}{1+x}y = (1+x)^2$.

19) $(x+2)^2 y'' - (x+2)y' + y = 3x + 4$.

20) $(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$.

٣-اوجد الحل العام لأنظمة المعادلات التفاضلية الآنية:

$$(1)\begin{cases} Dx - (D+1)y = -e^t \\ x + (D-1)y = e^{2t} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} (D+2)x + (D+1)y = t \\ 5x + (D+3)y = t^2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} (D+1)x + (D+1)y = e^t + 2 \\ -2x + (D+3)y = e^t - 1 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} (D^2+16)x - 6Dy = 0 \\ 6Dx + (D^2+16)y = 0 \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} (D^2+4)x - 6Dy = 0 \\ (D^2+1)y - 2x = \cos^2 x \end{cases}$$

$$(6)\ \begin{cases}(D-1)x+(D+2)y=1+e^t\\(D-1)y\ (D+1)z=2+e^t\\(D-1)x+(D+1)z=3+e^t\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}t^2\ddot{x}+t\dot{x}+2y=0\\t^2\ddot{y}+t\dot{y}+2\dot{y}-2x=0\end{cases}$$

$$(8)\begin{cases}\ddot{x}+x=\dot{y}\\4\dot{x}+2x=\dot{y}+2y\end{cases}$$

الفصل الخامس

حل المعادلات التفاضليـــــــــة

باستخدام المتسلسلات اللانهائية

Soution of Differential Equations

by Infinite Series

أولاً- طريقة ليبنز– ماكلورين:

يمكن تلخيص هذه الطريقة وذلك بايجاد مفكوك ماكلورين في صورة متسلسلة لا نهائية للحل

$$y = y(0) + xy^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}y^{(2)}(0) + \ldots \frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0) + \ldots$$

ثم استخدام نظرية ليبنز للتفاضل للمعادلة التفاضلية n من المرات وتوجد علاقة بين المشتقات $y^{(r)}\ (r = 0,1,2,\ldots)$ كما سيتضح من الأمثلة الآتية.

مثال (١): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \tag{1}$$

الحل:

يتفاضل المعادلة (1)، n من المرات باستخدام نظرية ليبنز نحصل على

$$\left(1-x^2\right)y^{(n+2)} - x\left(2n+5\right)y^{((n+1))} - (n+1)(n+3)y^n = 0 \tag{2}$$

نفرض أن حل المعادلة (١) فى صورة متسلسلة ماكلورين

$$y = y\left(0\right) + xy^{(1)}\left(0\right) + \frac{x^2}{2!}y^{(2)}\left(0\right) + \ldots + \frac{x^r}{r!}y^{(r)}\left(0\right) + \ldots \tag{3}$$

حيث $y^r\left(0\right)$ نرمز إلى القيمة $\frac{d^ry}{dx^r}$ عند النقطة $x = 0$

بوضع $x = 0$ فى المعادلة (٢) نحصل على

$$y^{(n+2)}\left(0\right) = (n+1)(n+3)y^{(n)}\left(0\right), \quad (n \ge 0) \tag{4}$$

نحصل على (4) ومن ثم من

$$y^{(2)}(0)=1.3.y(0)$$
$$y^{(3)}(0)=2.4.y^{(1)}(0)$$
$$y^{(4)}(0)=3.5.y^{(2)}(0)=1.3^2.5.y(0)$$
$$y^{(5)}(0)=4.6.y^{(3)}(0)=2.4^2.6.y^{(1)}(0)$$
$$y^{(6)}(0)=5.7.y^{(4)}(0)=1.3^2.5^2.7y(0)$$

وهكذا ... ومن ثم من (3) نحصل على

$$y=y(0)\left[1+\frac{1.3}{3!}x^2+\frac{1.3^2.5}{4!}x^4+\frac{1.3^2.5^2.7}{6!}x^6+\dots\right]$$
$$+y^{(1)}(0)\left(x+\frac{2.4}{3!}x^3+\frac{2.4^2.6}{5!}x^5+\frac{2.4^2.6^2.6}{7!}x^7+\dots\right) \qquad (5)$$

ا لمعادلة (5) تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) لأنها تحتوى على ثابتين اختيارين هما $y(0),\ y'(0)$

ملحوظة: بما أن هذا الحل حصلنا عليه حول النقطة $x=0$ (في صورة متسلسلة ماكلورين) نقول أن هذا الحل حول النقطة $x=0$ لكي نحصل على حل حول أي نقطة أخري $x=a$ المعادلة (3) يجب أن تستبدل بمتسلسلة تايلور حول النقطة $x=a$ أي أن:

$$y=y(a)+(x-a)y^{(1)}(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}y^{(2)}(a)+\dots+\frac{(x-a)^r}{r!}y^{(r)}(a)+\dots \qquad (6)$$

بوضع $x=a$ في المعادلة (2) تستبدل بالمعادلة:

$$\left(1-a^2\right)y^{(n+2)}(a)-(2n+5)ay^{(n+1)}(a)-(n+1)(n+3)y^{(n)}(a)=0 \qquad (7)$$

سوف نعتبر الحل حول النقطة $x=0$ فقط.

مثال (٢): أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y''+xy=0 \qquad (1)$$

علماً بأن $y(0)=a \qquad y'(0)=b,$

الحل:

تفاضل المعادلة (1) n من المرات باستخدام نظرية ليبنز نحصل على

$$y^{(n+2)}(x)+xy^{(n)}(x)+ny^{(n-1)}(x)=0 \tag{2}$$

بوضع $x=0$ فى المعادلة (2):

$$\therefore y^{(n+2)}(0)=-ny^{(n-1)}(0) \tag{3}$$

ولكن $y(0)=0 \qquad y'(0)=b,$

من المعادلة (1) نجد أن

$$y''(0)=0 \Rightarrow xa=0$$

من المعادلة (3) نحصل على

$$\begin{aligned}
&y^{(3)}(0)=1.y^{(0)}(0)=-y(0)=-a\\
&y^{(4)}(0)=-2y^{(1)}(0)=-2b\\
&y^{(5)}(0)=-3y^{(2)}(0)=0\\
&y^{(6)}(0)=-4y^{(3)}(0)=4.1.a=4a\\
&y^{(7)}(0)=-5y^{(4)}(0)=5.2.b=10b\\
&y^{(8)}(0)=-6y^{(5)}(0)=0\\
&y^{(9)}(0)=-7y^{(6)}(0)=-7.4.1a=-28a\\
&y^{(10)}(0)=-8y^{(7)}(0)=8.5.2b=80b\\
&y^{(11)}(0)=-9y^{(8)}(0)=0\\
&y^{(12)}(0)=-10y^{(9)}(0)=-10.7.4a=-280a
\end{aligned}$$

بالتعويض فى مفكوك ما كلورين نحصل على

$$y = y(0) + \frac{x}{1!} y^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} y^{(2)}(0) + ... + \frac{x^R}{R!} y^{(R)}(0) + ...$$

$$\therefore y = a + bx - \frac{a}{3!} x^3 - \frac{2b}{4!} x^4 + \frac{4.1}{6!} ax^6 + \frac{5.2b}{7!} x^7 - \frac{7.4.1}{9!} ax^9$$

$$- \frac{8.5.2b}{10!} x^{10} + \frac{10.7.4}{12!} x^{12} + ...$$

$$\therefore y = a\left(1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1.4}{6!} x^6 - \frac{7.4.1}{9!} x^9 4...\right)$$

$$+ bx\left(1 - \frac{2}{4} x^3 + \frac{5.2}{7!} x^6 - \frac{8.5.2}{10!} x^9 + ...\right)$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad (1)$$

بالقرب من $x = 0$

الحل:

نفاضل المعادلة (1) n من المرات باستخدام نظرية ليبنز

$$\therefore x y^{(n+2)}(x) + (1 + n + x) y^{(n+1)}(x) + (n+2) y^{(n)}(x) = 0 \qquad (2)$$

بوضع $x = 0$ في (2) نحصل على

$$y^{(n+1)}(0) = -\frac{n+2}{n+1} y^{(n)}(0) \qquad (3)$$

بوضع $n = 0, 1, 2, ...$ نحصل على

$$y^{(1)}(0) = -2y(0)$$

$$y^{(2)}(0) = -\frac{3}{2} y^{(1)}(0) = 3y(0)$$

$$y^{(3)}(0)=-\frac{4}{3}y^{(2)}(0)=-4y(0)$$
$$y^{(4)}(0)=-\frac{5}{4}y^{(3)}(0)=5y(0)$$

وهكذا: بالتعويض في مفكوك ما كلورين

$$y=y(0)+\frac{x}{1!}y^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}y^{(2)}+...+\frac{x^r}{r!}y^{(r)}(0)+...$$

نحصل على

$$y=y(0)\left(1-2x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3+\frac{5}{4!}x^4+...+\right.$$
$$\left.+(-1)^r\frac{(y+1)}{r!}x^r+...\right) \qquad (4)$$

حيث $y(0)$ ثابت اختياري.

المعادلة (4) ليست حل عام للمعادلة التفاضلية لأنها تحتوى على ثابت اختياري واحد $(y(0))$
لإيجاد الحل الثاني نستخدم التعويض

$$y=u(x)y_1 \qquad (5)$$

حيث y_1 يعطى بالعلاقة (4). بالتعويض من (5) في (1) نحصل على

$$x\left[u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)}+uy_1^{(2)}\right]+(1+x)\left(u^{(1)}y+uy_1^{(1)}\right)+2uy_1=0 \qquad (6)$$

بما أن y_1 حل المعادلة التفاضلية (1) إذن

$$x\left(u^{(2)}y_1+2u^{(1)}y_1^{(1)}\right)+(1+x)u^{(1)}y_1=0 \qquad (7)$$

تصبح المعادلة (7) على الصورة

$$\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}+\frac{2y_1^{(1)}}{y_1}+\frac{1}{x}+1=0 \qquad (8)$$

بتكامل (8) نجد أن

$$\ln\left|u^{(1)}\right| + 2\ln|y_1| + \ln|x| + x = c$$

ومنها نحصل على

$$xe^x y_1^2 \frac{du}{dx} = c^*, \quad c^* = e^c \tag{9}$$

حيث c ثابت اختياري للتكامل

$$\therefore u = c^* \int \frac{e^{-x}}{xy_1^2} dx \tag{10}$$

بالتعويض من (10) في المعادلة (5) نحصل على

$$y_2 = c^* y_1 \int \frac{e^{-x}}{xy_1^2} dx$$

إذن الحل العام للمعادلة (1) هو

$$\begin{aligned} y &= Ay_1 + By_2 \\ &= Ay_1 + Bc^* y_1 \int \frac{e^{-x}}{xy_1^2} dx \end{aligned}$$

حيث A، B ثوابت اختيارية.

ملحوظة: واضح من الأمثلة السابقة أن الحل بطريقة ماكلورين أو تايلور ليس عمليا وقد يكون شاذا في بعض الحالات أو من الممكن أن تكون التفاضلات المتتالية معقدة يمكن استنتاج قاعدة عامة هى أن حل مثل هذه المعادلات يكون على هيئة متسلسلة لانهائية على الصورة:

$$y = x^m\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\right) = x^m \sum_{r=0}^{\infty} a_\gamma x^r,\ a_0 \neq 0$$

أو على الصورة

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{m+r}$$

بالتعويض في أي معادلة تفاضــلية من الرتبة الثانية بالفرض الســابق فانه يمكننا أن نوجد علاقة بين المعاملات ومن السـهل أن نسـتنتج قيمة كل من المعاملات بدلالة $a_0,\ a_1$ في أغلب الأحيان:

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy''+y'+y=0 \qquad (1)$$

الحلـ:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{b}{x}y=0$$

نفرض أن الحل على الصورة:

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}, \qquad (a_1\neq 0)$$

$$\therefore y'=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)x^{r+m-1}$$

$$y''=\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)(r+m-1)x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1)

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)(\gamma+m-1)x^{r+m-1}+$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(\gamma+m)x^{r+m-1}+\quad b\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}=0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty}a_r\,(r+m)^2x^{r+m-1}+b\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوى $x^{\gamma+m}$ بالصفر

$$\therefore a_{r+1}(r+m+1)^2+ba_r=0$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{-b}{(r+m+1)^2}a_r$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{-b}{(r+1)^2}a_\gamma \qquad (m=0)$$

$$=\frac{-b}{(r+1)^2}\cdot\frac{-b}{r^2}\cdot\frac{-b}{(r-1)^2}\cdots\frac{-b}{1}a_0$$

$$\therefore a_{r+1}=\frac{(-b)^{r-1}}{\left[(r+1)!\right]^2}a_0$$

$$\therefore a_r=\frac{(-b)^r}{(r!)^2}a_0$$

$$\therefore y=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r}$$

$$=a_0\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-b)^r}{(r!)^2}x^r$$

وهو حل غير كامل لأنة يحتوي على ثابت اختياري واحد يمكن إيجاد الحل العام كما في المثال السابق.

٥/١- تعاريف هامة:

الدالة التحليلية: تسمى الدالة $\varphi(x)$ دالة تحليلية عند النقطة $x=a$ إذا كانت وإذا كانت نقط $\varphi'(x)$ لها قيمة محدودة عند النقط المحيطة بالنقطة $x=a$.

النقطة العادية: النقطة $x=0$ تسمى نقطة عادية Regular point للمعادلة التفاضلية

$$y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$$

إذا كانت $\varphi(x)$ ، $\psi(x)$ دالتين تحليليتين عند النقطة $x=0$.

تعريف آخر للنقطة العادية:

النقطة $x=0$ تسمى نقطة عادية للمعادلة التفاضلية

$$y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$$

إذا كانت

$$\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots$$
$$\psi(x)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\dots$$

متسلسلتين تقاربيتين في جوار النقطة $x=0$.

النقطة الشاذة المنتظمة: النقطة التي لم تكن عادية فهي شاذة و (فريدة).

وتكون النقطة $x=0$ شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية

$$y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$$

إذا كانت

$$x\varphi(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\dots \qquad =\varphi^*(x)$$
$$x^2\psi(x)=\beta_0+\beta_1x+\beta_2x^2+\dots \qquad =\psi^*(x)$$

متسلسلتين تقاربيتين في جوار النقطة $x=0$.

ملحوظة: النقطة $x=0$ نقطة عادية للمعادلة المذكورة إذا كانت كل من $\varphi(0),\psi(0)$ كمية محدودة عند النقطة $x=0$ تسمى شاذة منتظمة للمعادلة التفاضلية المذكورة إذا كان كل من $\varphi(0),\psi(0)$، كمية غير محدودة.

مثال (٥): اثبت أن $x=0$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية:

$$y''+xy'+2y=0$$

الحل:

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

$$\varphi(x) = x, \quad \psi(x) = 2$$

دالتين تحليليتين في جوار $x = 0$

إذن $x = 0$ نقطة عادية، وغير منظمة للمعادلة

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

أولاً- طريقة فروبينيوس:

لحل المعادلة التفاضلية $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$ إذا كانت النقطة $x = 0$ نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة لها نفرض أن الحل على الصورة

$$y = x^m\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\right), \; a_0 \neq 0$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m) x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1) x^{r+m-2}$$

بضرب طرفي المعادلة التفاضلية في x^2

$$\therefore x^2y'' + x\varphi(x)y' + x^2\psi(x)y = 0$$

بالتعويض

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1) x^{r+m-1}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r x^r \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m) x^{r+m}$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty} \beta_r x^r . \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m} = 0$$

وبمساواة معامل أصغر قوى $\left(x^{m}\right)$ بالصفر

$$\therefore a_0 m(m-1)+\alpha_0 a_0 m+\beta_0 a_0=0$$
$$\therefore m(m-1)+\alpha_0 m+\beta_0=0$$
$$\therefore m^2+(1-\alpha_0)m+\beta_0=0$$

والمعادلة الأخيرة من الدرجة الثانية في m تسمى معادلة الأسس وهذه المعادلة لها جذران في m وهناك ثلاثة حالات:

١- أن يختلف الجذران بعدد غير صحيح

٢- أن يختلف الجذران بعدد صحيح

٣- أن يتساوى الجذران

في الحالة الأولي نحصل من قيمتي m على جذرين مستقلين يتكون منهما الحل الكامل للمعادلة التفاضلية. وفي الحالتين الأخيرتين لن نتمكن بصفة عامة من الحصول إلا على حل واحد فقط و أما الحل الثاني فيمكن إجادة بالطريقة الآتية.

نفرض أن الحل الأول للمعادلة التفاضلية هو

$$y_1=\sum_{\gamma-0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m_1}$$

كما في مثال (٣) السابق:

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}\varphi(x)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}\left(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots\right)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{\ln x^{\alpha_0}}\ e^{-\int\frac{1}{x}\left(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\dots\right)dx}dx$$
$$=y_1\int\frac{1}{y_1^2 x^{\alpha_0}}\chi(x)dx$$

$$= y_1 \int \frac{\chi(x)}{\left(x^{m_1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x\right)^2 x^{\alpha_0}} dx$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{x^{2m_1+\alpha_0}} \cdot \frac{\chi(x)}{\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^\gamma\right)^2} dx$$

$$= y_1 \int \frac{1}{x^{2m_1+\alpha_0}} \chi(x) dx$$

حيث $\chi(x)$ متسلسلة لا نهائية.

ولكن من معادلة الأسس

$$m^2 + (1-\alpha_0)m + B_0 = 0$$

مجموع الجذرين = $-(1-\alpha_0) = m_1 + m_2$

ولكن $k = m_1 - m_2$ حيث k عدد صحيح موجب

بالجمع

$$\therefore 2m + \alpha_0 = 1 + k$$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{\chi(x)}{x^{k+1}} dx$$

$\chi(x)$ يمكن كتابتها على الصورة $\lambda x^k + \chi^x(x)$ حيث $\chi^x(x)$ متسلسلة لا نهائية.

$$y_2 = y_1 \int \left\{ \frac{\lambda x^k}{x^{k+1}} + \frac{\chi^x(x)}{x^{k+1}} \right\} dx$$

$$= \lambda y_1 \ln x + \chi^{"}(x)$$

حيث $\chi^{"}(x)$ متسلسلة لا نهائية.

