القسم الثاني

تحليل الممتدات

TENSOR ANALYSIS

الباب الأول

جبر الممتدات Tensor Algebra

تعريفات أولية:

(١) الفراغ ذو الــ n بعد:

يتكون هذا الفراغ من مجموعة من النقاط، تتميز كل نقطة منها بعددn من الأبعاد أو (الإحداثيات) ويرمز لها بالرمز: $x^1, x^2, \ldots\ldots\ldots, x^n$

أو باختصار x^μ حيث $(\mu = 1,2,\ldots\ldots n)$

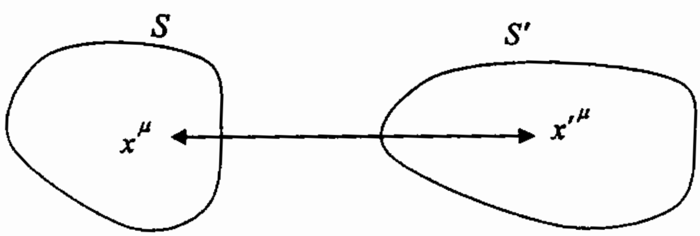
$$\therefore x^\mu \equiv (x^1, x^2, \ldots\ldots x^n)$$

كحالة خاصة: عندما $\mu = 1,2,3$

$$x^\mu \equiv (x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$$

وهو الفراغ الاقليدي ذو الثلاثة أبعاد.

(٢) تحويل الإحداثيات:



فراغ أو نظام الإحداثيات S' فراغ أو نظام الإحداثيات S

العلاقة الرياضية بين x^μ , x'^μ تسمى علاقة تحويل للإحداثيات.

(٣) إصطلاح التجميع:

$$S = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots\dots\dots \; a_n x^n = \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu x^\mu$$

ولسهولة الكتابة يمكن الاستغناء عن علامة $\sum$ بالرغم من وجود عملية التجميع. $\therefore S = a_\mu x^\mu = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots\dots$

وتعرف عملية الاستغناء عن كتابة $\sum$ مع وجود عملية التجميع بإصلاح التجميع (Summation Convention).

(٤) الدليل المتحرك (أو الدمية) (Dummy Index)

إذا تكرر دليل مرتين في حد ما، مرة في وضع علوي ومرة في وضع سفلي فانه يسمى دليل متحرك أو دمية، فمثلا α هو دليل متحرك في $a_\alpha^\beta x^\alpha$ ،
ولما كان α يأخذ القيم من ١ حتى n فيمكن استبداله بأي رمز آخر لا يستخدم في الحد : $a_\alpha^\beta x^\alpha = a_\mu^\beta x^\mu$ [حيث إستبدلنا α بالرمز μ] .

أيضا: فان الأدلة المتحركة يمكن تبادلها (تبديل أماكنها) فمثلا:

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dx'^\mu} \frac{dx^\beta}{dx'^\nu} = g_{\beta\alpha} \frac{dx^\beta}{dx'^\mu} \frac{dx^\alpha}{dx'^\nu}$$

أما الدليل الذي لا يتكرر فيسمى بالدليل الحقيقي (Real index) مثل الدليل β في $a_\alpha^\beta x^\alpha$ ولا يمكن استبدال الدليل الحقيقي بآخر حقيقي

أي أن $a_\alpha^\beta x^\alpha \neq a_\alpha^\mu x^\alpha$.

(٥) **المتجه المتغاير والمتجه مضاد التغاير** :

المتجه المتغاير

(Covariant) أو المتآلف

يعرف بمعادلة التحويل:

$$A'_{\alpha} = (\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}) A_{\mu}$$

الدليل سفلي (A_{μ})

المتجه مضاد المتغاير

(contraviariant) أو مضاد التآلف

يعرف بمعادلة التحويل:

$$A'^{\alpha} = (\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}) A^{\mu}$$

الدليل علوي (A^{μ})

ملحوظة: في الفراغ ذو الثلاثة أبعاد، يمكن تمثيل المتجه بطريقتين:

$(i) \quad \vec{A} \equiv (A_x, A_y, A_z)$

$(ii) \quad A_n \equiv (A_1, A_2, A_3)$

حيث $n = 1, 2, 3$

ويمكن تعميم التمثيل الثاني على الفراغ ذو الـ n بعد فنكتب المتجه ذو الـ n مركبة بالصورة: $A_{\mu} \equiv (A_1, A_2, ... A_n)$

حيث $\mu = 1, 2, ..., n$

وهذا المتجه يعرف بالمتجه المتغاير (Covariant) وهناك تمثيل آخر للمتجه في الفراغ ذو الـ n – بعد وذلك بكتابة الرمز (أو الدليل) μ أعلى رمز المتجه $A^{\mu} \equiv (A^1, A^2, ...A^n)$ وهذا المتجه يعرف بالمتجه مضاد التغاير (Contravariant)

(٦) اللامتغيرات (Invariants)

إذا كانت $\phi = \phi(x^{\mu})$ هي دالة قياسية في الإحداثيات x^{μ} ، وكانت تخضع لمعادلة التحويل : $\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu})$

أي أن الدالة لم تتغير قيمتها عند الانتقال من نظام الإحداثيات S إلى النظام S' فيقال أن الدالة ϕ هي لا متغير (Invariant) . $\phi = \phi' = Inv$

(٧) دلتا كرونيكر:

تعرف دلتا كرونيكر بالعلاقة:

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث x^{μ}, x^{ν} إحداثيات مستقلة ، ويكون لدينا حالتان:

[١] إذا كانت $\nu = \mu$:

$$\delta^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 1$$

مثال : بكتابة

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

فعندما $\mu = 1$:

$$\delta^1_1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^1} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

وعندما $\mu = 2$:

$$\delta^2_2 = \frac{\partial x^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

وهكذا.