الحالة الأولي:

جذرا معادلة الأسس مختلفان بعدد غير صحيح.

مثال (٦): حل المعادلة التفاضلية:

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

بالقرب من $x = 0$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الصورة

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$$

$$\therefore x\,\varphi(x) = x\left(\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2},$$

$$x^2\psi(x) = x^2\left(\frac{1}{4x}\right) = \frac{x}{4}$$

إذن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}, \qquad (a_0 \neq 0)$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m) x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1) x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\therefore 4\sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)(r+m-1)x^{r+m-1} +$$

$$+2\sum_{r=0}^{\infty} a_r (r+m)x^{r+m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m} = 0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty} \{4a_r (r+m)(r+m-1) + 2a_r (r+m)\} x^{r+m-1}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m} = 0$$

$$\therefore \sum_{r=0}^{\infty} 2a_r (r+m)(2r+2m-1) x^{r+m-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوى $\left(x^{r+m}\right)$

$$a_{r+1}(r+1+m)(2r+2m+1) + a_r = 0$$

$$a_{r+1} = -\frac{1}{2(r+m+1)(2r+2m+1)} a_r$$

(٢) بوضع $m = 0$

$$a_{r+1} = -\frac{1}{2(r+1)(2r+1)} a_r$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{2.1.1} a_0 = -\frac{1}{2!} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2.2.3} a_1 = -\frac{1}{4.3} . -\frac{1}{2!} a_0 = -\frac{1}{4!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{2.3.2} a_2 = -\frac{1}{6.5.4!} a_0 = -\frac{1}{6!} a_0$$

وهكذا ...

الحل الأول هو:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \\ &= a_0 - \frac{a_0}{2!} x + \frac{a_0}{4!} x^2 - \frac{a_0}{6!} x^3 + \ldots. \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x + \frac{1}{4!} x^2 - \frac{1}{6!} x^3 + \ldots. \right) \\ &= a_0 \cos \sqrt{x} \end{aligned}$$

بوضع $m = -\frac{1}{2}$

$$a_{r+1} = -\frac{1}{(2\gamma+3)(2\gamma+2)} a_r$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{3.2} a_0 = -\frac{1}{3!} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{4.5} a_1 = -\frac{1}{5.4.3} .a_0 = -\frac{1}{5!} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{6.7} a_2 = -\frac{1}{6.7.5!} a_0 = -\frac{1}{7!} a_0$$

وهكذا ...

الحل الثاني هو y_2 يمكن ايجادة بالطريقة الآتية:

$$\begin{aligned} y_2 &= \sum_{r=0}^{\infty} a_\gamma x^{r-\frac{1}{2}} \\ &= a_0 x^{1/2} + a_1 x^{3/2} + a_2 x^{5/2} + a_3 x^{7/2} + \ldots \\ &= a_0 x^{1/2} - \frac{1}{3!} a_0 x^{3/2} - \frac{1}{5!} a_0 x^{5/2} - \frac{1}{7} a_0 x^{7/2} + \ldots \\ &= a_0 \left[\sqrt{x} - \frac{1}{3!} \left(\sqrt{x} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\sqrt{x} \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(\sqrt{x} \right)^7 + \ldots \right) \\ &= a_0 \ Sin \sqrt{x} \end{aligned}$$

إذن الحل العام يعطى من

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos \sqrt{x} + c_2 Sin \sqrt{x}$$

مثال (٧): أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right)y = 0$$

بالقرب من $x = 0$ إذا علم أن $2v$ عدد غير صحيح (معادلة بيسل من الرتبة v

الحلـ:

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m}, \qquad \left(a_0 \neq 0\right)$$

$$\therefore y' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(r+m\right) x^{r+m-1}$$

$$y'' = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(r+m\right)\left(r+m-1\right) x^{r+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left\{a_r \left(r+m\right)\left(r+m-1\right) - a_r\left(r+m\right) - v^2 a_r\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m\,2} = 0$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left\{\left(r+m\right)^2 - v^2\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m+2} = 0$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

بوضع $r = 0,1$ في الحد الأول في المعادلة السابقة

$$\therefore a_0\left(m^2 - v^2\right)x^m + a_1\left\{\left(1+m\right)^2 - v^2\right\}x^{m+1}$$
$$+ \sum_{r=2}^{\infty} a_r \left\{\left(r+m\right)^2 - v^2\right\} x^{r+m} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{r+m+2} = 0$$

بوضع $r+2$ بدلا من r في الحد الثالث من المعادلة السابقة

$$\therefore a_0\left(m^2-v^2\right)+a_1\left\{(1+m)^2-v^2\right\}x^{m+1}$$
$$+\sum_{r=2}^{\infty}a_{r+2}\left\{(r+2+m)-v^2\right\}x^{r+m+2}$$
$$+\sum_{r=0}^{\infty}a_r x^{r+m+2}=0$$

بمساواة معامل x^m بالصفر

$$\therefore a_0\left(m^2-v^2\right)=0$$
$$\therefore m=\pm v$$

(لأن $(a_0\neq 0)$).

بمساواة معامل x^{m+1} بالصفر نحصل على

$$a_1\left\{(1+m)^2-v^2\right\}=0$$
$$\therefore a_1=0$$

لأن $(1+m)^2\neq r^2$ من الفرض

بمساواة المعامل الحد العام $x^{\gamma+m+2}$ بالصفر

$$\therefore a_{r+2}\left\{(r+m+2)^2-v^2\right\}+a_r=0$$
$$\therefore a_{r+2}=-\frac{1}{(r+m+2)^2-v^2}a_\gamma$$

(i) بوضع $m=r$

$$\therefore a_{\Upsilon+2}=-\frac{1}{(\Upsilon+r+2)^2-r^2}a_\Upsilon$$
$$=-\frac{1}{(\Upsilon+2v+2)(\Upsilon+2)}a_\Upsilon$$
$$\therefore a_2=-\frac{1}{(2+2r)(2)}a_0=-\frac{1}{4(1+r)}a_0$$

$$\therefore a_4 = -\frac{1}{(4+2r).4}a_2 = -\frac{1}{\gamma(2+r)}a_0$$

$$= \frac{1}{4.8(1+r)(2+r)}a_0$$

$$\therefore a_6 = -\frac{1}{(6+2r).6}a_4 = -\frac{1}{12(3+r)}a_4$$

$$\therefore a_6 = -\frac{1}{4.8.12(1+r)(2+r)(3+r)}a_0$$

وهكذا ...

بما أن $a_1 = 0$ إذن $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$ ، فإن الحل الأول هو

$$y_1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon+r}$$

$$= a_0 x^r \left(1 - \frac{1}{4(1+r)}x^2 + \frac{1}{4.8(1+r)(2+r)}x^4\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4.8.12(1+r)(2+r)(3+r)}x^6 + \ldots\right.$$

(ii) بوضع $m = -r$ نجد أن الحل الثاني y_2 يعطى من

$$y_2 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon-r}$$

$$= a_0 x^{-\gamma} \left(1 - \frac{1}{4(1-r)}x^2 + \frac{1}{4.8(1-r)(2-r)}x^4\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4.8.12(1-r)(2-r)(3-r)}x^6 + \ldots\right.$$

إذن الحل العام يكون على الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

الحالة الثانية:

جذرا معادلة الأسس متساوية (يتضح من المثال الآتي).

مثال (٨): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$xy'' + y' + by = 0$$

بالقرب من $x = 0$

الحل:

وجدنا في مثال(4) أنه إذا كان الحل

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{\Upsilon + m}$$

فإننا بالتفاضل والتعويض ومقارنة المعاملات (معامل أصغر قوى بالصفر)

معادلة الأسس

$$\therefore m = 0.0, \quad a_0 m^2 = 0$$

ومساواة معامل $x^{\Upsilon+m}$ بالصفر كانت

$$a_{\Upsilon+1} = \frac{-b}{(\Upsilon + m + 1)^2} a_{\Upsilon+1}$$

فإذا أبقينا m دون أن نعوض عن قيمتها بالصفر فإن

$$a_{\Upsilon+1} = \frac{(-b)^{\Upsilon+1}}{(\Upsilon+1+m)^2 (\Upsilon+m)^2 (\Upsilon-1+m)^2 \ldots (1+m)^2} a_0$$

$$a_{\Upsilon} = \frac{(-b)^{\Upsilon}}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (1+m)^2} a_0$$

الحل الأول هو y_1

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}a_{\Upsilon}x^{\Upsilon+m}$$

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}\frac{(-b)^{\Upsilon}}{(\Upsilon+m)^2(\Upsilon+m-1)^2\ldots(m+1)^2}a_0x^{\Upsilon+m}$$

(عندما m=0)

بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن قيم y_1, y_1', y_1'' ومقارنة المعاملات نجد أن جميع المعاملات تتقدم الا معامل الحد الأول وهو $a_0m^2x^{m-1}$.

المعادلة تصبح

$$xy_1''+y_1'+by_1=a_0m^2x^{m-1}$$

بمفاضلة هذه المعادلة جزئيا بالنسبة إلى m

$$\therefore x\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)+b\left(\frac{\partial y_1}{\partial m}\right)$$
$$=a_0\frac{\partial}{\partial m}\left(m^2x^{m-1}\right)$$
$$=a_0\left(2mx^{m-1}+m^2x^{m-1}\ln x\right)$$

إذن الطرف الأيسر يتقدم عند $m=0$

إذن يكون

$$\therefore\left|\frac{\partial y_1}{\partial m}\right|_{m=0}$$

حل آخر للمعادلة التفاضلية

بما أن

$$y_1=\sum_{\Upsilon=0}^{\infty}a_{\Upsilon}x^{\Upsilon+m}$$

$$\therefore \frac{\partial y_1}{\partial m} = x^m \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial a_\Upsilon}{\partial m} x^\Upsilon + x^m \ln x \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} a_\Upsilon x^\Upsilon$$

$$= \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{\partial a_\Upsilon}{\partial m} x^{\Upsilon+m} + y_1 \ln x$$

$$\therefore a_\Upsilon = \frac{(-b)^\Upsilon}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2} a_0$$

نفرض أن:

$$z = \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2}$$

$$\therefore \ln z = -2\left[\ln(\Upsilon+m) + \ln(\Upsilon+m-1) + \ldots \right.$$
$$\left. + \ln(m+1)\right]$$

$$\therefore \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial m} = -2\left(\frac{1}{\Upsilon+m} + \frac{1}{\Upsilon+m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial m} = \frac{-2}{(\Upsilon+m)^2 (\Upsilon+m-1)^2 \ldots (m+1)^2} \quad , \frac{1}{\Upsilon+m}$$
$$+ \frac{1}{\Upsilon+m-1} + \ldots + \frac{1}{m+1}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial m}\Big|_{m=0} = \frac{-2}{\Upsilon^2 (\Upsilon-1)^2 \ldots,^2} \left(\frac{1}{\Upsilon} + \frac{1}{\Upsilon-1} + \ldots \frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{-2}{(\Upsilon!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right)$$

إذن الحل الثاني يعطى من:

$$y_2 = \left|\frac{\partial y_1}{\partial m}\right|_{m=0}$$

$$= y_1 \ln x + \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} (-2) \frac{(-b)^\Upsilon}{(\Upsilon!)^2} a_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right) x^\Upsilon$$

$$= y_1 \ln x - 2a_0 \sum_{\Upsilon=0}^{\infty} \frac{(-b)^\Upsilon}{\Upsilon!} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\Upsilon}\right) x^\Upsilon$$

إذن الحل العام يعطى من المعادلة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(ج)الحالة الثالثة:

جذرا معادلة الأسس مختلفان بعدد صحيح

مثال (٨): اوجد الخل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + xy = 0$$

بالقرب من $x = 0$

الحل:

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m}$$

بالتفاضل نحصل على

$$y'' = \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\therefore \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m+1}$$

والتي تعطى

$$a_0 m(m-1) x^{m-2} + a_1 m(m+1) x^{m-1} +$$

$$+ a_2 (m+2)(m+1) x^m + \sum_{\gamma=3}^{\infty} a_\gamma (\gamma+m)(\gamma+m-1) x^{\gamma+m-2}$$

$$- \sum_{\gamma=0}^{\infty} a_\gamma x^{\gamma+m+1} = 0$$

نضع $\gamma + 3$ بدلاً من γ في المجموع الأول (الحد الرابع)

$$\therefore a_0 m\left(m-1\right)x^{m-2}+a_1 m\left(m+1\right)x^{m-1}$$
$$+a_2\left(m+2\right)\left(m+1\right)x^{m}$$
$$+\sum\left\{\left(\gamma+m+3\right)\left(\gamma+m+2\right)a_{\gamma+3}-a_{\Upsilon}\right\}x^{\gamma+m-1}=0$$

بمساواة معاملات قوى x بالصفر نحصل على

$$a_0 m\left(m-1\right) \qquad (1)$$
$$a_1\left(m+1\right)m=0 \qquad (2)$$
$$a_2\left(m+2\right)\left(m+1\right)=0 \qquad (3)$$
$$a_{\gamma+3}=\frac{a_\gamma}{\left(\gamma+m+3\right)\left(\gamma+m+2\right)},\quad\left(\gamma=0,1,2,\ldots\right) \qquad (4)$$

بما أن $a_0\neq 0$ من المعادلة (1) نحصل على:

في حالة $m=0$؛ من المعادلة (2) إذن a_1 ثابت اختياري.

ومن المعادلة (3) نحصل على $a_2=0$.

ومن المعادلة (4)

$$\therefore a_3=\frac{a_0}{3.2}$$
$$a_4=\frac{a_1}{4.3}$$
$$a_5=\frac{a_2}{5.4}=0$$
$$a_6=\frac{a_3}{6.5}=\frac{a_0}{6.5.4.3}$$
$$a_7=\frac{a_4}{7.6}=\frac{a_1}{7.6.4.3}$$
$$a_8=\frac{a_5}{8.7}=0$$

وهكذا ...

الحل للمعادلة التفاضلية المناظرة m = 0 هو

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{3.2}x^3 + \frac{a_1 x^4}{3.4} + \frac{a_0}{6.5.3.2}x^6 +$$
$$+\frac{a_1}{7.8.4.3}x^7 + ...)$$

$$= a_0\left(1 + \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^6}{6.5.3.2} + ...\right) +$$
$$+ a_1\left(x + \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^7}{7.6.4.3} + ...\right)$$

حيث a_1, a_0 ثوابت اختيارية

في حالة m = 1: من المعادلات (1)– (4) نحصل على $a_1 = a_2 = 0$ ومن ثم

$$a_3 = \frac{a_0}{4.3}, \qquad a_4 = \frac{a_1}{5.4}, \qquad a_5 = \frac{a_2}{6.5} = 0$$
$$a_6 = \frac{a_3}{7.6} = \frac{a_0}{7.6.4.3}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{8.7} = 0$$
$$a_8 = \frac{a_5}{9.8} = 0, \qquad a_9 = \frac{a_6}{10.9} = \frac{a_0}{10.9.7.4.3}$$

الحل المناظر لـ m = 1 يعطى من

$$y = x\,(a_0 + \frac{a_0}{4.3}x^3 + \frac{a_0}{7.6.4.3}x^7 + ...)$$

ملحوظة: الحل السابق هو عبارة عن جزء من الحل السابق (الحل عندما $m = 0$) (لاحظ المتسلسلة الثانية والحل الأول يعتبر حل عام للمعادلة التفاضلية المعطاة لأنه تحتوى على ثابتين اختياريين a_2 ,a_1.

٥/٢- حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات اللانهائية:

ليس من السهل حل كل المعادلات التفاضلية بالطرق السابقة حتى ولو كانت من الرتبة الأولى. وفي الأبواب السابقة قدمنا طرقاً خاصة لإيجاد حلول لبعض المعادلات التفاضلية ذات صيغة

محددة مثل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة أو معادلات يمكن تحويلها إلى أخرى ذات معاملات ثابتة أو الحصول على الحل الخاص للمعادلة المختزلة ... الخ. لذلك لابد من البحث عن طرق أخرى لإيجاد حلول بعض هذه المعادلات.

وأهم هذه الطرق من الناحية النظرية هي الحل في صورة متسلسلة لانهائية، وهناك طرق أخرى مثل الحلول التقريبية سواء كانت عددية أم متسلسلات تقريب.

وفي هذا الباب نقدم طريقة تايلور وطريقة فروبينيوس لحل المعادلات التفاضلية في صورة متسلسلة لانهائية.