[٢] إذا كانت $\nu \neq \mu$:

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = 0$$

فمثلا: $\nu = 1, \quad \mu = 2$

$$\delta_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^2} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

وهكذا.

وبذلك تأخذ العلاقة (١) الصورة:

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \begin{cases} 1(\mu = \nu) \\ 0(\mu \neq \nu) \end{cases}$$

وباستخدام قاعدة السلسلة يمكن كتابة δ_μ^ν بالصورة:-

$$\delta_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): أثبت أن:

$$(i) \quad \delta_\mu^\nu A^\mu = A^\nu$$

$$(ii) \quad \delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\alpha = \delta_\gamma^\beta$$

الحل:

(i) بوضع $\mu = \nu$ في الطرف الأيسر [لأن μ هو رمز دمية أو متحرك]

$$\therefore \delta_\mu^\nu A^\mu = \delta_\nu^\nu A^\nu = A^\nu$$

(ii) بوضع $\beta = \alpha$ في الطرف الأيسر [لأن α هو رمز دمية]

$$\therefore \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\beta}\delta^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}$$

<u>حل آخر لـ (ii)</u> باستخدام تعريف دلتا كرونيكر كالآتي:

$$\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} = \left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}\right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \delta^{\beta}_{\gamma}$$

<u>مثال (٢):</u>

إذا كانت علاقة التحويل للمتجه A^{ν} من S إلى S' هـي $A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$

فاثبت أن علاقة التحويل من S' إلى S هي $A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$

<u>الحل:</u> من العلاقة المعطاة:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \qquad \rightarrow (1)$$

بضرب الطرفين في $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$ نحصل على:

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} = \delta^{\nu}_{\nu} A^{\nu} = A^{\nu}$$

$$\therefore A^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A'^{\mu}$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت أن حاصل ضرب متجهين أحدهما متغـــاير A_μ والأخـــر مـــضاد التغاير B^μ هو كمية لا متغيرة (Invariant).

الحل: المطلوب إثبات أن:

$$A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu = Inv$$

$$\underset{S' \text{ في}}{\downarrow} \qquad \underset{S \text{ في}}{\downarrow}$$

ولإثبات ذلك:

نكتب معادلات التحويل للمتجهين B^μ و A_μ (الرمز μ متكرر)

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \qquad , \qquad B'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B^\mu$$

بالضرب نحصل على:

$$A'_\alpha B'^\alpha = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu\right)\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} B^\mu\right)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A_\mu B^\mu = A_\mu B^\mu$$

$$\therefore A_\mu B^\mu = A'_\alpha B'^\alpha$$

ولكن α رمز دمية (متكرر) فيمكن كتابته μ (مثلا)

$$\therefore A_\mu B^\mu = A'_\mu B'^\mu = Inv$$

وهو المطلوب.

<u>الممتدات:</u> (Tensors)

تعرف الممتدات بأنها كميات تخضع لقانون تحويل معين، وتنتج عن حاصل ضرب المتجهات المتغايرة ومضادة التغاير.

وهي ثلاثة أنواع:

(١) <u>ممتدات متغايرة (Covariant)</u>:

تنتج عن حاصل ضرب متجهين متغايرين A_α, B_β وتكتب بالصورة:

$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha B_\beta$$

ويخضع الممتد المتغاير $T_{\alpha\beta}$ لقانون التحويل الآتي:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}T_{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (1)$$

<u>الإثبات:</u>

نكتب قانون التحويل للمتجهين $A_\alpha,\ B_\beta$

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha \quad , \quad B'_\nu = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}B_\beta$$

ويكون حاصل الضرب بالصورة:

$$A'_\mu B'_\nu = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}A_\alpha\right)\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}B_\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}A_\alpha B_\beta$$

وبكتابة

$$A'_\mu B'_\nu = T'_{\mu\nu} \quad , \qquad A_\alpha B_\beta = T_{\alpha\beta}$$

$$\therefore T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}T_{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (1)$$

وهو المطلوب.

(٢) ممتدات مضادة التغاير (Contrariant):

تنتج عن حاصل ضرب متجهين مضادي التغاير A^{α}, B^{β} وتكتب بالصورة:

$$T^{\alpha\beta} = A^{\alpha} B^{\beta}$$

ويخضع الممتد مضاد التغاير $T^{\alpha\beta}$ لقانون التحويل الآتي:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \qquad \rightarrow (2)$$

الإثبات:

نكتب قانون التحويل للمتجهين A^{α}, B^{β}

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \quad , \quad B'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} B^{\beta}$$

ويكون حاصل الضرب بالصورة:

$$A'^{\mu} B'^{\nu} = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha}\right)\left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} B^{\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} A^{\alpha} B^{\beta}$$

وبكتابة:

$$A'^{\mu} B'^{\nu} = T'^{\mu\nu}, \quad A^{\alpha} B^{\beta} = T^{\alpha\beta}$$

$$\therefore\ T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}$$

وهو المطلوب.