أولاً: طريقة تايلور:

مفكوك تايلور للدالة $y=y(x)$ بالقرب من $x=x_0$ هو:

$$y(x)=y(x_0)+(x-x_0)y'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y''(x_0)+....=\sum_{k=0}\frac{(x-x_0)^k}{k!}y^{(k)}(x_0)$$

إذا وضعنا $x_0=0$ في مفكوك تايلور فإننا نحصل على مفكوك ماكلورين:

$$y(x)=y(0)+xy'(0)+\frac{x^2}{2!}y''(0)+\frac{x^3}{3!}y'''(0)+.....=\sum_{k=0}\frac{x^k}{k!}y^{(k)}(0)$$

ولحل المعادلة التفاضلية $y''+\varphi(x)y'+\psi(x)y=0$

نحسب المقادير $y''(x_0), y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), ...$ بمعلومية $y(x_0), y'(x_0)$ وذلك بالتفاضل المتتالي والتعويض عن $x=x_0$، وباستخدام مفكوك تايلور نحصل على y التي هي حل للمعادلة التفاضلية المعطاه.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$y''=x^2+y^2$، علماً بأن $y(0)=y'(0)=1$

الحل:

$$y'' = x^2 + y^2 \qquad \therefore \quad y''(0) = 1$$

$$y''' = 2x + 2yy' \qquad \therefore \quad y'''(0) = 2(1)(1) = 2$$

$$y^{(4)} = 2 + 2yy'' + 2y'^2 \qquad \therefore \quad y^{(4)}(0) = 2 + 2(1)(1) + 2(1) = 6$$

$$y^{(5)} = 2yy''' + 6y'y'' \qquad \therefore \quad y^{(5)}(0) = 2(1)(2) + 6(1)(1) = 10$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(6) + \frac{x^5}{5!}(10) + \ldots.$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{12} + \ldots.$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$y'' - (x-2)y' + 2y = 0$ بالقرب من $x = 2$

الحل:

نفرض أن $y(2) = c_1, \quad y'(2) = c_2$

بذلك يكون $y''(2) = -2y(2) = -2c_1$

بتفاضل المعادلة التفاضلية n من المرات باستخدام نظرية ليبنز نجد أن:

$$y^{(n+2)}(x) - (x-2)y^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) + 2y^{(n)}(x) = 0$$

بالتعويض عن $x = 2$ نحصل على:

$$y^{(n+2)}(x) = (n-2)y^{(n)}(x),$$

$$y^{(3)}(x) = -y'(x) = -c_2, \qquad y^{(4)}(x) = 0,$$

$$y^{(5)}(x) = y'''(x) = -c_2, \qquad y^{(6)}(x) = 0, \ldots$$

وبالتعويض في مفكوك تايلور يكون الحل العام هو:

$$y(x) = c_1 + (x-2)c_2 - \frac{(x-2)^2}{2!} 2c_1 - \frac{(x-2)^3}{3!} c_2 + 0 - \frac{(x-2)^5}{5!} c_2 + \dots$$
$$= c_1[1-(x-2)^2] + c_2\left[(x-2) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{(x-2)^5}{5!} - \dots\right]$$

مثال (٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + (x+1)y' + 2y = 0$$

في صورة متسلسلة لانهائية بالقرب من $x=0$ إذا كانت $y(c)=0$.

الحلـ:

بتفاضل هذه المعادلة n من المرات مستخدما نظرية ليبنز نحصل على

$$xy^{(n+2)}(x) + (1+n+x)y^{(n+1)}(x) + (n+2)y^{(n)}(x) = 0$$

ومنها نحصل على العلاقة:

$$y_{(0)}^{(n+1)} = -\frac{n+2}{n+1} y_{(0)}^{(n)}$$
$$\therefore y'(0) = -2y(0) = -2c, \qquad y''(0) = \frac{-3}{2} y'(0) = 3c$$
$$y(0) = \frac{-4}{3} y''(0) = -4y(0) = -4c, \qquad y^{(4)} = -5c$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين نحصل على

$$y = c\left[1 - 2x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{5}{4!}x^4 + \dots\right]$$

حيث **c** ثابت اختياري.

وبما أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية فيكون هذا الحل غير كامل (عام) لأنه لا يحتوي إلا على ثابت اختياري واحد.

من الأمثلة السابقة نلاحظ أن الحل بطريقة تايلور (أو ماكلورين) ليس عملياً وقد يكون شاقاً في بعض الحالات ، ويمكن حل مثل هذه المعادلات على هيئة متسلسلة لا نهائية على الصورة:

$$y = x^{\nu}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots), \qquad a_0 \neq 0$$

$$= x^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}$$

$$\therefore \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2}$$

وبالتعويض عن $y\,,\, y',\, y''$ في المعادلة التفاضلية (مثال (٣))

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)^2 x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu+2) x^{n+\nu} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $x^{\nu-1}$ بالصفر:

$$\therefore \; a_0 \nu^2 = 0 \qquad \therefore \; \nu^2 = 0 \qquad \therefore \nu = 0$$

بمساواة معامل الحد العام ($x^{n+\nu}$) بالصفر:

$$\therefore \; a_{n+1}(n+\nu+1)^2 + a_n (n+\nu+2) = 0$$

$$\therefore \; a_{n+1} = -\frac{n+\nu+2}{(n+\nu+1)^2} \; a_n$$

عندما $\nu = 0$ نجد أن

$$a_{n+1} = -\frac{n+2}{(n+1)^2}\ a_n$$

$$\therefore\ a_1 = -2a_0\ ,\ a_2 = -\frac{3}{4}a_1 = \frac{3}{2}a_0,\quad a_3 = -\frac{4}{9}a_2 = -\frac{4}{6}a_0,....$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

$$= a_0(1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^3 - ....)$$

وهو نفس الحل السابق . وإذا رمزنا لهذا الحل بالرمز y_1 فإنه يمكن الحصول على حل آخر y_2 مستقلاً عن y_1 يعطى من

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\ e^{-\int \phi(x)dx}\ dx$$

حيث $\phi(x)$ هو معامل y' بعد جعل معامل y'' الوحده

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{1+x}{x}dx}\ dx = y_1 \int \frac{e^{-x}}{x y_1^2}\ dx$$

ويعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية في الصورة

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-x}}{x y_1^2}\ dx$$

ثانياً: طريقة فروبينيوس:

لحل المعادلة التفاضلية (3) باستخدام طريقة فروبينيوس، وبفرض أن $x = 0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة لها (إذا كانت $x = x_0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة نضع $X = x - x_0$ وبذلك تكون $x = 0$ نقطة عادية أو شاذة منتظمة).

نفرض أن حل المعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0 \qquad (1)$$

على الصورة:

$$y = x^{\nu}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

حيث ν عدد حقيقي

$$\therefore y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$y'' + \varphi(x) y' + \psi(x) y = 0$$

نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)(n+\nu-1) x^{n+\nu-2} + \phi(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1} + \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+\nu)(n+\nu-1) + x(n+\nu)\phi(x) + x^2 \psi(x)] x^{n+\nu-2} = 0$$

وحيث أن $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة فيكون كل من $x\phi(x)$ ، $x^2\psi(x)$ يمكن كتابتها على الصورة

$$x\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$$

$$x^2\psi(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots \qquad (3)$$

و بالتعويض عن $x^2\psi(x), x\phi(x)$ بهاتين المتسلسلتين، وبمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-2})$ بالصفر (أي عندما n=0) نحصل على

$$a_0[\nu(\nu-1) + \alpha_0 \nu + \beta_0] = 0 \qquad , a_0 \neq 0$$

$$\therefore \nu(\nu-1) + \alpha_0 \nu + \beta_0 = 0$$

أو

$$\nu^2 + (\alpha_0 - 1)\nu + \beta_0 = 0 \qquad (4)$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في ν تسمى معادلة الأسس (Indicial equation)

وهذه المعادلة لها جذران ν_1 , ν_2 وسوف نرى أن واحداً من حلول المعادلة التفاضلية (1) دائماً سيكون في الصورة (2)، وهناك ثلاث صور للحل الثاني المستقل خطياً تبعاً للحالات الثلاث التالية:

الحالة الأولى: الجذران ν_1, ν_2 حقيقيان ومختلفان والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً

الحالة الثانية: $\nu_1 = \nu_2$ (الجذران متساويان)

الحالة الثالثة: الجذران $\nu_1 = \nu_2$ مختلفان بعدد صحيح

الحالة الأولى: الجذران مختلفان والفرق بينهما ليس عدداً صحيحاً:

هي أسهل الحالات والمعادلة (1) لها حلان مستقلان هما y_1, y_2 على الصورة

$$y_1 = x^{\nu_1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots), \qquad a_0 \neq 0$$
$$y_2 = x^{\nu_2}(a_0^* + a_1^* x + a_2^* x^2 + \dots), \qquad a_0^* \neq 0$$

وبالتعويض في (1) نحدد المعاملات $a_i, \ a_i^*$

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$2x^2 y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$ بالقرب من $x = 0$

الحل:

نجد أن $x = 0$ هي نقطة شاذة منتظمة و بالتالي يمكن تطبيق طريقة فروبينيوس . نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu) x^{n+\nu-1}, \dots$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2} \quad +7x(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}=0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}[2(n+\nu)(n+\nu-1)+7(n+\nu)-3]a_n x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}7a_n(n+\nu)x^{n+\nu+1}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة (x^{ν}) بالصفر

$$[2\nu(\nu-1)+7\nu-3]a_0=0 \qquad a_0\neq 0$$

$$\therefore 2\nu^2+5\nu-3=0 \qquad or \qquad (2\nu-1)(\nu+3)=0$$

$\therefore$ جذرا معادلة الأسس هما $\nu_2=-3$ ، $\nu_1=\frac{1}{2}$ والفرق بينهما $\frac{7}{2}$ ليس عدداً صحيحاً

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n[2(n+\nu)(n+\nu-1)+7(n+\nu)-3] \; +7a_{n-1}(n+\nu-1)=0$$

$$\therefore a_n=-\frac{7(n+\nu-1)}{(n+\nu+3)(2n+2\nu-1)}a_{n-1}, \qquad n\geq 1 \qquad (1)$$

عندما $\nu=\frac{1}{2}$ نجد من المعادلة (1) أن

$$a_n=-\frac{7(2n-1)}{2n(2n+7)}a_{n-1}, \qquad n\geq 1$$

$$\therefore a_1=-\frac{7}{18}a_0, \qquad a_2=-\frac{21}{44}a_1=\frac{49}{264}a_0,\ldots$$

وبذلك يكون الحل الأول y_1 هو

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}}=a_0x^{\frac{1}{2}}[1-\frac{7}{18}x+\frac{49}{264}x^2......]$$

وعندما $\nu=-3$ نجد أن المعادلة (1) تأخذ الصورة

$$a_n = -\frac{7(n-4)}{n(2n-7)}a_{n-1} \qquad n \ge 1$$

$$\therefore a_1 = -\frac{21}{5}a_0, \qquad a_2 = -\frac{7}{3}a_1 = \frac{49}{5}a_0 \ ,...$$

$$\therefore y_2 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x = xa_0\left(1-\frac{21}{5}x+\frac{49}{5}x^2-...\right)$$

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

حيث $c_1 \ , \ c_2$ ثابتان اختياريان.

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$4xy'' + 2y' + y = 0$ بالقرب من $x = 0$

الحل:

النقطة $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}, \qquad a_0 \ne 0$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية عن $y \ , \ y', \ y''$ نجد أن

$$4\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu)x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

or

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu)(4n+4\nu+2)x^{n+\nu-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-1})$ بالصفر

$$\therefore a_0[\nu(4\nu-2)] = 0 \qquad \therefore \nu = 0 \quad ,\nu = \frac{1}{2}$$

والفرق بين جذري معادلة الأسس عدداً ليس صحيحاً.

مساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$\therefore a_{n+1}(n+\nu+1)(4n+4\nu+2)+a_n=0$$

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{2(n+\nu+1)(2n+2\nu+1)}$$

وهذه العلاقة صحيحة لقيم $n=0,1,2,...$ وتسمى بالعلاقة التكرارية للمعاملات

i) بوضع $\nu=0$ في العلاقة التكرارية

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$\therefore a_1=-\frac{1}{2}a_0,\quad a_2=-\frac{a_1}{12}=\frac{a_0}{4!},\qquad a_3=-\frac{a_2}{30}...$$

والحل الأول للمعادلة هو

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....$$

$$=a_0(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+...)=a_0\cos\sqrt{x}$$

ii) بوضع $\nu=\frac{1}{2}$ في العلاقة التكرارية

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{a_n}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$\therefore a_1=-\frac{a_0}{3(2)}a_0,\quad a_2=-\frac{a_1}{5(4)}=\frac{a_0}{5!},\qquad a_3=-\frac{a_0}{7!},...$$

وبذلك يكون الحل الثاني هو

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\frac{1}{2}}=a_0x^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\dots\right]$$

$$=a_0\left[\sqrt{x}-\frac{(\sqrt{x})^3}{2!}+\frac{(\sqrt{x})^5}{4!}-\frac{(\sqrt{x})^7}{6!}+\dots\right]=a_0\sin\sqrt{x}$$

إذن الحل العام يعطى من

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$$

مثال (٣): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$$

بالقرب من $x=0$ إذا كان $2m$ عدد غير صحيح.

(معادلة بسل التفاضلية من الرتبة الميمية Bessel's equation of order m)

الحل:

معادلة بسل التفاضلية لها دور بالغ الأهمية في الرياضيات التطبيقية والفيزياء النظرية والعلوم الهندسية، وتستخدم هذه المعادلة كنموذج رياضي في مجالات شتى كحركة الأمواج والمرونة وحركة السوائل وغير ذلك.

نفرض أن الحل العام هو

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu},\qquad a_0\neq 0$$

وبالتعويض في معادلة بسل نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu+2}-m^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu+m)(n+\nu-m)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu+2}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة (x^{ν}) بالصفر

$$a_0(\nu+m)(\nu-m)=0 \qquad \therefore \nu_1=m \ ,\nu_2=-m$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu+1})$ بالصفر

$$a_1(1+\nu+m)(1+\nu-m)=0 \qquad \therefore a_1=0$$

لأن $(1+\nu+m)(1+\nu-m)\neq 0$

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n(n+\nu+m)(n+\nu-m)+a_{n-2}=0$$

$$\therefore a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+\nu+m)(n+\nu-m)}$$

or

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+\nu+2+m)(n+\nu+2-m)}$$

i) بوضع $\nu=0$ يكون

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2+2m)(n+2)}$$

$$\therefore a_2=-\frac{a_0}{2(2+2m)}=-\frac{a_0}{4(1+m)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2m)}=\frac{a_0}{4(8)(1+m)(2+m)},$$

$$a_6=-\frac{a_4}{12(3+m)}=-\frac{a_0}{4(8)(12)(1+m)(2+m)(3+m)},$$

$$a_1=a_3=a_5=...=0$$

الحل الأول يعطى من

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\nu_1}=a_0x^m[1-\frac{1}{4(1+m)}x^2+\frac{1}{4(8)(1+m)(2+m)}x^4-...]$$

ii) بوضع $-m$ بدلا من m في الحل الأول نحصل على الحل الثاني في الصورة

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n-m} \quad =a_0 x^{-m}[1-\frac{1}{4(1-m)}x^2+\frac{1}{4(8)(1-m)(2-m)}x^4-...]$$

ويكون الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية من الرتبة الميمية هو $y=c_1y_1+c_2y_2$.

الحالة الثانية: الجذران متساويان:

في الحالتين الثانية والثالثة لا يمكن الحصول إلا على حل واحد فقط المناظر لجذر من جذور معادلة الأسس رقم (4)

نعين الحل الأول y_1 في الصورة

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{\nu_1}(a_0+a_1x+a_2x^2+...)\\
\therefore y_2 &= y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\varphi(x)dx}dx\\
&= y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int\frac{1}{x}(a_0+a_1x+a_2x^2+...)dx}dx\\
&= y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-a_0\ln x}e^{-\int(a_1+a_2x+...)dx}dx\\
&= y_1\int\frac{1}{y_1^2x^{a_0}}\varphi(x)dx\\
&= y_1\int\frac{\varphi(x)}{\left(x^{\nu_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^2x^{a_0}}dx\\
\therefore y_2 &= y_1\int\frac{1}{x^{2\nu_1+a_0}}\psi(x)dx
\end{aligned}$$

حيث φ (x) متسلسلة لا نهائية

أيضاً (x) ψ متسلسلة لانهائية ولكن من معادلة الأسس رقم (4) نجد أن

$$\nu_1+\nu_2=1-\alpha_0, \qquad \nu_1-\nu_2=r$$

حيث r عدد صحيح أو صفر

$$\therefore 2v_1 + \alpha_0 = 1 + r$$
$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{\psi(x)}{x^{r+1}}\, dx$$

يمكن وضع $\psi(x)$ في الصورة

$$\psi(x) = \lambda x^r + R(x)$$

حيث *R(x)* متسلسلة لانهائية

$$y_2 = y_1 \int \left[\frac{\lambda}{x} + \frac{R(x)}{x^{r+1}} \right] dx = \lambda y_1 \ln x + S(x)$$

حيث S(x) متسلسلة لانهائية.

مثال (٤): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$ بالقرب من $x = 0$

(معادلة بسل التفاضلية من رتبة صفر)

الحل:

$\psi(x) = 1, \quad \phi(x) = \dfrac{1}{x}$ وبالتالي تكون $x = 0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+v}, \qquad a_0 \neq 0$$

وبالتعويض عن y', y'' في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu)^2 x^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة (x^{ν}) بالصفر والتالي له $(x^{\nu+1})$ أيضاً بالصفر نجد أن

$$a_0[\nu(\nu)] = 0 \quad \therefore \nu^2 = 0 \quad \therefore \quad \nu_1 = \nu_2 = 0$$
$$a_1[(1+\nu)^2] = 0 \quad \therefore \quad a_1 = 0$$

بمساواة معامل الحد العام $(x^{n+\nu})$ بالصفر

$$a_n (n+\nu)^2 + a_{n-2} = 0, \qquad \therefore a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\nu)^2}$$
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+\nu+2)^2} \tag{1}$$

وهي العلاقة التكرارية للمعاملات

$$\because a_1 = 0 \qquad \therefore a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$$

عندما $\nu = 0$ يكون

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2}$$
$$\therefore a_2 = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{1}{2^2 4^2} a_0, \quad ...$$

الحل الأول هو

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$
$$= a_0 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^2 4^2} x^4 - ...\right)$$

لايجاد الحل الثاني بمعلومية الحل الأول y_1 نفرض أن

$$y_1 = y_1(x,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu) x^{n+\nu} = a_0 x^{\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) x^{n+\nu}$$

ونعوض عن $y_1(x,\nu)$ في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية المعطاه مع الأخذ في الاعتبار أن a_n دالة في المتغير ν

$$x^2\frac{d}{dx^2}[y_1(x,\nu)]+x\frac{d}{dx}[y_1(x,\nu)]+x^2y_1(x,\nu)$$
$$=x^2\frac{d}{dx^2}[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+\nu}]+x\frac{d}{dx}[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\nu)x^{n+\nu}]+x^2[a_0x^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n+\nu}]$$
$$=x^2\frac{d}{dx^2}(a_0x^\nu)+x\frac{d}{dx}(a_0x^\nu)=a_0\nu^2x^\nu$$

أي بالتعويض في المعادلة التفاضلية عن y,y',y'' ونقارن المعاملات فنجد أن جميع المعاملات تنعدم إلا معامل الحد الأول، وبتفاضل هذه المعادلة جزئياً بالنسبة إلى ν نحصل على

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)+x^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)=a_0\nu^2x^\nu\ln(x)\ +2a_0\nu x\,\nu$$

وبالتعويض عن $\nu=0$ نجد أن الطرف الأيمن ينعدم وبذلك يكون

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}\Big|+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)\Big|_{\nu=0}+x^2\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}=0$$

وبالتالي يكون $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}$ حل آخر للمعادلة التفاضلية

$$\therefore y_2=\frac{\partial y_1}{\partial \nu}_{\nu=0}, \qquad y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\nu)x^{n+\nu}$$
$$\therefore y_2=x^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \nu}a_n(\nu)x^n+(x^\nu\ln x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\nu)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \nu}a_n(\nu)x^{n+\nu}+y_1\ln x$$

أي أن: متسلسلة لانهائية + ln x . (الحل الأول) = y_2

أي أنه إذا كان جذرا معادلة الأسس متساويين وكان y_1 الحل الأول للمعادلة التفاضلية فإن $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}$ حل آخر عند التعويض عن قيمة $\nu=\nu_1$

من العلاقة (1) يكون

$$a_2=-\frac{a_0}{(\nu+2)^2},\qquad a_4=\frac{a_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2},\quad a_6=-\frac{a_0}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2},\ldots$$

نفرض أن $b_1=\dfrac{1}{(\nu+2)^2}$

إذن

$$\ln b_1=-2\ln(\nu+2)$$

$$\frac{1}{b_1}\frac{\partial b_1}{\partial \nu}=\frac{-2}{\nu+2}\qquad \therefore\ \frac{\partial b_1}{\partial \nu}=\frac{-2}{(\nu+2)^3}\qquad \therefore\ \frac{\partial b_1}{\partial \nu}_{\nu=0}=\frac{-1}{2^2}$$

ونفرض أن $b_2=\dfrac{1}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2}$

$$\therefore \ln b_2=-2\ln(\nu+2)-2\ln(\nu+4)$$

$$\therefore \frac{1}{b_2}\frac{\partial b_2}{\partial \nu}=\frac{-2}{\nu+2}-\frac{2}{\nu+4}$$

$$\therefore\ \frac{\partial b_2}{\partial \nu}=\frac{-2}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2}[\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+4}]$$

$$\therefore\ \frac{\partial b_2}{\partial \nu}_{\nu=0}=\frac{-2}{4^2 2^2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=\frac{-1}{4^2 2^2}(1+\frac{1}{2})\ ,\ldots$$

وبالمثل $b_3=\dfrac{1}{(\nu+2)^2(\nu+4)^2(\nu+6)^2}$

فيكون $\dfrac{\partial b_3}{\partial \nu}_{\nu=0}=\dfrac{-1}{6^2 4^2 2^2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

والحل الثاني y_2 يعطى من

$$y_2 = y_1 \ln x + a_0\left(\frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1+\frac{1}{2}}{2^2.4^2}x^4 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2^2.4^2.6^2}x^6 - ....\right)$$

ويكون الحل العام هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

والطريقة العامة لحل المعادلة التفاضلية $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$ بالقرب من النقطة الشاذة المنتظمة $x = 0$ وعندما يكون جذرا معادلة الأسس متساويان نوجد أولاً معادلة الأسس ونفرض أن جذراها هما $\nu_1 \; , \; \nu_2$ حيث $\nu = \nu_1 = \nu_2$

$$\therefore y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = x^{\nu}[a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\nu)x^n]$$

وبالتعويض عن y, y', y'' في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$x^2 y_1'' + x(x\varphi(x))y_1' + x^2\psi(x)y_1 = a_0 x^{\nu}(\nu - \nu_1)^2$$

$$\therefore x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right) + x(x\varphi(x))\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right) + x^2\psi(x)\frac{\partial y_1}{\partial \nu}$$

$$= a_0[x^{\nu}(\ln x)(\nu - \nu_1)^2 + 2(\nu - \nu_1)x^{\nu}]$$

وبالتعويض عن $\nu = \nu_1$ يكون الطرف الأيمن في هذه المعادلة يساوي الصفر.

أي أن $\left(\frac{\partial y_1}{\partial \nu}\right)_{\nu=\nu_1}$ حل للمعادلة التفاضلية أي أن الحل الثاني هو

$$y_2 = \frac{\partial y_1}{\partial \nu}_{\nu=\nu_1} = y_1 \ln x + x^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial a_n}{\partial \nu}_{\nu=\nu_1} x^n$$

الحل الثاني = الحل الأول . ln x + متسلسلة لا نهائية.

مثال (٥): حل المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' + 3xy' + (1-2x)y = 0$$ بالقرب من $x = 0$

الحل:

النقطة $x=0$ نقطة شاذة منتظمة.

نفرض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\nu+1) x^{n+\nu} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+\nu+1} = 0$$

بمساواة معامل أصغر قوة (x^{ν}) بالصفر

$$(\nu+1)^2=0 \qquad \therefore \nu=-1\ ,\ 1$$

بمساواة الحد التالي ($x^{\nu+1}$) بالصفر

$$(\nu+2)^2 a_1 - 2a_0 = 0, \qquad a_1 \neq 0$$

بساواة معامل الحد العام ($x^{n+\nu}$) بالصفر

$$a_n = \frac{2a_{n-1}}{(n+\nu+1)^2}, \qquad n \geq 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{2a_0}{(\nu+2)^2}, \quad a_2 = \frac{2a_1}{(\nu+3)^2} = \frac{4a_0}{(\nu+2)^2(\nu+3)^2}, \ldots$$

$$a_n = \frac{2^n a_0}{(\nu+2)^2(\nu+3)^2 \ldots (\nu+n+1)^2}$$

عندما يكون الحل الأول هو $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n}$

حيث:

$$a_n = \frac{2^n a_0}{1^2.2^2.3^2...n^2} = \frac{2^n a_0}{(n!)^2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{2a_0}{1^2}, \quad a_2 = \frac{2^2 a_0}{1^2.2^2}, \quad a_3 = \frac{2^3 a_0}{1^2.2^2.3^2}, ...$$

$$\therefore y_1 = a_0 x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n x^n}{(n!)^2}$$

ويكون الحل الثاني

$$y_2 = \left[\frac{\partial}{\partial \nu} y_1(x, \nu) \right]_{\nu=-1}$$

$$= y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \nu}_{\nu=-1} x^{n-1}$$

نعلم أن

$$a_n(\nu) = \frac{2^n a_0}{[(\nu+2)(\nu+3)...(\nu+n+1)]^2}$$

$$\therefore \ln a_n(\nu) = n \ln 2 + \ln a_0 - 2[\ln(\nu+2) + \ln(\nu+3) + ... + \ln(\nu+n+1)]$$

وبالتفاضل جزئياً بالنسبة لـ ν يكون

$$\frac{\partial a_n}{\partial \nu} = -2a_n(\nu)[\frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{\nu+3} + ... + \frac{1}{\nu+n+1}]$$

$$\therefore \frac{da_n}{d\nu}_{\nu=-1} = -2\frac{2^n}{(n!)^2}[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}]$$

$$\therefore y_2 = y_1 \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^n}{(n!)^2} H_n$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \qquad x \geq 0$$

الحالة الثالثة: جذرا معادلة الأسس مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح:

أ) إذا كان أحد جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات غير محددة

مثال (٦): حل معادلة لجندر التفاضلية من الرتبة الميمية الآتية

$$(1-x^2)y''-2xy'+m(m+1)y=0:$$

بالقرب من نقطة الأصل حيث m ثابت حقيقي.

الحل:

نفرض أن الحل على الصورة $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}$

وبالتعويض عن $y\ ,y',\ y''$ في معادلة لجندر التفاضلية

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)x^{n+\nu}+m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}=0$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu)(n+\nu-1)x^{n+\nu-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)x^{n+\nu}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة $(x^{\nu-2})$ بالصفر

$$a_0\nu(\nu-1)=0 \qquad \nu_1=0,\nu_2=1$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu-1})$ بالصفر يكون

$$a_1\nu(\nu+1)=0$$

إذن a_1 كمية غير محدودة عندما $\nu=0$

بمساواة معامل الحد العام بالصفر نحصل على

$$a_{n+2}(n+\nu+2)(n+\nu+1)-a_n(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)=0$$

$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+\nu+m+1)(n+\nu-m)}{(n+\nu+2)(n+\nu+1)}\ a_n$$

الحل المناظر لـ $\nu=0$ هو حل مباشر

$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+m+2)(n-m+1)}{(n+3)(n+2)}\ a_n$$

فيكون

$$a_2=\frac{(m+2)(1-m)}{(3)(2)}\ a_0,\qquad a_4=\frac{(4+m)(3-m)}{(5)(4)}\ a_2$$

$$\therefore a_4=\frac{(3-m)(4+m)(1-m)(2+m)}{5!}a_0$$

$$a_1=a_3=a_5=\ldots=a_9=0$$

ويكون الحل المناظر للجذر $\nu=0$ هو

$$y=a_0x[1+\frac{(1-m)(2+m)}{3!}x^2+\frac{(2+m)(1-m)(3-m)(4+m)}{5!}x^4+\ldots]$$

$$=a_0[x-\frac{(m-1)(2+m)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5-\ldots]$$

عندما $\nu=0$ فإن

$$\therefore a_{n+2}=\frac{(n+m+1)(n-m)}{(n+2)(n+1)}\ a_n$$

$$\therefore a_2=-\frac{m(m+1)}{2!}\ a_0,\qquad a_4=-\frac{(2-m)(3+m)}{4(3)}\ a_2=\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}\ a_0$$

$$,\ a_6=-\frac{(4-m)(5+m)}{6(5)}\ a_4=-\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)(m-4)(m+5)}{6!}\ a_0,\ldots$$

$$a_3=\frac{(1-m)(2+m)}{3!}\ a_1,\qquad a_5=\frac{(3-m)(4+m)}{5(4)}\ a_3=\frac{(m-1)(m+2)(m-3)(m+4)}{5!}\ a_1,\ldots$$

ويكون الحل المناظر لـ $\nu=0$ هو

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n}$$
$$=a_0\left[1-\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}x^4+...\right]$$
$$+a_1\left[x-\frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3+\frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}x^5-...\right]$$

وهذا الحل يمثل الحل العام لأنه يحتوي على ثابتين اختياريين a_0,a_1 وقد حصلنا عليه فقط بقيمة $\nu=0$ التي تؤدي إلى معاملات غير محددة.

ونلاحظ أن معامل a_1 هو المتسلسلة التي حصلنا عليها عندما $\nu=0$

ب) إذا كان جذري معادلة الأسس يؤدي إلى معاملات لانهائية:

مثال (٧): اوجد الحل العام لمعادلة بسل التفاضلية:

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$ بالقرب من $x=0$

الحل:

النقطة $x=0$ نقطة شاذة منتظمة لأن

$$x\,\phi(x)=x.\frac{1}{x}=1=\alpha_0,\quad x^2\psi(x)=x^2-1=\beta_0+\beta_2x^2$$

نفرض أن الحل على الصورة

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\nu},\qquad a_0\neq 0$$

وبالتعويض عن y ومشتقاتها في المعادلة التفاضلية نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+\nu)(n+\nu-1)+(n+\nu)-1]x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2}=0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\nu-1)(n+\nu+1)x^{n+\nu}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu+2}=0$$

بمساواة معامل أصغر قوة (x^{ν}) بالصفر يكون

$$a_0(\nu-1)(\nu+1)=0, \quad \nu_1=1, \quad \nu_2=-1$$

بمساواة معامل القوة التالية $(x^{\nu+1})$ بالصفر

$$\therefore a_1\nu(\nu+2)=0 \qquad \therefore a_1=0$$

بمساواة معامل الحد العام بالصفر

$$\therefore a_n(n+\nu-1)(n+\nu+1)=-a_{n-2}$$

$$\therefore a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+\nu+1)(n+\nu+3)}$$

$$\therefore a_2=-\frac{a_0}{(n+1)(n+3)},$$

$$a_4=-\frac{a_2}{(n+3)(n+5)}=\frac{a_0}{(n+1)(n+3)^2(n+5)}, \ldots,$$

$$a_1=a_3=a_5=\ldots=0$$

عندما $\nu=1$ نحصل على الحل الأول y_1 في الصورة

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=a_0 x[1-\frac{1}{2(4)}x^2+\frac{1}{2(4)^2 6}x^4-\ldots]$$

لإيجاد الحل الثاني y_2 نجد أنه إذا وضعنا $\nu=0$ في $a_2, a_4, \ldots$ فإن المقامات تنعدم وتصبح الحدود لانهائية علماً بأن $a_1=0$ ويمكن إيجاد الحل بالطريقة التالية:

نعلم أن

$$y=a_0\left[x^{\nu}-\frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)}x^{\nu+2}+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+3)^2(\nu+5)}x^{\nu+4}-\dots\right]$$

يمكن التخلص من صعوبة وجود في $(\nu+1)$ بالمقام بكتابة $k\neq 0 \quad a_0=k(\nu+1),$
ونحصل على

$$y=k\,x^{\nu}[(\nu+1)-\frac{1}{(\nu+3)}x^2+\frac{1}{(\nu+3)^2(\nu+5)}x^4-\dots] \qquad (1)$$

وبالتعويض عن هذه القيمة في المعادلة التفاضلية السابقة

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=k(\nu+1)^2(\nu-1)x^{\nu}$$

ونظراً لأن $\frac{\partial}{\partial\nu}[k(\nu+1)^2(\nu-1)x^{\nu}]_{\nu=-1}$ تساوي صفر فإنه ينتج كما في الحالة الثانية أي أن $\frac{\partial}{\partial\nu}y(x,\nu)_{\nu=-1}$ يكون حلاً آخر للمعادلة التفاضلية المعطاه.

نفرض أن

$$b_1=\frac{1}{\nu+3}\ , \qquad \therefore\frac{\partial b_1}{\partial\nu}=\frac{-1}{(\nu+3)^2} \qquad \therefore\frac{\partial b_1}{\partial\nu}=\frac{-1}{4}\ ,$$

$$b_2=\frac{1}{(\nu+3)^2(\nu+5)} \qquad \therefore\ln b_2=-2\ln(\nu+3)-\ln(\nu+5)$$

$$\therefore\frac{1}{b_2}\frac{\partial b_2}{\partial\nu}=\frac{-2}{\nu+3}-\frac{1}{\nu+5}$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial\nu}_{\nu=-1}=\frac{1}{16}(-1-\frac{1}{4})=\frac{-5}{64}\ ,\dots$$

$$\therefore y_2=\frac{\partial y}{\partial\nu}_{\nu=-1}=k\,x^{-1}\left[\frac{-1}{2}x^2+\frac{1}{16}x^4-\dots\right]\ln x+k\,x^{-1}\left[1+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{64}x^4+\dots\right]$$

$$=-\frac{k}{2}(\ln x)\left[x-\frac{x^3}{8}+\frac{x^5}{192}-\dots\right]+k\left[x^{-1}+\frac{x}{4}-\frac{5}{64}x^3+\dots\right]$$

$$=-y_1\ln x+k\,x^{-1}\left(1+\frac{x^2}{4}-\frac{5}{64}x^4+\dots\right)$$

ويكون الحل العام هو $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

نلاحظ أن الحل الثاني $y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \nu} x^{n+\nu}$ عندما $\nu = 0$

٣/٥- تمارين:

(١) اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية فى صورة متسلسلة لانهائية بالقرب من $x = 0$

$$(1)\; 2x \frac{d^2 y}{dx^2} + (3-2x)\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$(2)\; 3y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(3)\; 2(x - x^2) y'' + (1-9x) y' - 3y = 0$$

$$(4)\; (1-x^2) y'' - 5xy' - 3y = 0$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b$$

$$(5)\; y^{(4)} + y = 1$$

إذا كان

$$y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0, \; y''''(0) = 1$$

$$(6)\; xy'' + xy' + (x^2 - 1) y = 0$$

$$(7)\; x(1-x) y'' - 3xy' = 0$$

$$(8)\; (x + x^2 + x^3) y'' + 3x^2 y' - 2y = 0$$

$$(9)\; y'' + x^2 y' = 0$$

$$(10)\; (2 + x^2) y'' + xy' + (1+x) y = 0$$

(٢) باستخدام طريقة تايلور اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

1) $y' = y + x^2, \qquad y(0) = 1$

2) $y'' - x^2 y'' - xy' + 4y = 0, \qquad y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$

3) $y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0, \qquad y(1) = c_1,\ y'(1) = c_2$

4) $y'' - \dfrac{y'}{1-x} + \dfrac{x}{1-x} y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

5) $y'' + x^2 y = 1 + x + x^2, \qquad y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$

6) $y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

(٣) باستخدام طريقة فروبينيوس اوجد الحل العام للمعادلات الآتية بالقرب من x=0

1) $2x^2 y'' - xy' + (1 - x^2) y = 0$

2) $4x^2 y'' + 4xy' + y = 0$

3) $2xy'' + (2x+1)y' + 3y = 0$

4) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0$

5) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{9}\right) y = 0$

6) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4) y = 0$

7) $xy'' + y' + y = 0$

8) $xy'' + (x+1)y' + 2y = 0$

9) $(1 - x^2) y'' - 2xy' + \dfrac{3}{4} y = 0$

الفصل السادس

تحويلات لابلاس

Laplace Tranformations

تعريف تحويل لابلاس:

يعرف تحويل لابلاس للدالة $f\ (t)$ على النحو التالى:

$$\ell\{f\ (t)\} = F(s) = \int_{o}^{\infty} e^{-st} f\ (t) dt \qquad (1)$$

ويقال أن التحويل موجود أو غير موجود وفقا لتقارب أو تباعد التكامل فى (1) وعادة ما يوجد عدد حقيقى s_o بحيث يكون التكامل فى (1) موجودا عندما $s > s_o$