(٣) ممتدات مختلطة (Mixed):

تنتج عن حاصل ضرب متجهين أحدهما متغاير A_α والآخر مضاد التغاير B^β ، ويكتب بالصورة:

$$T_\alpha{}^\beta = A_\alpha B^\beta$$

ويخضع الممتد المختلط T_α^β لقانون التحويل:

$$T'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} T_\alpha{}^\beta \qquad \rightarrow (3)$$

الإثبات:

بنفس الطريقة السابقة نكتب قانون التحويل للمتجهين A_α, B^β

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} A_\alpha \quad , \; B'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta$$

ويكون حاصل الضرب:

$$A'_\mu B'^\nu = \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^\mu} A^\alpha\right)\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} B^\beta\right)$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} A_\alpha B^\beta$$

وبكتابة:

$$T'_\mu = A'_\mu B'^\nu , \qquad T_\alpha^\beta = A_\alpha B^\beta$$

$$\therefore T'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} T_\alpha{}^\beta$$

$$\therefore T'^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} T_\alpha{}^\beta \qquad \rightarrow (3)$$

وهو المطلوب.

مرتبة الممتد (rank):

تعرف مرتبة الممتد بأنها عدد الأدلة المرتبطة برمز الممتد.

فمثلا: الممتد $T_{\mu\nu}$ هو ممتد من المرتبة الثانية لأن عدد الأدلة اثنين μ, ν

الممتدات ذات المرتبة الأعلى من اثنين :

يوجد العديد من الممتدات ذات المرتبة الأعلى من اثنين، وكأمثلة على ذلك:-

(١) $T_{\mu\nu\delta}$ ممتد متغاير من المرتبة الثالثة.

(٢) $T^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ممتد مضاد التغاير من المرتبة الرابعة.

(٣) $T^{\alpha\beta}_{\mu\nu\delta}$ ممتد مختلط من المرتبة الخامسة.

وتخضع هذه الممتدات لقوانين تحويل مماثلة.

الممتدات ذات المرتبة أقل من اثنين:

(١) المتجه سواء المتغاير (A_μ) أو مضاد التغاير (A^μ) يمكن اعتباره ممتدا من الرتبة الأولى (لوجود دليل واحد μ).

(٢) الكمية القياسية (ϕ) التي ليس لها مركبات، وبالتالي فلا تتميز بوجود دليل لها، فهي ممتد من المرتبة صفر.

$\therefore$ المتجه هو ممتد من الرتبة الأولى

الكمية القياسية هي ممتد من الرتبة صفر.

رتبة الممتد (order) :

تعرف الرتبة بأنها عدد الادلة من نوع معين، فمثلاً:

(١) $T^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ هو ممتد مختلط من المرتبة الرابعة (عدد الأدلة الكلي أربعة)، وهو متغاير من الرتبة الثانية (لوجود دليلين متغايرين أو سفليين) ، ومضاد التغاير من الرتبة الثانية أيضاً (لوجود دليلين مضادي التغاير أو علويين).

(٢) $T^{\mu\nu\delta}_{\alpha\beta}$ هو ممتد مختلط من الرتبة الخامسة، وهو متغاير من الرتبة الثانية ومضاد التغاير من الرتبة الثالثة، وهكذا

∴ **المرتبة:** هي عدد الأدلة الكلي، **الرتبة:** هي عدد الأدلة من نوع معين

الممتدات (Tensors) والمصفوفات (Matrices):

مركبات الممتد $T_{\mu\nu}$ عندما $\mu,\nu=1,2,3$ هي:

$$T_{11}\ ,T_{12}\ ,T_{13}\ ,T_{21}\ ,T_{22}\ ,T_{23}\ ,T_{31}\ ,T_{32}\ ,T_{33}\ ,$$

∴ الممتد $T_{\mu\nu}$ (حيث $\mu,\nu=1,2,3$) يكون له ٩ مركبات، بينما المتجه A_μ (حيث $\mu = 1,2,3$) له ٣ مركبات فقط (A_1, A_2, A_3)

∴ الممتد هو امتداد لمفهوم المتجه.

ويمكن التعبير عن أي ممتد بمصفوفة عناصرها هي مركبات الممتد

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

تسمى المركبات T_{33} ، T_{22} ، T_{11} أي $T_{\mu\mu}$ بالمركبات القطرية (Diagonal Components) للممتد $T_{\mu\nu}$.

كما يسمى مجموع العناصر القطرية بالأثر (Trace)

$$T_r\left(T_{\mu\nu}\right) = \sum T_{\mu\mu} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

مركبات الممتد $T_{\mu\nu\delta}$:

بأخذ $\mu,\nu,\delta = 1,2,3$ نحصل على ٢٧ مركبة للممتد الثلاثي المرتبة $T_{\mu\nu\delta}$

وهي:

$T_{111}, T_{112}, T_{113}, T_{121}, T_{122}, T_{123}, T_{131}, T_{132}, T_{133},$

$T_{211}, T_{212}, T_{213}, T_{221}, T_{222}, T_{223}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

وهكذا بالنسبة للممتدات ذات المرتبات الأعلى.

أمثلة محلولة:

مثال (١) :

اكتب قانون التحويل من منظومة الإحداثيات $S(x^{\mu})$ إلى المنظومة $S'(x'^{\mu})$ وكذلك الخواص للممتدين :

$$(i)\ \ G_{l}^{mn} \quad , \qquad (ii)\ \ D_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta}$$

الحل :

(i) الممتد G_{l}^{mn}

قانون التحويل :

$$G_{q}^{\prime rp} = \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{n}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x'^{q}} G_{l}^{mn}$$

الخواص: هو ممتد مختلط من المرتبة الثالثة وهو متغاير من الرتبة الأولى ومضاد التغاير من الرتبة الثانية.

(ii) **الممتد** $D^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$

قانون التحويل:

$$D'^{lm}_{pqr} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{q}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{r}} D^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$$

الخواص: هو ممتد مختلط من المرتبة الخامسة وهو متغاير من الرتبة الثالثة ومضاد التغاير من الرتبة الثانية.

مثال (٢):

إذا كانت $A(\alpha, \beta, \gamma)$ كمية تتحول من المنظومة S إلى المنظومة S' تبعاً للقانون:

$$A'(\mu, \nu, \sigma) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} A(\alpha, \beta, \gamma)$$

فأثبت أن هذه الكمية تشكل ممتدا واذكر خواصه.

الحل: نكتب قانون التحويل للممتد الذي له نفس معاملات التحويل السابقة:

$$A'^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\gamma}} A^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

وبمقارنة قانون التحويل المعطى للكمية $A(\alpha, \beta, \gamma)$ بقانون التحويل هذا، نجد أن:

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = A^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

أي أنها تشكل ممتدا، وخواصه هي:

ممتد مختلط من المرتبة الثالثة، وهو متغاير من الرتبة الثانية ومضاد التغاير من الرتبة الأولى.

مثال(٣):

أثبت أن دلتاكرونيكر تشكل ممتدا مختلطا من المرتبة الثانية.

الحل:

المطلوب إثبات أن دلتا كرونيكر δ^{ν}_{μ} تشكل ممتدا مختلطا من المرتبة الثانية

ولإثبات ذلك نثبت أن δ^{ν}_{μ} يجب أن تخضع لقانون التحويل الأتي:-

$$\delta'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\nu}_{\mu} \qquad \rightarrow (1)$$

ولإثبات ذلك: نبدأ بالطرف الأيمن:

$$R.H.S = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\nu}_{\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta'^{\alpha}_{\beta} = L.H.S$$

حيث μ, ν رموز دمية فيمكن كتابة $\mu = \nu$

طريقة أخرى:

نبدأ بالطرف الأيسر ونستخدم تعريف دلتا كرونيكر

$$L.H.S = \delta'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \delta^{\nu}_{\mu} = R.H.S$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٤):</u>

أثبت أنه إذا كانت مركبات ممتد تساوي صفرا في نظام إحداثيات معين فإنها تساوي صفرا في سائر أنظمة الإحداثيات.

<u>الحل</u> : نفرض أن مركبات الممتد في النظام $S(x^{\mu})$ هي:

$$T_{\mu\nu\lambda\cdots n}=0 \qquad \underline{\qquad} \quad (1)$$ [ممتد من المرتبة n]

بضرب طرفي هذه العلاقة في المعاملات:-

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}},\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu}},\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda}},\ldots\ldots\frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{n}}$$

$$\therefore \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\lambda}}\cdots\cdots\frac{\partial x^{n}}{\partial x'^{n}}T_{\mu\nu\lambda\ldots\ldots n}=0 \qquad \rightarrow (2)$$

ولكن من تعريف معادلات التحويل للممتدات فان الطرف الأيسر من (٢) يكون:

$$T'_{\mu\nu\lambda\ \ldots\ldots\ n}$$

$$\therefore T'_{\mu\nu\lambda\ldots\ldots n}=0 \qquad \rightarrow (3)$$

من (٣) و(١) ينتج أنه إذا كانت المركبات $T_{\mu\nu\lambda\ldots\ldots n}$ تساوي صفرا في S فإنها تساوي صفرا في S' وبالتالي في أي نظام أخر.

وهو المطلوب .

<u>ملحوظة:</u> يوضح هذا المثال خاصية هامة للممتدات وهي احتفاظ الممتد بصورته في أنظمة الإحداثيات المختلفة .