ولا يوجد لقيم $s \leq s_0$ يطلق على قيم $s > s_0$ التي يوجد عندها التكامل (1) بفترة تقارب أو وجود المقدار $\ell\{f\ (t)\}$

يسمى الرمز ℓ فى (1) بمؤشر تحويل لابلاس ويمكننا أن نبين أن ℓ ما هو إلا مؤشر خطى أى أن

$$\ell\{c_{1}F_{1}(t) + c_{2}F_{2}(t)\} = c_{1}\ell\{F_{1}(t)\} + c_{2}\ell\{F_{2}(t)\}$$

تحويلات لابلاس لبعض الدول الأولية: -

$$(1)\ell\{t^{2}\} = \int_{o}^{\infty} t^{2} e^{-st} dt = \left\{t^{2}\frac{e^{-st}}{-s}\right\}_{o}^{\infty} + \frac{n}{s}\int_{o}^{\infty} e^{-st} t dt, \quad s > 0$$

$$= 0 + \frac{2}{s}\left\{-t\frac{e^{-st}}{s}\right\}_{o}^{\infty} + \frac{2}{s^{2}}\int_{o}^{\infty} e^{-st} dt = 0 + \frac{2}{s^{2}}\left\{\frac{e^{-st}}{s}\right\}_{o}^{\infty} = \frac{2}{s^{3}} \qquad (2)$$

$$(2)\ell\{t^{n}\} = \int_{o}^{\infty} t^{n} e^{-st} dt = \left\{t^{n}\frac{e^{-st}}{-s}\right\}_{o}^{\infty} + \frac{n}{s}\int_{o}^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (3)$$

$$(3)\ell\{\cos \alpha t\} = R\int_{o}^{\infty} e^{-st} e^{iat} dt = R\int_{o}^{\infty} e^{-(s-ia)t} dt \qquad (4)$$

حيث R هو الجزء الحقيقي للدالة

$$(4)\ R\left\{\frac{e^{-(s-ia)t}}{-(s-ia)}\right\}_0^{\infty}=R\left\{\frac{1}{(s-ia)}\right\}=R\left\{\frac{s+ia}{s^2+a^2}\right\}=\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0(5)$$

$$(5)\ \ell\{\sin at\}=\operatorname{Im}\int_o^{\infty}e^{-st}e^{iat}dt=\operatorname{Im}\int_o^{\infty}e^{-(s-ia)t}dt=$$

$$=\operatorname{Im}\left\{\frac{s+ia}{s^2+a^2}\right\}=\frac{a}{s^2+a^2},\quad s>0 \qquad (6)$$

$$(6)\quad \ell\{\sinh at\}=\frac{1}{2}\ell\{e^{at}-e^{-at}\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{a}{s^2-a^2} \qquad (7)$$

هكذا وبنفس الطريقة يمكن ايجاد $\ell\{\cosh at\}$

$$(6)\ \ell\{\cos h\alpha t\}=\frac{1}{2}\ell\{e^{\alpha t}+e^{-at}\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right\}=\frac{s}{s^2-a^2} \quad (8)$$

نظرية (١):

بفرض أن $\ell\{F(t)\}=f\ (s)$ فإن $\ell\{e^{at}F(t)\}=f\ (s+a)$

البرهان:

$$\therefore \ell\{F(t)\}=\int_o^{\infty} e^{-st}F(t)dt$$

$$\therefore \ell\{e^{-at}F(t)\}=\int_o^{\infty} e^{-st}e^{-at}F(t)dt=\int_o^{\infty} e^{-(s+a)t}F(t)dt,\quad s>-a$$

وهذه النتيجة هى نفس f (s) مع استبدال s بـ s+a وعليه فإن

$$\ell\{F(t)\}=f\ (s)\Rightarrow \ell\{e^{at}F(t)\}=f\ (s+a)$$

نظرية ٢:

بفرض أن

$$\ell\{F(t)\}=f\ (s)$$

$$\ell\{t\ F(t)\}=-\frac{d}{ds}\{f\ (s)\}$$

البرهان:

$$\because \ell\{F(t)\} = f(s) = \int_o^\infty e^{-st} F(t)dt$$

$$\therefore \frac{d}{ds}\{f(s)\} = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)dt +$$

$$+\left(\lim_{M\to\infty} e^{-sM} F(M)\right)\frac{\partial M}{\partial s} - \left(\lim_{m\to\infty} e^{-sm} F(m)\right)\frac{\partial m}{\partial s}$$

$$= \int_o^\infty -te^{-st} F(t)dt = -\int_o^\infty e^{-st} \ tF(t)dt = -\ell\{tF(t)\}$$

$$\therefore \ell\{tF(t)\} = -\frac{d}{ds}\{f(s)\}$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$\ell\{t^2 F(t)\} = \ell\{t\,[tF(t)]\} = -\frac{d}{ds}\left[-\frac{d}{ds}\{f(s)\}\right]$$

$$\therefore \ell\{t^2 F(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} f(s)$$

وبتكرار نفس الطريقة يمكن باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى اثبات أن

$$\ell\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\{f(s)\}$$

نظرية ٣:

بفرض أن $\ell\{F(t)\} = f(s)$ فإن

$$\ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)ds$$

شريطة أن النهاية $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t}$ تكون موجودة

البرهان:

$$\int_s^\infty f(s)ds = \int_s^\infty \left\{\int_o^\infty e^{-st}F(t)dt\right\} ds$$

$$= \int_o^\infty \int_s^\infty e^{-st}F(t)ds\ dt = \int_o^\infty \left\{\frac{e^{-st}F(t)}{-t}\right\}_0^\infty dt$$

$$= \int_o^\infty \left\{(0)-[\frac{e^{-st}F(t)}{-t}]\right\}dt$$

$$\int_o^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}dt = \ell\{\frac{F(t)}{t}\}$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(s)ds$$

مثال(١): اوجد $\ell\{t^2e^{-t}\}$

الحل:

$$\ell\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} \qquad \therefore \ell\{t^2e^{-t}\} = \frac{2}{(s+1)^3}$$

مثال(٢): اثبت أن

(1) $\ell\{\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}$

(2) $\ell\{3\sin 5t\} = \dfrac{15}{s^2+25}$

(3) $\ell\{e^{-3t}\sin 2t\} = \dfrac{2}{(s+3)^2+4}$

(4) $\ell\{e^{-t}\cos h\, 4t\} = \dfrac{s+1}{(s+1)^2-16}$

$$(5)\ell\{\cos 3t+\sin 3t\}=\frac{s}{s^2+9}+2.\frac{3}{s^2+9}$$

$$(6)\ell\{e^{-3t}(1+t^2)\}=\frac{1}{s+3}+\frac{2}{(s+3)^3}$$

١/٦- جدول تحويلات لابلاس:

F(t)	$L\{F(t)\}=f(s)$
a	$a/s\,,\quad s>a$
e^{at}	$1/(s-a)\,,\quad s>0$
t	$1/s^2\,,\quad s>0$
$t^n\ ,n=1,2,3,.....$	$n!/s^{n+1}$
$\sin at$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos at$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin h\,at$	$\alpha/(s^2-\alpha^2),\quad \|s\|>a$
$\cos h\,at$	$s/(s^2-a^2)\,,\quad \|s\|>a$
$t\sin at$	$2as/(s^2+a^2)^2$
$t\cos at$	$(s^2-a^2)/(s^2+a^2)^2$
$e^{at}F(t)$	$f(s+a)$
$t^nF(t)$	$(-1)^n d^n/ds^n\{f(s)\}$
$F(t)/t$	$\int_s^{\infty} f(s)ds\,,\ \lim_{t\to 0} F(t)/t\quad exists$
$e^{-at}t^n$	$n!/(s+a)^{n+1}$
$e^{-at}\sin at$	$a/\{(s-a)^2+a^2\}$
$e^{-at}\cos at$	$(s+a)/\{(s+a)^2+a^2\}$
$e^{-at}\cos bt$	$(s+a)/\{(s+a)^2+b^2\}$
$e^{-at}t\sin bt$	$2b(s+a)/\{(s+a)^2+b^2\}^2$

مثال(٣): اوجد تحويلات لابلاس التالية:

$$(i)\ \ell\{t\sin 3t\},\qquad (ii)\ \ \ell\{t\cos at\}$$

الحل:

$$(i)\ \ell\{\sin 2t\}=\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$\therefore\ \ell\{t\sin 2t\}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

$$(ii)\ \ell\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\therefore\ \ell\{t\cos at\}=\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$\ell\{t^2\cos at\}=\frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$

مثال(٤): اوجد $\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

الحل:

$$\ell\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1},\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

طبقاً لنظرية (٣) يكون لدينا

$$\ell\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}ds=[\tan^{-1}s]_s^\infty$$

$$=\pi/2-\tan^{-1}s$$

كذلك

$$\ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}$$

$$\ell\{\cos 2t-\cos 3t\}=\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+9},$$

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{-2\sin 2t-3\sin 3t}{1}\right\}=0$$

(وذلك باستخدام قاعدة لوبتيال)

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t}\qquad exists$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=\int_o^{\infty}\left\{\frac{s}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+9}\right\}ds$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\ell n(s^2+4)-\frac{1}{2}\ell n(s^2+9)\right\}_s^{\infty}=\frac{1}{2}\left\{\ell n\frac{s^2+4}{s^2+9}\right\}_s^{\infty}$$

$$s\to\infty\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{s\to\infty}\ell n\frac{s^2+4}{s^2+9}=\frac{1}{2}\ell n\lim_{s\to\infty}\frac{s^2+4}{s^2+9}=\frac{1}{2}\ell n1=0$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{\cos 2t-\cos 3t}{t}\right\}=-\frac{1}{2}\ell n\left\{\frac{s^2+4}{s^2+9}\right\}=\ell n\left(\frac{s^2+9}{s^2+4}\right)^{1/2}$$

مثال(٥): اوجد $\ell\left\{\frac{1-\cos h\,t}{t}\right\}$

الحل:

$$\therefore \ell\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos h\,t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin \mathrm{h}t}{1}=0$$

(باستخدام قاعدة لوبتيال)

$$\ell\{1-\cos h\,t\}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+h^2}$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{1-\cos h\,t}{t}\right\}=\int_s^\infty \left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-1}\right\}ds$$

$$=\left\{\ell ns-\frac{1}{2}\ell n(s^2-1)\right\}_s^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\ell n(\frac{s^2}{s^2-1})\right\}_s^\infty=\frac{1}{2}\left\{0-\ell n\,\frac{s^2}{s^2-1}\right\}$$

$$=\ell n\left\{\left(\frac{s^2}{s^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}=\ell n\left(\frac{s^2-1}{s^2}\right)^{1/2}$$

$$\left\{s\to\infty\Rightarrow \ell n\,\frac{s^2}{s^2-1}\to \ell n1=0\right\}$$

مثال(٦): اوجد $\ell\left\{\dfrac{e^{2t}-1}{t}\right\}$

الحل:

$$\because \lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}\ 2e^{2t}=2,$$

$$\ell\{e^{2t}-1\}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s},\qquad s>2$$

$$\therefore \ell\left\{\frac{e^{2t}-1}{t}\right\}=\int_s^\infty \left\{\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s}\right\}ds$$

$$=\{(\ln(s-2)-\ln s)\}_s^\infty=\left\{\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)\right\}_s^\infty$$

$$=0-\ln\left(\frac{s-2}{s}\right)=\ln\left(\frac{s}{s-2}\right)$$

٢/٦- تحويلات لابلاس العكسية:

إذا كانت $\ell\{F(t)\}=f(s)$ فإن $F(t)$ تسمى تحويل لابلاس العكسى للدالة $f(s)$ وتكتب

$$\ell^{-1}\{f(s)\}=F(t)=\int_{o}^{\infty}e^{-st}f(s)ds$$

مثال(٧): إذا كان $\ell\{t\}=\dfrac{1}{s^2}$ فإن $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\}=t$

مثال(٨): اثبت أنه إذا كان $\ell\{e^{at}\}=\dfrac{1}{s-a},\quad s>a$

فإن $\ell^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$

(يترك الحل للقاريء)

مثال(٩): اوجد تحويل لابلاس العكسي لكل من الدوال الآتية:

$$(i)\ \frac{s}{s^2-9}\qquad (ii)\ \frac{s+3}{(s+3)^2-9}\qquad (iii)\ \frac{1}{s^2+2s-3}$$

$$(iv)\ \frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\qquad (v)\ \frac{3!}{s^4}\ \frac{5}{(s^2+9)}\qquad (vi)\ \frac{n!}{s^{n+1}}$$

الحل:

$$(i)\ \ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\}=\cosh 3t$$

$$(ii)\ \ell^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2-9}\right\}=e^{-3t}\cosh 3t$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$(iii)\ \ell^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s-3}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{s-1}+\frac{\frac{1}{4}}{s+3}\right\}$$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{4}}{s-1}+\ell^{-1}\frac{\frac{1}{4}}{s+3}\right\}=-\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{4}e^{-3t}$$

$$(iv)\ \ell^{-1}\left\{\frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\right\}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\ell^{-1}\left\{\frac{2s-6}{(s-2)(s-4)}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-4}\right\}$$

$$=\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=e^{2t}+e^{4t}$$

$$(v)\ell^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}+\frac{s}{s^2+9}\right\}=\ell^{-1}\left\{\frac{3!}{s4}\right\}+\ell^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}=e^{t^3}+\cos 3t$$

$$(vi)\ell^{-1}\{n!/_{s^{n+1}}\}=t^n$$

٣/٦- تحويلات لابلاس للمشتقات:

سوف نجد أن تحويلات لابلاس تساعد فى إيجاد وسائل مفيدة لحل المعادلات التفاضلية. ولهذا السبب يكون من اللازم لنا أن نوجد تحويلات لابلاس للمشتقات. لذلك نعتبر النظريات التالية:

نظرية (١): بفرض أن $F'(t)$ هى المشتقة الأولى للدالة $F(t)$ يكون لدينا

$$\ell\{F'(t)\}=s\ell\{F(t)\}-F(0)=sf(s)-F(0)$$

البرهان:

$$\ell\{F'(t)\} = \int_{o}^{\infty} e^{-st} F'(t) dt$$

بإجراء التكامل بالتجزئ و وضع

$$dv = F'(t)dt, \quad u = e^{-st}$$

نحصل على

$$\ell\{F'(t)\} = \{e^{-st} F(t)\}_0^{\infty} + s\int_{0}^{\infty} F(t) e^{-st} dt$$

$$t \to \infty \quad \Rightarrow e^{-st} F(t) = 0$$

$$\ell\{F'(t)\} = -F(0) + s\,\ell\{F(t)\}$$
$$= sf(s) - F(0) = s\,\ell\{F(t)\} - F(0)$$

وهو المطلوب.

ويمكن تعميم النظرية السابقة كما يلى:

نظرية (٢): بفرض أن $F^{(n)}(t)$ هى المشتقة النونية للدالة $F^{'}(t)$ يكون لدينا

$$\ell\{F^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) \ldots - F^{(n-1)}(0)$$

البرهان:

يمكن البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي كما فى النظرية السابقة.

والآن نفرض أن

$$F''(0) = x_2, \quad F'(0) = x_1, \quad F(0) = x_0, \quad x = F(t),$$
$$F^{(n)}(0) = x_n \ldots, \qquad F'''(0) = x_3$$

أى أن

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = x_1, \quad \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0} = x_2, \quad \left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0} = x_3, \ldots, \left.\frac{d^nx}{dt^n}\right|_{t=0} = x_n$$

أيضاً نفرض أ ن $\quad \overline{x} = \ell\{x\} = \ell\{F(t)\} = f(s)$

$$\therefore \ell\{x\} = \overline{x}$$

$$\ell\{\dot{x}\} = s\overline{x} - x_o$$

$$\ell\{\ddot{x}\} = s^2\overline{x} - sx_o - x_1$$

$$\ell\{\dddot{x}\} = s^3\overline{x} - s^2x_o - sx_1 - x_2$$

٤/٦- حل المعادلات التفاضلية باستخدام تحويلات لابلاس:

مثال(١٠): اوجد حل المعادلات التفاضلية: $\frac{dx}{dt} - 4x = 8$ حيث $x(0) = 2$

الحل:

نعيد كتابة المعادلة التفاضلية فى الصورة *x-4x=8* وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على

$$\ell\{\dot{x} - 4x\} = \ell\{8\}$$

$$\therefore s\overline{x} - x_o - 4\overline{x} = 8/s \qquad (1)$$

وحيث أن $t = 0$ فإن $x_o = 2$ وبالتعويض فى العلاقة (1) نحصل على

$$s\overline{x} - 2 - 4\overline{x} = 8/s$$

وهذه المعادلة يمكن إعادة كتابتها فى الصورة

$$(s-4)\bar{x}-2=8/s$$

$$\Rightarrow (s-4)\bar{x}=\frac{8+2s}{s}$$

وبحل المعادلة فى $\bar{x}$ نحصل على

$$\bar{x}=\frac{2}{s-4}+\frac{8}{s(s-4)}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\therefore \bar{x}=\frac{2}{s-4}-\frac{2}{s}+\frac{2}{s-4}=\frac{4}{s-4}-\frac{2}{s}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على:

$$x=\ell^{-1}\left\{\frac{4}{s-4}-\frac{2}{s}\right\}=4e^{4t}-2$$

وهو الحل المطلوب

مثال(٢): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$x(0)=5 \text{ حيث } \quad 2\frac{dx}{dt}+3x=e^{4t}$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة السابقة فى الصورة:

$$2\dot{x}+3x=e^{4t}$$

$$\therefore \ell\{2\dot{x}+3x\}=\ell\{e^{4t}\}$$

$$2(s\overline{x}-x_o)+3\overline{x}=\frac{1}{s-4} \qquad ,\because x_o=5$$

$$\therefore 2(s\overline{x}-5)+3\overline{x}=\frac{1}{s-4}$$

$$\therefore (2s+3)\overline{x}-10=\frac{1}{s-4}$$

$$\therefore \overline{x}=\frac{10}{2s-3}+\frac{1}{(2s-3)(s-4)}=$$

$$\frac{10}{2s+3}+\frac{1}{11(s-4)}-\frac{2}{11(2s+3)}$$

$$=\frac{108}{11}\left(\frac{1}{(2s+3)}\right)+\frac{1}{11}\frac{1}{(s-4)}$$

$$\therefore x=\ell^{-1}(\overline{x})=\frac{54}{11}e^{-3t/2}+\frac{1}{11}e^{4t}$$

وهو المطلوب.