مثال (٥):

إذا كانت x(p, q, r) كمية ما، وكان A_r^{qs} كمية ممتدة اختيارية بحيث أن
$x(p,q,r)A_r^{qs} = 0$
فان $x(p,q,r) = 0$ (أي أنه يمكن دائما اختيار $A_r^{qs} \neq 0$)

الحل: حيث أن A_r^{qs} هي كمية ممتدة اختيارية فباختيار مركبة واحدة لا تساوي صفرا (ولتكن المركبة ذات القيم q = 2, r = 3 أي المركبة A_3^{2s}) بينما كل المركبات الأخرى تساوي صفرا ، إذن : $x(p,2,3)A_3^{2s} = 0$
وحيث أن $A_3^{2s} \neq 0$ فان $x(p,q,r) = 0$ ، وبأسلوب مماثل بأخذ كل التوافيق الممكنة لقيم q , r يكون لدينا دائما $x(p,q,r) = 0$.
وهو المطلوب.

ملحوظة:

تستخدم هذه النتيجة كثيرا في حل المسائل، ويتضح ذلك من الأمثلة التالية.

مثال (٦):

إذا كانت A^σ متجه مضاد التغاير واختياري وكانت $A^\sigma B_{\mu\nu}$ تمثل ممتدا فاثبت أن $B_{\mu\nu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل: حيث أن الكمية $A^\sigma B_{\mu\nu}$ تمثل ممتدا فيمكن كتابته بالصورة $C_{\mu\nu}^{\sigma}$
ويكون قانون التحويل له:

$$C'^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} C^{\sigma}_{\mu\nu}$$

$$A'^{\alpha} B'_{\beta\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} A^{\sigma} B_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} B_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} A'^{\alpha} B_{\mu\nu}$$

$$\therefore A'^{\alpha} \left[B'_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu} \right] = 0$$

حيث :

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}$$

وحيث أن A'^{α} هو متجه لختياري فيمكن أخذه $A'^{\alpha} \neq 0$

$$\therefore B'_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu} = 0$$

$$\therefore B'_{\beta\gamma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\gamma}} B_{\mu\nu}$$

وهي معادلة تحويل لممتد $B_{\mu\nu}$ متغاير من المرتبة الثانية وهو المطلوب.

مثال(٧):

إذا كان A^{μ}, B^{ν} متجهان مضادا التغاير واختياريا ن ، وكانت الكمية $(C_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu})$ تمثل كمية لا متغيرة ، فاثبت أن $C_{\mu\nu}$ يمثل ممتدا متغايرا من المرتبة الثانية.

<u>الحل:</u> حيث أن الكمية $(C_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu})$ هي كمية لا متغيرة (Invariant) :

$$\therefore C'_{\mu\nu}A'^{\mu}B'^{\nu} = C_{\mu\nu}A^{\mu}B^{\nu} \qquad \to (1)$$

ومن قوانين التحويل للممتدين A^{μ}, B^{ν} :

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \to A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A'^{\alpha} \qquad \to (2)$$

(مثال سابق)

$$B'^{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} B^{\nu} \to B^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B'^{\beta} \qquad \to (3)$$

بالتعويض من (٣) و(٢) في الطرف الأيمن للمعادلة (١):

$$C'_{\mu\nu}A'^{\mu}B'^{\nu} = C_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A'^{\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B'^{\beta}\right)$$

$$= C_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A'^{\alpha} B'^{\beta}$$

وحيث أن μ,ν في الطرف الأيسر هي رموز دمية (متكررة) فيمكن اسـتبدالها بالرمزين α,β في هذا الطرف.

$$\therefore C'_{\alpha\beta}A'^{\alpha}B'^{\beta} = C_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A'^{\alpha} B'^{\beta}$$

$$A'^{\alpha}B'^{\beta}\left[C'_{\alpha\beta} - C_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\right] = 0$$

وحيث أن A'^{α}, B'^{β} اختياريان فيمكن أخذ $A'^{\alpha} B'^{\beta} \neq 0$

$$\therefore\ C'_{\alpha\beta} - C_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = 0$$

$$\therefore\ C'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = C_{\mu\nu}$$

وهذا يعني أن $C_{\mu\nu}$ تشكل ممتدا متغايرا من المرتبة الثانية ، وهو المطلوب.

مثال (٨):

أثبت أن تفاضلة دالة قياسية (لا متغيرة) ϕ هي أيضا كمية لا متغيرة (Invariant).

الحل:

حيث أن ϕ لا متغيرة

$$\therefore\ \phi' = \phi \qquad \rightarrow (1)$$

والمطلوب إثبات أن: $d\phi' = d\phi$

ولإثبات ذلك: من تعريف التفاضلة (Differential)

$$\phi = \phi(x^{\mu})$$

$$\phi' = \phi'(x'^{\mu})$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \qquad \rightarrow (2)$$

$$d\phi' = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} dx'^{\mu} \qquad \rightarrow (3)$$

أيضا فان:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} \qquad \rightarrow (4)$$

بالتعويض من (٤)و(١) في (٣):

$$d\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta}\right)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} dx^{\beta} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \qquad \rightarrow (5)$$

(حيث أن β رمز دمية فيمكن كتابته يساوي μ)

من (٥) و(٢) ينتج أن $d\phi' = d\phi$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٩):</u>

أثبت أن مشتقة دالة قياسية (أي ممتد من المرتبة الصفرية)تشكل متجها (أي ممتدا من المرتبة الأولى).

<u>الحل:</u> الدالة القياسية هي دالة لا متغيره ، أي أن:

$$\phi'(x'^{\mu}) = \phi(x^{\mu})$$

مشتقة هذه الدالة هي:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \rightarrow (1)$$

وبكتابة :

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}} = C'_{\mu} \quad ، \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} = C_{\alpha}$$

فتصبح (١):

$$C'_{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} C_{\alpha}$$

وهي معادلة تحويل لمتجه (أي ممتد من المرتبة الأولى) متغاير وهذا يعني أن المشتقة $C_\alpha = \dfrac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$ للدالة القياسية ϕ تشكل متجها (أي ممتدا من المرتبة الأولى) ، وهو المطلوب.

مثال (١٠) :

أثبت أن مشتقة ممتد من المرتبة الأولى(متجه) لا تشكل ممتدا (أي لا تخضع لقانون تحويل الممتدات).

الحل:

نعتبر الممتد من المرتبة الأولى هو المتجه المتغاير A_μ ولنكتب معادلة التحويل له:

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x'^β نحصل على المشتقة بالصورة:

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu\right)$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\beta}\right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right) + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\mu$$

وبكتابة:

$$\frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = C'_{\alpha\beta} \quad , \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = C_{\mu\nu}$$

$$\therefore C'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} C'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \mathrm{A}_\mu$$

ونظرا لوجود الحد الثاني في الطرف الأيمن ، فان المشتقة $C_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ لا تشكل ممتدا لأنها لا تخضع لقانون تحويل الممتدات.

$\therefore$ مشتقة ممتد من المرتبة الأولى A_μ لا تكون ممتدا . وهو المطلوب .

العمليات الأساسية على الممتدات

(١) جمع وطرح الممتدات:

نظرية:

"حاصل جمع (أو الفرق بين) ممتدين من نفس المرتبة والنوع (الرتبة) يكون أيضا ممتدا من نفس المرتبة والنوع".

الإثبات:

إذا كان $A_{\mu}^{\alpha\beta}, B_{\mu}^{\alpha\beta}$ ممتدان من نفس المرتبة والنوع (الرتبة الأولى متغايرة والثانية مضادة التغاير).

فان:
$$A_{\mu}^{\alpha\beta} \pm B_{\mu}^{\alpha\beta} = C_{\mu}^{\alpha\beta}$$

ولإثبات ذلك: نكتب معادلات التحويل:

$$A_{k}^{\prime rs} = \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{k}} A_{\mu}^{\alpha\beta}$$

$$B_{k}^{\prime rs} = \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{k}} B_{\mu}^{\alpha\beta}$$

بالجمع (أو الطرح):

$$A_{k}^{\prime rs} \pm B_{k}^{\prime rs} = \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{k}} (A_{\mu}^{\alpha\beta} \pm B_{\mu}^{\alpha\beta})$$

$$C_{k}^{\prime rs} = \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{k}} C_{\mu}^{\alpha\beta}$$

أي أن الممتد $A_{\mu}^{\alpha\beta} \pm B_{\mu}^{\alpha\beta} = C_{\mu}^{\alpha\beta}$ هو ممتد من نفس المرتبة والنوع للممتدين $A_{\mu}^{\alpha\beta} \;,\; B_{\mu}^{\alpha\beta}$

وهو المطلوب.

(٢) الضرب الخارجي (أو المعتاد) للممتدات : (Outer Product)

نظرية:

" حاصل الضرب الخارجي (أو المعتاد) لممتدين هو ممتد مرتبته تساوي مجموع مرتبتي الممتدين " .

الإثبات:

نعتبر الممتدين B_{ν}^{γ} , $A_{\mu}^{\alpha\beta}$ فان حاصل ضربهما الخارجي (أو المعتاد) هو:

$$A_{\mu}^{\alpha\beta} B_{\nu}^{\gamma} = C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$$

ولإثبات ذلك: معادلات التحويل للممتدين $A_{\mu}^{\alpha\beta}$, B_{ν}^{γ}

$$A_{l}^{\prime km} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \mathrm{A}_{\mu}^{\alpha\beta}$$

$$B_{i}^{\prime j} = \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{i}} B_{\nu}^{\gamma}$$

وبالضرب المعتاد (أو الخارجي):

$$A_{l}^{\prime km} B_{i}^{\prime j} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{i}} A_{\mu}^{\alpha\beta} B_{\nu}^{\gamma}$$

$$= \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{i}} A_{\mu}^{\alpha\beta} B_{\nu}^{\gamma}$$

$$C_{li}^{\prime kmj} = \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{i}} C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$$

أي أن حاصل الضرب $A_{\mu}^{\alpha\beta} B_{\nu}^{\gamma} = C_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma}$ هو ممتد من المرتبة الخامسة وهـي مجموع مرتبتي الممتدين $A_{\mu}^{\alpha\beta}, B_{\nu}^{\gamma}$. وهو المطلوب .