مثال(٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{dt}-3x=te^{2t} \quad \text{حيث} \quad x(0)=0$$

الحل:

$$(s\overline{x}-x_0)-3\overline{x}=\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\therefore x_o=0 \quad \therefore (s-3)\overline{x}=\frac{1}{(s-2)^2}$$

باستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\because \overline{x} = \frac{1}{(s-3)(s-2)^2} = \frac{1}{(s-3)} - \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-2)^2}$$
$$\therefore x = e^{3t} - e^{2t} - te^{2t} = e^{3t} - (1+t)e^{2t}$$

مثال(٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \qquad x(0) = 4, \quad \dot{x} = 3$$

الحل:

نحاول كتابة المعادلة السابقة بدلالة تحويلات لابلاس وذلك باستخدام التعبيرات التالية:

$$\ell\{x\} = \overline{x}$$
$$\ell\{\dot{x}\} = s\overline{x} - x_o$$
$$\ell\{\ddot{x}\} = s^2\overline{x} - sx_o - x_1$$

وبذلك فإن المعادلة التفاضلية بعد التأثير على طرفيها بمؤثر لابلاس تأخذ الصورة الآتية:

$$(s^2\overline{x} - sx_0 - x_1) - 3(s\overline{x} - x_o) + 2\overline{x} = 0 \qquad (1)$$
$$At \;\; t = 0, \quad x = 4, \quad \dot{x} = 3$$
$$\therefore x_o = 4 \;\; , \;\; x_1 = 3$$

وبالتعويض فى العلاقة (1) نحصل على

$$(s^2\overline{x} - 4s - 3) - 3(s\overline{x} - 4) + 2\overline{x} = 0$$
$$\therefore \overline{x}(s^2 - 3s + 2) - 4s + 9 = 0$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{4s-9}{(s-1)(s-2)} = \frac{5}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$
$$\therefore x = \ell^{-1}\{\overline{x}\} = 5e^{t} - e^{2t}$$

وعلى وجه العموم باستخدام التعبير

$$\ell\{x^{(n)}\}=s^n\bar{x}-s^{n-1}x_o-s^{n-2}x_1\ldots x_{n-1}$$

حيث $n=1,2,3,\ldots$ يمكن بنفس الطريقة المتبعة فى الأمثلة السابقة حل المعادلات من الرتب أعلى من الثانية.

٥/٦-أمثلة عامة على تحويلات لابلاس:

مثال(١): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$3\dot{x}-4x=\sin 2t\ ,\quad x(0)=\frac{1}{3}$$

الحل:

$$\ell\{3\dot{x}-4x\}=\ell\{\sin 2t\}$$

$$3\{s\bar{x}-x_\circ\}-4\bar{x}=\frac{2}{S^2+4}$$

وبالتعويض عن $x(0)=\frac{1}{3}$ نحصل على

$$\{3s-4\}\bar{x}=1+\frac{2}{s^2+4}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{1}{3s-4}+\frac{2}{(3s-4)(s^2+4)} \tag{1}$$

وبتحليل الكسر الأخير نحصل على

$$\frac{2}{(3s-4)(s^2+4)}=\frac{18/52}{3s-4}-\frac{6s/52}{s^2+4}-\frac{8/52}{s^2+4}$$

$$=\frac{3}{26}\frac{1}{s-3/4}-\frac{3}{26}\frac{s}{s^2+4}-\frac{4}{26}\frac{1}{s^2+4} \tag{2}$$

وبالتعويض من العلاقة (2) فى العلاقة (1) نحصل على

$$\bar{x}=\frac{3S}{78}-\frac{1}{S-4/3}-\frac{3}{26}\left\{\frac{S}{S^2+4}+\frac{2}{3}\frac{2}{S^2+4}\right\}$$

وبإيجاد تحويل لابلاس العكسى للطرفين نحصل على

$$x = \frac{35}{78} e^{4t/3} - \frac{3}{26}\left\{\cos 2t + \frac{2}{3}\sin 2t\right\}$$

مثال(٢): حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + 36x = 0, \quad x(0) = -1, \quad \dot{x}(0) = 2$$

الحل:

$$\because s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 36\bar{x} = 0, \quad x_o = -1, x_1 = 2$$
$$\therefore s^2\bar{x} + s - 2 + 36\bar{x} = 0$$

والتى يمكن كتابتها فى الصورة

$$(s^2 + 36)\bar{x} + s - 2 = 0$$
$$\therefore \bar{x} = \frac{2-s}{s^2+36}$$
$$= \frac{2}{s^2+36} - \frac{s}{s^2+36}$$
$$\therefore x = \frac{1}{3}\sin 6t - \cos 6t$$

مثال(٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = 2, \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = 5$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_0 - x_1 - 7(2s\bar{x} - x_0) + 12\bar{x} = \frac{2}{s}$$
$$\therefore s^2\bar{x} - s - 5 - 7s\bar{x} + 7 + 12\bar{x} = \frac{2}{s}$$

أى أن

$$(s^2-7s+12)\bar{x}=s-2+\frac{2}{s}=\frac{1}{s}\{s^2-2s+2\}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{s^2-2s+2}{s(s-3)(s-4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-3}+\frac{c}{s-4}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{s}-\frac{5}{3}-\frac{1}{5-3}+\frac{5}{2}-\frac{1}{s-4}=\frac{1/6}{s}+\frac{-5/3}{s-3}+\frac{5/2}{s-4}$$

$$\therefore x(t)=\frac{1}{6}-\frac{5}{3}e^{3t}+\frac{5}{2}e^{4t}$$

مثال(٤): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x}-6\dot{x}+8x=e^{3t},\qquad x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=2$$

الحل:

$$(s^2\bar{x}-s\,x(0)-\dot{x}(0))-6(s\bar{x}-x(0))+8\bar{x}=\frac{1}{s-3}$$

وحيث أن

$$x(0)=0,\qquad \dot{x}(0)=2$$

$$\therefore (s^2\bar{x}-2)-6s\bar{x}+8\bar{x}=\frac{1}{s-3}$$

$$\therefore (s^2-6s+8)\bar{x}=2+\frac{1}{s-3}=\frac{2s-5}{s-3}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{2s-5}{(s-2)(s-3)(s-4)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}+\frac{c}{s-4}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-3}+\frac{3/4}{s-4}$$

ومنها نحصل على

$$x=\tfrac{3}{4}e^{4t}-e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}$$

مثال(٥): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + x = 6\cos 2t, \qquad x(0) = 3, \quad \dot{x}(0) = 1$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx(0) - \dot{x}(0) + \bar{x} = \frac{6s}{s^2+4}$$

وبالتعويض عن $x(0), \dot{x}(0)$ نحصل على

$$(s^2+1)\bar{x} - 3s - 1 = 6s/(s^2+4)$$

ومنها نحصل على

$$(s^2+1)\bar{x} = 3s + 1 + \frac{6s}{s^2+4}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{6s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{3s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4} = \frac{5s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2+4}$$

$$\therefore x = 5\cos + \sin t - 2\cos 2t$$

مثال(٦): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \sin 3t, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 4$$

الحل:

$$(s^2\bar{x} - sx_o - x_1) - 4(s\bar{x} - x_o) + 4\bar{x} = \frac{3}{s^2+9}$$

وبالتعويض عن $\dot{x}(0)$ $x(0),$ والتبسيط نحصل على X_o في الصورة

$$\bar{x} = \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{3}{(s-2)^2(s^2+9)}$$

$$= \frac{55}{13}\frac{1}{(s-2)^2} - \frac{3}{169}\cdot\frac{4}{s-2} + \frac{12}{169}\frac{s}{s^2+9} - \frac{5}{169}\cdot\frac{1}{s^2+9}$$

$$\therefore x = \frac{55}{13}te^{2t} - \frac{3}{169}\left\{4e^{2t} - 4\cos 3t + \frac{5}{3}\sin 3t\right\}$$

مثال(٧): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 4t^2, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 3(s\bar{x} - x_o) + 2\bar{x} = \frac{8}{s^3}$$

وبالتعويض عن $x_o = x_1 = 0$ والتبسيط نحصل على

$$\bar{x} = \frac{8}{s^3(s+1)(s+2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{x} = \frac{4}{s^3} - \frac{6}{s^2} + \frac{7}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى نحصل على

$$x = 2t^2 - 6t + 7 + e^{-2t} - 8e^{-t}$$

مثال(٨): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 4, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \ddot{x}(0) = 3$$

الحل:

باستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$(s^3+s^2+s+1)\overline{x}=3+{}^4\!/_s=(3s+4)/s$$
$$\therefore \overline{x}=\frac{3s+4}{s(s+1)(s^2+1)}={}^4\!/_s-\frac{1}{2}.\frac{1}{s+1}-\frac{7}{2}.\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{2}.\frac{s}{s^2+1}$$

ومنها نحصل بسهولة باستخدام تحويل لابلاس العكسى على x فى الصورة

$$x=4-{}^{e^{-t}}\!/_2-{}^7\!/_2\cos t-\frac{1}{2}\sin t$$

مثال(٩): حل المعادلة التفاضلية:

$$\dddot{x}-2\ddot{x}-\dot{x}+2x=2+t\,,\qquad x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1,\ \ddot{x}(0)=0$$

الحل:

$$s^3\overline{x}-s^2x(0)-sx_1-x_2-2(s^2\overline{x}-sx(0)-\dot{x}(0))-$$
$$-s\overline{x}-x(0)+2\overline{x}={}^2\!/_s+{}^1\!/_{s^2}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية نحصل بعد التبسيط على

$$(s^3-2s^3-s+2)\overline{x}-s+2=\frac{2s+1}{s^2}$$
$$\therefore (s-2)(s^2-1)\overline{x}=s-2+\frac{2s+1}{s^2}$$

$$\overline{x}=\frac{s-2}{(s-2)(s^2-1)}+\frac{s2+1}{s(s-2)(s^2-1)}$$

$$=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{s}\left\{\frac{2s+1}{s(s-1)(s^2+1)(s-2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{2}.\frac{1}{s^2}+\frac{5}{4}.\frac{1}{s}-\frac{3}{2}.\frac{1}{s-1}-\frac{1}{6}.\frac{1}{s+1}+\frac{5}{12}.\frac{1}{s-1}$$
$$\therefore x=\sin ht+\frac{t}{2}+\frac{5}{4}-3{}^{e^t}\!/_2-{}^{e^{-t}}\!/_6+{}^5\!/_{12}e^{2t}$$

وحيث أن $\sin ht = \frac{1}{2}\left\{e^{t} - e^{-t}\right\}$ فإن النتيجة السابقة يمكن كتابتها فى الصورة

$$x = 5/4 + t/2 - e^{t} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t}$$

مثال(١٠): اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} + y + 2x &= 0, \\ \dot{x} + 4\dot{y} - 2x &= e^{-2t} \end{aligned}\right\}, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

باستخدام تحويل لابلاس والرموز $\bar{y} = \ell(y), \bar{x} = \ell\{x\}$ نحصل على

$$\begin{aligned} s\bar{x} - x_o + s\bar{y} - y_o + 2\bar{x} &= 0, \\ s\bar{x} - x_o + 4(s\bar{y} - y_o) - 2\bar{x} &= \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية والتبسيط نحصل على

$$\begin{aligned} (s+2)\bar{x} + s\bar{y} &= 2, \\ (s-2)\bar{x} + 4s\bar{y} &= 2 + \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين معاً نحصل على

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{6}{3s+10} - \frac{1}{(s+2)(3s+10)} \\ &= \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{s+\frac{10}{3}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

وبإستخدام تحويل لابلاس العكسى نحصل على x فى الصورة

$$x = \frac{9}{4}e^{\frac{-10}{3}t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

ويبقى الحصول على y ويمكن الحصول عليها بإجراء خطوات مماثلة كما يلى

$$\bar{y}=\frac{9}{s(3s+10)}=\frac{3}{s(s+10/3)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{y}=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{s}-\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{\left(s+10/3\right)}$$

$$\therefore y=\frac{9}{10}\left\{1-e^{-10t/3}\right\}$$

ويجمع الحلين معا نحصل على الحل المطلوب فى الصورة

$$x=\frac{1}{4}\left\{ye^{-10t/3}-e^{-2t}\right\},\; y=\frac{9}{10}\left\{1-e^{-10t/3}\right\}$$

مثال (١١): اوجد حل نظام المعادلات التفاضلية الآتية:

$$2\dot{x}-x+\dot{y}+y=5\sin t$$
$$3\dot{x}-x+2\dot{y}+y=e^{t}\quad,\quad x(0)=y(0)=0$$

الحل:

باستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$2\left(s\bar{x}-x(0)\right)-\bar{x}+s\bar{y}-y(0)+\bar{y}=\frac{5}{s^{2}+1};$$
$$3\left(s\bar{x}-x(0)\right)-\bar{x}+2\left(s\bar{y}-y(0)\right)+\bar{y}=\frac{1}{s-1}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$(2s-1)\bar{x}+(s+1)\bar{y}=\frac{5}{s^2+1},$$
$$(3s-1)\bar{x}+(2s+1)\bar{y}=\frac{1}{s-1}$$

وبحل المعادلتين معاً فى $\bar{y}$, $\bar{x}$ نحصل على

$$\bar{x}=\frac{s(2s+1)}{s(s-2)(s^2+1)}-\frac{s+1}{s(s-1)(s-2)}$$

وباستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{x}=\frac{1}{s-2}+\frac{2}{s-1}-\frac{3}{s}-\frac{5}{s^2+1}$$
$$\therefore x=e^{2t}+2e^{t}-3-5\sin t$$

بالمثل يمكن ايجاد $\bar{y}$ فى الصورة

$$\bar{y}=\frac{2s-1}{s(s-1)(s-2)}-\frac{5(3s-1)}{s(s-2)(s^2+1)}$$

وبإستخدام الكسور الجزئية نحصل على

$$\bar{y}=-\frac{3}{s}-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}+\frac{5s}{s^2+1}+\frac{5}{s^2+1}$$
$$\therefore y=-3-e^{t}-e^{2t}+5\cos t+5\sin t$$

الحل الكامل للمسألة هو

$$x=e^{2t}+2e^{t}-3-5\sin t$$
$$\therefore y=5\cos t+5\sin t-3-e^{t}-e^{2t}$$

مثال(١٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\dot{x} + 2y - x = 0$$
$$\dot{y} + 2x - y = 0$$

الحل:

بإستخدام تحويل لابلاس نحصل على

$$s\bar{x} - x(0) + 2\bar{y} - \bar{x} = 0$$
$$s\bar{y} - y(0) + 2\bar{x} - \bar{y} = 0$$

وبوضع $x(0) = A$, $y(0) = B$ نحصل على

$$(s-1)\bar{x} + 2\bar{y} = A$$
$$2\bar{x} + (s-1)\bar{y} = B$$

ومنها نحصل على $\bar{x}$ في الصورة

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left\{\frac{A+B}{s+1} + \frac{A+B}{s-3}\right\}$$

ويوضع $\frac{A+B}{2} = \mathrm{P}$, $\frac{A-B}{2} = Q$ نحصل على

$$\bar{x} = \frac{p}{s+1} + \frac{Q}{s-3}$$

وحيث أن

$$\therefore x = pe^{-t} + Qe^{3t}$$
$$\dot{x} = -pe^{-t} + 3Qe^{3t} \qquad (1)$$
$$\dot{x} + 2y - x = 0 \qquad (2)$$

بالتعويض عن x , $\dot{x}$ في العلاقة (2) يمكن الحصول على y في الصورة

$$y = pe^{-t} - Q e^{3t}$$

$\therefore$ الحل المطلوب هو

$$x = pe^{-t} + Q\, e^{3t}, \qquad y = pe^{-t} - Q\, e^{3t}$$

مثال(١٣): اوجد الحل العام لنظام المعادلات الآتية:

$$\ddot{x} + 3x - 2y = 0$$

$$\ddot{x} + \ddot{y} - 3x + 5y = 0 \quad ; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 3$$

الحل:

$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + 3\bar{x} - 2\bar{y} = 0$$
$$s^2\bar{x} - sx_o - x_1 + s^2\bar{y} - sy_o - y_1 - 3\bar{x} + 5\bar{y} = 0$$

وباستخدام الشروط الإبتدائية والتبسيط نحصل على

$$\left(s^2 + 3\right)\bar{x} - 2\bar{y} = 1$$
$$\left(s^2 - 3\right)\bar{x} + \left(s^2 + 5\right)\bar{y} = 4$$

ومنها نحصل على $\bar{x}$ في الصورة

$$\bar{x} = \frac{s^2 + 13}{\left(s^2 + 1\right)\left(s^2 + y\right)} = \frac{3}{2}.\frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2}.\frac{1}{s^2 + 9}$$

$$\therefore x = {}^3\!/_2 \sin t - \frac{1}{6}\sin 3t \qquad (1)$$

$$\therefore \dot{x} = {}^3\!/_2 \cos t - \frac{1}{2}\cos 3t \;; \qquad (2)$$

$$\ddot{x} = -{}^3\!/_2 \sin t + {}^3\!/_2 \sin 3t \qquad (3)$$

بالتعويض من $(3), (1)$ فى العلاقة $\ddot{x}+3x-2y=0$ نحصل بعد الاختصار على y فى الصورة $y=\frac{3}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin 3t$

٦/٦- تطبيقات على تحويلات لابلاس:

(i) دالة جاما:

يرمز لها بالرمز $\Gamma(x)$ وتعرف بأنها

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1}dt \tag{1}$$

وباستخدام التعريف السابق نحصل على النتائج الآتية:

$$(1)\ \Gamma(1)=1$$

من التعريف (1) نحصل على

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\lim_{b\to\infty}\left\{\int_0^b e^{-t}dt\right.$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-e^{-b}+1\right\}=1$$

$$(2)\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\ ,\quad x>0$$

البرهان:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x}dt=\lim_{b\to\infty}\left\{\int_0^b -e^{-t}t^{x}dt\right\}$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left\{-e^{-t}t^{x}dt\right\}_0^b+x\int_0^\infty e^{-t}\ t^{x-1}dt=0+x\Gamma(x)=x\Gamma(x)$$

وبناء على النتيجة السابقة إذا كان x عدد صحيح غير سالب فإن

$$(3)\Gamma(x+1) = x!$$

$$(4)\Gamma(x) = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

البرهان:

باستخدام التعويض $t = u^2$ فى تعريف دالة جاما نحصل على

$$dt = 2udu; \quad t = 0 \Rightarrow u = 0; \qquad t \to \infty \to u \to \infty$$

$$\therefore \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u^2} (u^2)^{x-1} \; 2udu$$

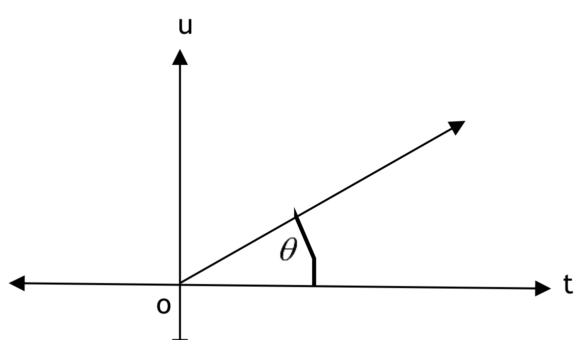
$$= 2\int_0^\infty e^{-t^2} \; t^{2x-1} \; dt$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \; \sin^{2y-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}$$

البرهان:

سوف نبرهن هذه النتيجة بإيجاد التكامل الثنائي $I = \iint_R e^{-t^2-u^2} t^{2x-1} u^{2y-1} dt\, du$

حيث R هى المربع الأول للمستوى (t, u) الموضح بالشكل وبطريقتين مختلفتين:



شكل (٦-١)

أولاً: يكون لدينا

$$\mathrm{I}=\int_{t=0}^{\infty}\left\{\int_{u=0}^{\infty} e^{-t^2-u^2}\ t^{2x-1}\ u^{2y-1}dt\right\}du$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\ t^{2x-1}\ dt\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\ u^{2y-1}\ du=\frac{1}{2}\Gamma(x).\frac{1}{2}\Gamma(y)$$

والآن بتغيير المتغيرات إلى الإحداثيات القطبية وذلك باستخدام التعويضات $t=r\cos\theta,\ u=r\sin\theta$ نحصل على عنصر المساحة فى الصورة $rdrd\theta$ ويؤول التكامل إلى الصورة

$$\mathrm{I}=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\pi/2} e^{-r^2}\ r^{2x-1}\ \cos\theta^{2x-1}r^{2y-1}\sin\theta^{2y-1}rdrd\theta$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\ r^{2(x+y)-1}\ dr\int_{0}^{\pi/2}\ \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma(x+y)\int_{o}^{\pi/2}\ \cos\theta^{2x-1}\sin\theta^{2y-1}d\theta$$

وبمطابقة النتيجتين نحصل على المطلوب.

$$(6)\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

بوضع $x=y=\dfrac{1}{2}$ فى (5) نحصل على

$$\left(\pi/2\right)=\int_{0}^{\pi/2} d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

وحيث أن $\Gamma(x)$ يجب ان تكون موجبة نحصل على $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

(ii) دالة بيتا:

تُعرف دالة بيتا $\beta(m,n)$ من التكامل

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad (1)$$

حيث m, n عددان حقيقيان موجبان حتى يكون التكامل متقارباً.

٦/٧- أمثلة محلولة:

مثال(١): اوجد قيم كل من التكاملات الآتية:

$$(i)\int_o^{\pi/2}(\tan\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \qquad (ii)\int_o^{\infty} t^{-3/2}(1-e^{-t})dt$$

$$(iii)\int_o^{1}\frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}} \qquad (iv)\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}^{\frac{1}{2}}dx$$

الحل:

(i) حيث أن

$$\int_o^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta=2\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}, \qquad (1)$$

$$\tan^{\frac{1}{2}}\theta=\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta$$

بوضع $2x-1=-\frac{1}{2}$, $2y-1=\frac{1}{2}$ أى $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{4}$

يمكن بسهولة باستخدام العلاقة (1) الحصول على

$$\int_o^{\pi/2}\{\tan\theta\}^{\frac{1}{2}}d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma(3/4)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma(3/4)$$

(ii) لايجاد التكامل $I=\int_{o}^{\infty} t^{-3/2}(i-e^{-t})dt$

نستخدم التكامل بالتجزئ للحصول على

$$\int_{o}^{\infty} t^{-3/2}\left(1-e^{-t}\right)dt = \lim_{b\to\infty}\left\{-2t^{-1/2}\left(1-e^{-t}\right)\right\}_{0}^{b}$$

$$-\int_{o}^{\infty}-2t^{-1/2}e^{-t}dt = o+2\int_{o}^{\infty}t^{-1/2}e^{-t}dt = 2\Gamma(\frac{1}{2})$$
$$=2\sqrt{\pi}$$

(iii) $$I=\int_{o}^{1}\frac{dx}{\left(1-x^{3}\right)^{1/3}}=\int_{o}^{1}\left(1-x^{3}\right)^{-1/3}dx$$

وبإستخدام التعويض $t = x^{3}$ نحصل على

$$\int_{o}^{1}\left(1-x^{3}\right)^{-\frac{1}{3}}dx = \int_{o}^{1}(1-t)^{-1/3}\frac{1}{3}t^{-2/3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})$$

(iv)- لايجاد التكامل $\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1+x}{1-x}\right\}^{1/2}dx$ نستخدم التعويض

$$t=\frac{1}{2}\left(1+x\quad\right)$$

وبذلك يؤول التكامل المطلوب إلى الصورة

$$2\int_{o}^{1}t^{1/2}\left(1-t\quad\right)^{-1/2}dt = 2b\left(3/2,1/2\quad\right)$$

$$=2\ 1/2\ \frac{\Gamma^{2}(1/2)}{1!}=\pi$$

مثال(٢): اوجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(i)\int_0^\infty y^{1/2}e^{-y^3}dy$$

$$(ii)\int_0^\infty 3^{-4z^2}dz$$

الحل:

(i) - بوضع $y^3=x$ نحصل على

$$\int_o^\infty y^{1/2}e^{-y^3}dy=\frac{1}{3}\int_o^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx=\frac{1}{3}\Gamma(1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

(ii)- بوضع $(4\ln 3)z^2=x$ نحصل على

$$\int_0^\infty 3^{-4\lambda^2}dz=\int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{4\ell\eta 3}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{-4\sqrt{\ell\eta 3}}$$

مثال (٣): اوجد قيمة التكامل $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx$

حيث m, n, a ثوابت موجبة

الحل:

باستخدام التعويض $ax^n=y$ فإن

$$\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx=\frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\int_0^\infty y^{\frac{m+1}{n-1}}e^{-y}dy=\frac{1}{n\,a^{(m+1)/n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

مثال(٤): عبر عن التكامل $\int_0^{\pi/2} \sin^\rho \theta d\theta$ بدلالة دالة جاما

الحل:

بوضع $2m-1=\rho$ $\quad 2n-1=0,$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \ \cos^{2n-1}\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}, \quad m,n>o$$

نحصل على

$$\int_o^{\pi/2} \sin^\rho d\theta = \frac{\Gamma\left\{\left(\rho+\frac{1}{2}\right)\right\}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left\{\left(\frac{\rho+2}{2}\right)\right\}}$$

مثال(٥): بفرض أن:

$$\int_o^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\rho\pi}$$

أثبت أن $\quad 0<\rho<1; \quad \Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)=\dfrac{\pi}{\sin\rho\pi}$

الحل:

بوضع $\dfrac{x}{1+x}=y$ نحصل على

$$\int_o^\infty \frac{x^{\rho-1}}{1+x}dx = \int_o^1 y^{\rho-1}(1-y)^{-\rho}dy = \beta(\rho,1-\rho)$$
$$=\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)$$

مثال(٦): اوجد قيمة: $\int_{o}^{\infty} \frac{dy}{1+y4}$

الحل:

بوضع $y^4 = x$ فإن التكامل يؤدى إلى

$$\frac{1}{4}\int_{o}^{\infty} \frac{x^{-3/4}}{1+x}dx = \frac{\pi}{4\sin \pi/4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

وذلك بوضع $\rho = \frac{1}{4}$ فى المثال السابق

مثال(٧): بين أن: $\int_{o}^{2} x\,(8-x^{3})^{1/3}dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

الحل:

بوضع $x^3 = 8y$ يؤدى التكامل إلى

$$\frac{8}{3}\int_{o}^{1} y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy = \frac{8}{3}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}\Gamma(2/3)\Gamma(4/3) = \frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{9}\frac{\pi}{\sin\pi/3} = \frac{8}{9}\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

٨/٦- تمارين:

اوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال الآتية:

$(1)\cos 4t,\qquad (2)\,3t,\qquad (3)\,te^{2t}$

$(4)\,3\sin 5t,\qquad (5)\,e^{3t}(1+t^{2}),\qquad (6)\,e^{-t}\cosh 5t$

$(7)\cos 5t + t\sin t$, $(8) te^{2t}\sin 3t$

$(9) t^3\cos 52t$, $(10) t^6 e^{3t}$, $(11) t^2\sin 6t$

$(12) 2e^{-4t} + 3e^{4t}$, $(13) e^{3t}(2t + t^2 + 3t^3)$

$(14) \dfrac{\sinh t}{t}$, $(15) \dfrac{1-\cos 2t}{t}$

$(16) \sin kt \ \cos kt$, $(17) \cos(wt+\theta)$

$(18) \cos^2 kt$, $(18) \cos^4 t$, $(19) \sin^3 t$

$(20) e^{-t}\sin^2 t$, $(21)\ \cosh^2 4t$

$(22)\ \left(\sin t - \cos t\right)^2$, $(23)\ te^{-2t}\sin wt$

$(24) \dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$, $(25) \dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$

$(26) \sin t \sin 2t \sin 3t$, $(27) \cos t \cos 2t \cos 3t$

(٢٨) فى التمارين التالية اوجد تحويل لابلاس العكسية لكل من الدوال الآتية:

$(i) \dfrac{s}{s^2+4s+8}$, $(ii) \dfrac{2s+1}{(s-3)^2}$, $(iii) \dfrac{1}{s}\{\dfrac{s-\alpha}{s+\alpha}\}$

$(iv) \dfrac{1}{(s^4-2s^3}$, $(v) \dfrac{5}{(s+\alpha)^2+b^2}$, $(vi) \dfrac{2s-5}{s^2-\vartheta}$

$(vii) \dfrac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}$, $(viii) \dfrac{1}{s^2}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+1}\right\}$

$(ix) \dfrac{s+2}{s^2(s+3)}$, $(x) \dfrac{2s^2+s-10}{(5-4)(s^2+2s+2)}$

$(xi) \dfrac{2s^2+s-10}{(5-4)(s^2+2s+2)}$, $(xii) \dfrac{1}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}$

$(xiii) \dfrac{s+1}{(s-1)(s+2)^2}$, $(xiv) \dfrac{s+2}{s(s-3)(s^2+1)}$

$(xv) \dfrac{5s-6}{(5+4)(s^2+2s+2)}$, $(xvi) \dfrac{s}{(5+\alpha)^2-b^2}$

(٢٩) باستخدام تحويلات لابلاس اوجد حل المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i)\ 2\dot{x}+5x=e^{-2t} \qquad x(0)=1$$

$$(ii)\ 4\dot{x}-3x=\sin 2t \qquad x(0)=\frac{1}{4}$$

$$(iii)\ \ddot{x}-5\dot{x}+6x=0 \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=5$$

$$(iv)\ \ddot{x}-2\dot{x}+5x=e^{-2t} \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=4$$

$$(v)\ \ddot{x}-4\dot{x}+4x=\sin 3t \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=4$$

$$(vi)\ \dddot{x}-\ddot{x}+\dot{x}-x=e^{-2t}, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad \ddot{x}(0)=0$$

$$(vii)\ \dddot{x}-2\ddot{x}-\dot{x}+2x=2+t, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1,\quad \ddot{x}(0)=0$$

$$(viii)\ \dddot{x}+\ddot{x}+\dot{x}+x=4, \qquad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad \ddot{x}(0)=3$$

(٣٠) اوجد قيمة y التي تحقق المعادلتين:

$$\ddot{y}-5y-5x=0;$$

$$\ddot{x}+x+y=0;\quad x(0)=y(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad \dot{y}(0)_1=2$$

(٣١) اوجد حل كل من النظم الآتية:

$$(i)\ \dot{y}+2x=e^{-t}\ ,\quad \dot{x}-2y=e^{t}$$

$$(ii)\ 2\dot{x}-6x+3y=0\ ,\ 3\dot{y}-3y-2x=0,\ x(0)=3,\ y(0)=1$$

(٣٢) اوجد حل نظام للمعادلات الآتية:

$$\dot{x}-2x+y=0,\quad \dot{y}+2x-3y=0,\quad x(0)=0;\ y(0)=0$$

(٣٣) اوجد قيمة x التى تحقق النظام

$$\ddot{x}+3\dot{x}-2x+\dot{y}-3y=2e^{2t}$$

$$2\dot{x}-x+\dot{y}-2y=0;\quad x(0)=\dot{x}(0)=0;\quad y(0)=4$$

(٣٤) إذا كان

$$\ddot{x} - x + 5\dot{y} = t; \quad \ddot{y} - 4y - 2\dot{x} = -2,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

اوجد y بدلالة t

(٣٥) اوجد حل أزواج المعادلات الآتية مستعينا بالشروط الإبتدائية المعطاة:

$$(i)\ \dot{x} + 5x + y = e^{-t}; \ \dot{y} - x + 3y = e^{-2t}; \ x(0) = \frac{1}{2}; \ y(0) = \frac{2}{3}$$

$$ii)\quad \ddot{x} + 5\dot{y} - 4x = 3\sin 2t; \ddot{y} - 5\dot{x} - 4y = 0;$$

$$x(0) = y(0) = \dot{y}(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1$$

الملاحق

Appendices

-

مراجعة بعض قوانين التفاضل والتكامل:

نعرض في هذا الجزء القواعد الأساسية فى حساب التفاضل والتكامل لما لها من دوراً هاما في حل المعادلات التفاضلية في كتاب المعادلات التفاضلية العادية وتعرف كالآتي.

أولاً: قوانين التكامل:

$$(1)\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+c$$

$$(2)\int e^{ax+b}dx = e^{ax+b}+c$$

$$(3)\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+c$$

$$(4)\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$(5)\int \sec^n x dx = \tan x + c$$

$$(6)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}+c \qquad (7)\frac{dx}{a^2-x^2}\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$(8)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a}+c \qquad (9)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sin h^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$(10)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$(11)\int [f(x)]^n f'(x)dx = \int \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}\quad c,\ n\neq -1$$

$$(12)\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x)+c$$

$$(13)\int \sec x\,dx = \ln(\sec x+\tan x)+c$$

$$(14)\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)}+c$$

$$(15)\int udv = uv - \int vdu$$

(١) الدوال المثلثية:

هي النسب المثلثية للزوايا مقاسه بالتقدير الدائري فالدوال المثلثية هي

$$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \operatorname{cosec} x.$$

$(1)\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $(2)\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$(3)\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $(4)\operatorname{cotec} x = \dfrac{1}{\sin x}$

(٢) العلاقات الأساسية للدوال المثلثية:

$(1)\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$(2) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$(3) 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

$(4)\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y$

$(5)\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \mp \cos x \sin y$

$(6)\tan(x \pm y) = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \dfrac{\sin x \cos y \mp \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$

$(7)\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$(8)\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$(9)\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$(10)\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$(11)\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$$(12)\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$(13)\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

(٣) الدوال المثلثية الزائدة:

$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \sec hx, \cos echx$.

$$(1)\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \quad , \quad (2)\cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

$$(3)\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad , \quad (4)\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{1}{\tanh x}$$

$$(5)\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}, \quad , \quad (6)\cos ec\,\mathrm{h}x=\frac{1}{\sinh x},$$

(٤) العلاقات الآساسية للدوال المثلثية الزائدة:

$$(1)\sinh^{2}x+\cosh^{2}x=1$$

$$(2)\tanh^{2}x+\operatorname{sech}^{2}x=1$$

$$(3)1+\coth^{2}x=\cos ec\,\mathrm{h}^{2}x$$

$$(4)\cosh(x\pm y)=\cos xh\cosh y\pm\sinh x\sinh y$$

$$(5)\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$$

$$(6)\tanh(x\pm y)=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh(x\pm y)}=\frac{\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y}{\cos xh\cosh y\pm\sinh x\sinh y}=\frac{\tan x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x.\tanh y}$$

$$(7)\sinh^{2}x=2\sinh x.\cosh x$$

$$(8)\cosh 2x=\cos^{2}hx+\sinh^{2}x=1+2\sinh^{2}x=2\cosh^{2}x+1$$

$$(9)\tan 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^{2}x}$$

ثانياً: قوانين التفاضل:

(١) تفاضل الدوال المثلثية يعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\, y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$
$$(2)\, y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$
$$(3)\, y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$$
$$(4)\, y = \cot x \rightarrow y' = -\cos^2 x$$
$$(5)\, y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \, \tan x$$
$$(6)\, y = \cos ecx \rightarrow y' = -\cos ec\, x\, cot\, x$$