(٣) التقليص (أو الانكماش) Contraction :

عملية التقليص أو الانكماش لممتد هي تقليل (أو إنقاص) مرتبة الممتد بـاثنين، وتتم هذه العملية بمساواة دليل سفلي (متغاير) بدليل علوي (مضادا لتغاير)

مثال: الممتد الخماسي $A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$ يمكن تقليصه إلى الممتد الثلاثي المرتبة $B^{\beta\gamma}_{\nu}$ وذلك بمساواة $\alpha = \mu$

$$\therefore A^{\mu\beta\gamma}_{\mu\nu} = B^{\beta\gamma}_{\nu}$$

البرهان: نكتب معادلة التحويل للممتد الخماسي (الأصلي)

$$A'^{mlk}_{ij} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j}A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$$

ولتقليص هذا الممتد (تقليص مرتبته باثنين)

نضع $i = m$:

$$A'^{mlk}_{mj} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j}A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^\alpha}A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j}\delta^\mu_\alpha A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$$

ولكن:

$$\delta^\mu_\alpha A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu} = A^{\beta\gamma}_{\nu}$$

$$\therefore A'^{mlk}_{mj} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^j}A^{\beta\gamma}_{\nu}$$

وهذه معادلة تحويل ممتد ثلاثي بالصورة:

$$A'^{lk}_{j} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{j}} A^{\beta\gamma}_{\nu}$$

وهذا يعني أن عملية التقليص حولت الممتد الخماسي $A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$ إلى الممتد الثلاثي $A^{\beta\gamma}_{\nu}$ وذلك بوضع $\alpha = \mu$.

<u>ملحوظة :</u> يمكن إجراء عملية التقليص مرتين متتاليتين على نفس الممتد، فمثلا: الممتد الخماسي $A^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu}$ يمكن تقليصه وتحويله إلى الممتد الثلاثي $A^{\beta\gamma}_{\nu}$ بوضع $\alpha = \mu$ ، ومن الممتد الثلاثي $A^{\beta\gamma}_{\nu}$ يمكن الحصول على ممتد أحادي (أي متجه) بوضع $\beta = \nu$.

(٤) <u>الضرب الداخلي (Inner Product)</u>

تشمل هذه العملية مجموع عمليتين على التوالي :

(١)- ضرب خارجي + (٢)- تقليص

<u>فمثلا:</u> لإيجاد حاصل الضرب الداخلي للممتدين $A^{\alpha}_{\beta}, \quad B^{\mu\nu}_{\sigma}$

(١) <u>نجري عملية ضرب خارجي:</u>

$$A^{\alpha}_{\beta} B^{\mu\nu}_{\sigma} = C^{\alpha\mu\nu}_{\beta\sigma}$$

(٢) <u>نجري عملية تقليص للممتد الناتج:</u>

فبوضع $\alpha = \beta$ نحصل على $C^{\beta\mu\nu}_{\beta\sigma} = D^{\mu\nu}_{\sigma}$ وبذلك فإن $D^{\mu\nu}_{\sigma}$ هو حاصل الضرب الداخلي للممتدين المعطيين.

أمثلة محلولة:

مثال(١):

كيف تحصل على ممتد من المرتبة الأولى (متجه) من الممتد الثلاثي المرتبة $A^{\alpha}_{\mu\nu}$ مع إجراء العمليات بالتفصيل.

الحل:

من الممتد الثلاثي $A^{\alpha}_{\mu\nu}$ يمكن الحصول على متجه (ممتد من المرتبة الأولى) بعملية تقليص (أو انكماش) كالآتي:

نكتب معادلة التحويل للممتد $A^{\alpha}_{\mu\nu}$:

$$A'^{l}_{mn} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A^{\alpha}_{\mu\nu}$$

بوضع $l = m$ لتقليص الممتد ، نحصل على:

$$A'^{m}_{mn} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A^{\alpha}_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\alpha} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} \delta^{\mu}_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A_{\nu}$$

حيث $\delta^{\mu}_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu\nu} = A_{\nu}$

وبالمقارنة مع الممتد $A'_{n} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A_{\nu}$ نجد أن:

$$A'^{m}_{mn} = A'_{n} \qquad \therefore\ A'_{n} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} A_{\nu}$$

أي أن عملية التقليص حولت الممتد الثلاثي المرتبة $A^{\alpha}_{\mu\nu}$ إلى الممتد A_{ν} الأحادي المرتبة. (المتجه) ، وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> أثبت الآتي:

(i) تقليص الممتد المختلط A_{μ}^{ν} يعطي كمية لا متغيرة (Inv.)

(ii) حاصل الضرب الداخلي للمتجهين A^{μ}, B_{ν} هو كمية لا متغيرة.

<u>الحل:</u>

(١) معادلة التحويل للممتد A_{μ}^{ν}

$$A'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\mu}^{\nu}$$

<u>لتقليص هذا الممتد:</u>

نضع $\alpha = \beta$:

$$A'^{\beta}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A_{\mu}^{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} A_{\mu}^{\nu} = A = Inv.$$

حيث $\delta_{\nu}^{\mu} A_{\mu}^{\nu} = A$

(ii) معادلات التحويل للمتجهين A^{μ}, B_{ν}

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}, B'_{\beta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B_{\nu}$$

حاصل الضرب الداخلي =حاصل ضرب خارجي + تقليص.