(٢) تفاضل الدوال المثلثية الزائدة ويعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\, y = \sinh x \rightarrow y' = \cosh x$$
$$(2)\, y = \cosh x \rightarrow y' = -\sinh x$$
$$(3)\, y = \tanh x \rightarrow y' = \sec h^2 x$$
$$(4)\, y = \coth x \rightarrow y' = -\cos h^2 x$$
$$(5)\, y = \sec hx \rightarrow y' = \sec hx \, \tanh x$$
$$(6)\, y = \cos echx \rightarrow y' = -\cos ech\, x \, \coth x$$

(٣) تفاضل الدوال المثلثية العكسية و يعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\, y = \sin^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(2)\, y = \cos^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3)\, y = \tan^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(4)\, y = \cot^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(5)\, y = \sec^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(6)\, y = \operatorname{cosec}^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(٤) تفاضل الدوال المثلثية العكسية و يعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\, y = \sinh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(2)\, y = \cosh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(3)\, y = \tanh^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(4)\, y = \coth^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$(5)\, y = \operatorname{sech}^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$(6)\, y = \operatorname{cosech}^{-1} x \rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

(٥) تفاضل الدوال اللوغاتمية والأسية و يعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\, y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$(2)\, y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

$$(3)\, y = \log x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

29. $\int x^{2}\cos xdx = x^{2}\sin x + 2x\cos x + 2\sin x + c$

30. $\int x^{2}\sin xdx = x^{2}\cos x + n\int x^{2-1}\cos xdx$

31. $\int x^{2}\cos xdx = x^{2}\sin x - n\int x^{2+1}\sin xdx$

32. $\int \sin^{m} x\cos^{m} xdx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{m+n}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^{n}xdx$

(٦) تكامل الدوال المثلثية يعطى بالصورة:

1. $\int \sin xdx = -\cos x + c$

2. $\int \cos xdx = \sin x + c$

3. $\int \tan xdx = -\log\left|\cos x\right| + c$

4. $\int \cot xdx = \log\left|\sin x\right| + c$

5. $\int \sec xdx = \log\left|\sec x + \tan x\right| + c$

6. $\int \csc xdx = -\log\left|\csc x + \tan\cot x\right| + c$

7. $\int \sec^{2} xdx = \tan x + c$

8. $\int \csc^{2} xdx = \cot x + c$

9. $\int \sec x\tan xdx = \sec x + c$

10. $\int \sec x\cot xdx = -\csc x + c$

11. $\int \sin^{2} xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

12. $\int \cos^{2} xdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

13. $\int \tan^{2} xdx = \tan x - x + c$

$$14.\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

$$15.\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + c$$

$$16.\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x + c$$

$$17.\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

$$18.\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-1} x dx$$

$$19.\int \tan^n x dx = \frac{1}{n+1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$20.\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx$$

$$21.\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx$$

$$22.\int \sec^n x dx = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x dx$$

$$23.\int \sin ax \sin bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + c$$

$$24.\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + c$$

$$25.\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + c$$

$$26.\int x \sin x dx = -x \sin x + \cos x + c$$

$$27.\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$$28.\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

(٧) تكاملات الدوال المثلثية العكسية:

33. $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

34. $\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$

35. $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c$

36. $\int \operatorname{arccot} x dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + c$

37. $\int \operatorname{arcsec} x dx = x \operatorname{arcsec} x - \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

38. $\int \operatorname{arccsc} x dx = x \operatorname{arccsc} x + \log\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c$

(٨) تكامل الدوال اللوغارتمية والأسية يعطى بالصورة الآتية:

39. $\int e^x dx = e^x + c$

40. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

41. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$

42. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

43. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

43. $\int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{\log a} - \frac{n}{\log a}\int x^{n-1} a^x dx + c$

44. $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

45. $\int \log x dx = x \log x - x + c$

46. $\int (\log x)^n dx = (\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1} dx$

47. $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c$

$$48.\int x^{n}\log x\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\frac{1}{(n+1)^{2}}x^{n+1}+c$$

$$49.\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\sin bx-b\cos bx)+c$$

$$50.\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^{2}+b^{2}}(a\cos bx+b\sin bx)+c$$

(٩) صيغ تكاملات الدوال المثلثية الزائدية:

$$51.\int \sinh x\,dx=c$$

$$52.\int \cosh x dx=\sinh x+c$$

$$53.\int \tanh x dx=\operatorname{logh} x+c$$

$$54.\int \coth x dx=\log|\sinh|+c$$

$$55.\int scc\,\mathrm{h}\,x dx=\arctan(\sinh x)+c$$

$$56.\int \operatorname{csch} x dx=\log|\tanh|x||+c$$

$$57.\int \mathrm{s}c\,\mathrm{c}h^{2}\,x\,d\,x-\tanh x+c$$

$$58.\int \mathrm{s}c\,\mathrm{c}h^{2}\,xdx-\cosh x+c$$

$$59.\int \mathrm{s}c\,\mathrm{c}h\,x\tanh xdx=-scch\,x+c$$

$$60.\int \mathrm{s}c\,\mathrm{c}h\,x\coth xdx-scch\,x+c$$

$$61.\int \sin h^{2}\,xdx=\sinh 2x-x+c$$

$$62.\int \cos h^{2}\,x\tanh xdx=\sinh 2x+x+c$$

$$63.\int e^{ax}\sinh xdx=\tfrac{e^{ax}}{a^{2}-b^{2}}(a\sinh bx-b\cosh bx)+c$$

$$64.\int e^{ax}\cosh xdx=\tfrac{e^{ax}}{a^{2}-b^{2}}(a\cosh bx-b\sinh bx)+c$$

(١٠) تكامل الدوال المثلثية العكسية أيضاً يعطى بالصورة الآتية:

$$(1)\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x \quad , \quad (2)\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \cos^{-1} x$$

$$(3)\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \tan^{-1} x \quad , \quad (4)\int \frac{1}{1+x^2}dx = \cot^{-1} x$$

$$(5)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x \quad , \quad (6)\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \cos ec^{-1}x$$

(١١) تكامل الدوال المثلثية الذائدة العكسية أيضا يعطى بالصورة:

$$(1)\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1} x$$

$$(2)\int \frac{-1}{\sqrt{-1+x^2}}dx = \cosh^{-1} x$$

$$(3)\int \frac{1}{1-x^2}dx = \tanh^{-1} x \quad , \quad |x| \prec 1$$

$$(4)\int \frac{1}{1-x^2}dx = \coth^{-1} x \quad , \quad |x| \succ 1$$

(١٢) صيغ تكاملات تحتوي على (x^2-a^2):

$$67.\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$68.\int x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{8}\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$69.\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2}-a\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

$$70.\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=-\frac{1}{x}\sqrt{a^2-x^2}-\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$71.\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$72.\int \frac{x^2}{\sqrt[x]{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+c$$

$$73.\int \frac{x^2}{\sqrt[x]{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{a^2x}\sqrt{a^2-x^2}+c$$

$$74.\int \left(a^2-x^2\right)^{3/2}dx=-\frac{x}{8}\left(2x^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^2}{8}\arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$75.\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+c$$

$$87.\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2_a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

$$88.\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{1}{a}arc\sec\left|\frac{x}{a}\right|+c$$

$$91.\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-arc\sec\left|\frac{x}{a}\right|+c$$

$$92.\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$93.\int \left(x^2-a^2\right)^{3/2}dx=\frac{x}{8}\left(2x^2-5a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$94.\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$95.\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$96.\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+c$$

$$97.\int \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^{3/2}}dx = -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}+c$$

(١٣) صيغ تكاملات تحتوي على (a^2-x^2):

$$76.\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a} src\tan\frac{x}{a}+c$$

$$77.\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$78.\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$79.\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2}-a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+c$$

$$80.\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

$$81.\int \left(x^2+a^2\right)^{3/2}dx - \frac{x}{a}\left(2x^2+5a^2\right)\sqrt{x^2+a^2}+\tfrac{3a^2}{8}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

(١٤) صيغ تكاملات تحتوي على x^2+a^2:

$$(82).\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c = \sinh{-1}\frac{x}{a}+c$$

$$(83).\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{x^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

$$(84).\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx = -\frac{1}{a}\log\left|a+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|+c = \frac{1}{a}\sinh^{-1}\frac{a}{x}+c$$

$$(85).\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+c$$

$$(86).\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$$

(١٥) صيغ تكاملات تحتوي على $a+bx$:

$$98.\int \frac{x}{a+bx}dx = \frac{1}{b^2}\left(a+bx - a\log|a+bx|\right)+c$$

$$99.\int \frac{x^2}{a+bx}dx = \frac{1}{b^2}\left|\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx)+a^2\log|a+bx|\right|+c$$

$$100.\int \frac{x}{(a+bx)^2}dx = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx}+\log|a+bx|\right)+c$$

$$101.\int \frac{x^2}{(a+bx)^2}dx = \frac{1}{b^2}\left(a+bx-\frac{a^2}{a+bx}-2a\log|a+bx|\right)+c$$

$$102.\int \frac{1}{x(a+bx)}dx = \frac{1}{b}\log\left|{}^{x}_{a+bx}\right|+c$$

$$103.\int \frac{1}{x^2(a+bx)}dx - \frac{1}{dx}+\frac{b}{a^2}\log\left|{}^{a+bx}_{x}\right|+c$$

$$104.\int \frac{1}{x(a+bx)^2}dx = \frac{1}{a(a+bx)}+\frac{1}{a^2}\log\left|{}^{a+bx}_{x}\right|+c$$

(١٦) صيغ تكاملات تحتوي على $\sqrt{a+bx}$:

$$105.\int {}^{x}\sqrt{a+bxdx} = \frac{2}{15b^3}(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}+c$$

$$106.\int {}^{x^2}\sqrt{a+bxdx} = \frac{2x^3(a+bx)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int {}^{x^{n-1}}\sqrt{a+bxdx}$$

$$107.\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx+c}$$

$$108.\int {}^{x^2}\sqrt{a+bxdx} = \frac{2x^3(a+bx)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)}\int {}^{x^{n-1}}\sqrt{a+bxdx}$$

$$109.\int\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|+c & if a>0\\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+c & if a>0\end{cases}$$

$$111.\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{1}{x\sqrt{a+bx}}bx$$

$$112.\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^2}dx=-\frac{(a+bx)^{3/2}}{a(n-1)x^{n-1}}-\frac{b(2n-5)}{2a(n-1)}\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}dx$$

(١٧) صيغ تكاملات تحتوي على $2ax+x^2$:

$$113.\int\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$114.\int x\sqrt{2ax-x^2}dx=\frac{2x^2-ax-3a^2}{6}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$115.\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx=\sqrt{2ax-x^2}+a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$116.\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}dx=-\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x}-a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$117.\int\frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$118.\int\frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\sqrt{2ax-x^2}+a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$119.\int\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right)+c$$

$$120.\int\frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}}dx=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}+c$$

$$121. \int \frac{1}{\left(2ax^{2}\right)^{3/2}} dx = \frac{x-a}{a^{2}\sqrt{2ax-x^{2}}} + c$$

المصطلحات العلمية

أهم المصطلحات (إنجليزي - عربى)

A

Adjoin	موافق
Application	تطبيق
Arbitrary	أختياري
Auxilliary aquation	معادلة مساعدة

C

Capacity	سعة المكثف
Coefficient	معامل
Complementary function	دالة مكملة
Complex exponents	أسس مركبة
Condenser	مكثف
Constant	ثابت
Continuous function	دالة متصلة
Convergenece	تقارب
Critically damped	حركة متخامدة تخامدا حرجا

D

Damped force	قوة متخامدة

Damped vibration	اهتزاز متخامد
Definite integral	تكامل محدود
Dependence	اعتماد
Derivative	مشتقة
Differential equation	معادلة تفاضلية
Differential operator	مؤثر تفاضلي

E

Elementary	أولي

H

Homogeneous equation	معادلة متجانسة

I

Initial value	قيمة ابتدائية
Inspection	تخمين
Integrating factor	عامل مكاملة

J

Jump discontintuity	انفصال قفزي

L

Laplace transform	تحويل لابلس
Linear	خطي

Linear independence	استقلال خطي

M

Mathematical model	نموذج رياضي
Maximum	قيمة عظمى
Method	طريقة
Minimum	قيمة صغرى

N

Necessary and sufficient condition	شرط كامل وكافي
Non bomogeneous	غير متجانس
Non linear	غير خطي

O

Operator	مؤثر
Order	رتبة
Ordinary	عادي
Orthogonality	تعامدية
Orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
Ordinary point	نقطة عادية
Overdamped vibrations	اهتزازات مخمدة

P

Paramcier	وسيط
Partial	جزئي
Partial fractions	كسور جزئية
Particular solution	حل خاص
Pendulum	بندول
Period	دورة
Periodic function	دالة دورية
Piecewise continuous function	دالة متصلة قطعيا
Plane trigonometry	هندسة مستوية
Polynomial	كثيرة حدود
Power series	متسلسلة قوى

R

Ratio test	اختبار النسبة
Real	حقيقي
Recurrence relation	علاقة تكرارية
Reduction	اختزال الرتبة
Resonance	رنين
Root	جذر

S

Separable equation	معادلة ذات متغيرات منفصلة
Sequence	متتالية
Series solution	حل المتسلسلات
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Singular point	نقطة شاذة
Superposition principle	قاعدة التركيب

U

Undamped	غير متخامدة
Undermined coefficient	معاملات غير معينة
Uniqueness	وحدانية
Variation of parameters	تغير الوسطاء

W

Wronskian	رونسكيان

Z

Zeros of a function	أصفار الدالة

المراجـــــع

أولاً: المراجع العربية:

(١) السيد أبودهب، ناهد سيد، عبد المعطي عبد الله، **طرق رياضية للعلميين والمهندسين**، مكتبة الملك فهد الوطنية، جده، ٢٠١٩.

(٢) السيد عبد المعطي بدوي، **الرياضيات المتقدمة للمهندسين**، **الجزء الثاني**، دار الراتب الجامعية، بيروت، لبنان، ١٩٨٥.

(٣) بوليس، وليم ودريما، ريتشارد، ترجمة: أحمد علاونة وحسن العزة، **مبادئ المعادلات التفاضلية**، الطبعة الثالثة، نيويورك: دار جون وايلي وأبنائه، ١٩٨٣.

(٤) حسن العويضي، عبد الوهاب عباس، سناء رع، **المعادلات التفاضلية العادية**، **الجزء الثاني**، دار الرشد، ٢٠٠٥.

(٥) رحمة عبد الكريم، **نظريات المعادلات التفاضلية**، مطبوعات جامعة الملك سعود، ١٤٠٨هـ.

(٦) ريتشارد بيرنسون (سلسلة شوم)، ترجمة: حسن العويضي، عبد الوهاب عباس، القاهرة، **المعادلات التفاضلية**، الدار العربية للاستثمارات الثقافية، ٢٠٠١.

(٧) سالم احمد سحاب، **مقدمة في المعادلات التفاضلية**، مركز النشر العلمي، ١٩٩٤.

(٨) شريف البنداري، **المعادلات التفاضلية العادية**، مكتبة الرشد للنشر والتوزيع، ٢٠٠٣.

(٩) عبد المجيد نصير، **المعادلات التفاضلية العادية: الجزء الأول**، دار الفرقان، الأردن، ١٩٨٥.

(١٠) عبدالمعطي عبد الله، سامي حسن، **المعادلات التفاضليه العادية والجزئية**، مكتبة خوارزم، جده، ٢٠٠٨.

(١١) فرانك ايرز، **نظريات ومسائل في المعادلات التفاضلية**، الدار الدولية للنشر والتوزيع، ١٩٩٥.

(١٢) موري ر. شبيجل، **نظريات ومسائل في الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلمين**، دار ماكجروهيل للنشر والتوزيع، ١٩٨٥.

ثانياً: المراجع الانجليزية:

(1) Birkhoff and Rota, **Ordinary Differential Equations**, John, Wiley & Sons , New York, 1989.

(2) Braure. F. and Nohel, J.A., **Ordinary Differential Equations First Course**. and W. A Benjamin, Ine., Menlo Park. C.A., 1973.

(3) Dennis, G. Zill, **Differential Equations with Boundary (Value Problems)**, Weber & Scmidt, New York, 1989.

(4)Derrick. W.R. and Grossman. S.I., **Elementary Differential Equations with Applications** Addison Wesely publ. Co., Reading. MA., 1976.

(5) Finizio. N and Ladas, G., **Ordinary Differential Equations**, John, Wiley & Sons Inc., 1978.

(6) Hairer, E. and Wanner, G., **Solving Ordinary Differential Equations II**, John Wiley & Sone, Inc., 1969.

(7) Jack, K. Hale, **Ordinary Differential Equations**, John, Wiley & Sons Inc., 1969.

(8) Kraut, E., **Fundamental of Mathematical Physics**, New York, 1986.

(9)Nagle, R.K. and Saff, F.,B., **Fundamentals of Differential Equations,** Benjamin/Cummings publ Co., Inc., Menlo park CA., 1981.

(10)Rainville, E.D. and Bedient, P.E., **Elementary Differential Equations**, 6thed.. Macmillan Publ. Co.. Ine. New York, 1981.

(11) Raisinghania M.D., **Advanced Differential Equations** S. Chand and Company Ltd. India, 1991.

(12) Rao, M., **Ordinary Differential Equations**. Lohn Wiley and Sons, New York, 1989.

(13)Ross, S., **Ordinary Differential Equations**. Lohn Wiley and Sons, New York, 1990.

(14)Simmons, G.F., **Differential Equations with Applications and Historical Notes**. McCraw - Hill. New York, 1973.

(15)Spiegel, M.R., **Applied Differential Equations**, 3rded, Prentice-Hall-Inc-Englewood Chffs. N.L., 1981.

(16)Zill, D.G., **A First Course in Differential Equations, with Applications, 2nd** ed., Prindle, Weber and Schmidt, 1982.