<u>أولا: حاصل الضرب الخارجي:</u>

$$A'^{\alpha} B'_{\beta} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B_{\nu} \right) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A^{\mu} B_{\nu}$$

$$\therefore C'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} C_{\nu}^{\mu}$$

ثانيا:عملية التقليص للممتد C^{μ}_{ν}:

تتم هذه العملية بوضع $\alpha = \beta$

$$\therefore C'^{\beta}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}C^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}}C^{\mu}_{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}C^{\mu}_{\nu} = \mathcal{C} = Inv.$$

وهو المطلوب.

مثال(٣):

أثبت أن حاصل الضرب الداخلي للممتدين B^{α}_{β} , $C^{\sigma}_{\mu\nu}$ هو ممتد من المرتبة الثالثة.

الحل:

معادلات التحويل للممتدين:

$$B'^{i}_{j} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{j}}B^{\alpha}_{\beta}$$

$$C'^{l}_{mn} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}}C^{\sigma}_{\mu\nu}$$

لإيجاد حاصل الضرب الداخلي: نجري عمليتين متتاليتين هما:

(i) ضرب خارجي:

$$B'^{i}_{j}C'^{l}_{mn} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}}B^{\alpha}_{\beta}C^{\sigma}_{\mu\nu}$$

$$D'^{il}_{jmn} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{j}}\frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}}D^{\alpha\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

(ii) تقليص:

ونأتي بأخذ $i = j$ (مثلا) فنحصل على:

$$D'^{jl}_{jmn} = \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} D^{\alpha\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

$$= \delta^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} D^{\alpha\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} \delta^{\beta}_{\alpha} D^{\alpha\sigma}_{\beta\mu\nu}$$

$$= \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} D^{\sigma}_{\mu\nu}$$

حيث

$$\delta^{\beta}_{\alpha} D^{\alpha\sigma}_{\beta\mu\nu} = D^{\sigma}_{\mu\nu}$$

المعادلة السابقة تكافئ معادلة تحويل للممتد:

$$D'^{l}_{mn} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{m}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{n}} D^{\sigma}_{\mu\nu}$$

أي أن حاصل الضرب الداخلي للممتدين $B^{\alpha}_{\beta}, C^{\sigma}_{\mu\nu}$ هو الممتـد ذو المرتبـة الثالثة $D^{\sigma}_{\mu\nu}$ وهو المطلوب.

<u>نظرية خارج القسمة</u>: تنص هذه النظرية على الآتي:

" إذا كانت $X(\mu,\nu)$ هي كمية ما، وكان حاصل ضربها الخارجي مـع ممتـد اختياري يساوي ممتدا آخرا فان $X(\mu,\nu)$ تكون نفسها ممتدا"

الإثبات:

إذا كانت $x(\mu,\nu)$ هي كمية ما، وكان حاصل ضربها الخارجي مع ممتد اختياري A_μ (من المرتبة الأولى للتبسيط) هو : $x(\mu,\nu)A_\mu = B_\nu$ حيث B_ν هو ممتد آخر فالمطلوب إثبات أن $x(\mu,\nu)$ تشكل ممتدا.

ولإثبات ذلك: نكتب معادلة التحويل للممتد الاختياري A_μ :

$$A'_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A_\mu \qquad \rightarrow (1)$$

وإذا انتقلنا إلى نظام آخر للإحداثيات فيمكننا كتابة:

$$x'(\alpha,\beta)A'_\alpha = B'_\beta \qquad \rightarrow (2)$$

حيث (من رأس المسألة):

$$x(\mu,\nu)A_\mu = B_\nu \qquad \rightarrow (3)$$

ولكن:

$$B'_\beta = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} B_\nu$$

$$= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\left[x(\mu,\nu)A_\mu\right] \qquad \rightarrow (4)$$

بالتعويض في (٢):

$$\therefore\ x'(\alpha,\beta)A'_\alpha = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} x(\mu,\nu)A_\mu$$

$$\therefore\ x'(\alpha,\beta)\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}A_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} x(\mu,\nu)A_\mu$$

بالضرب في $\dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$:

$$\therefore\ x'(\alpha,\beta)A_{\mu}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}x(\mu,\nu)A_{\mu}$$

$$\therefore\ \left[x'(\alpha,\beta)-\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}x(\mu,\nu)\right]A_{\mu}=0$$

وحيث أن A_{μ} هو ممتد اختياري فيمكن أخذه $A_{\mu}\neq 0$

وبذلك فان:

$$x'(\alpha,\beta)=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}x(\mu,\nu)$$

وبكتابة معادلة التحويل:

$$T'^{\alpha}_{\beta}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}T^{\mu}_{\nu}$$

نجـــــد أن $x(\mu,\nu)=T^{\mu}_{\nu}$ أي أن $x(\mu,\nu)$ تـــــشكل ممتـــــدا .
وهو المطلوب.

أمثلة على نظرية خارج القسمة:

مثال(١):

إذا كانت $C(\mu,\nu)$ هي كمية ما، وكان A^{μ}, B^{ν} ممتدان اختياريــان (متجهان مضادا التغاير) وكان حاصل الــضرب $C(\mu,\nu)A^{\mu}B^{\nu}$ يمثــل ممتدا من المرتبة الصفرية (أي كمية لا متغيرة) فاثبت أن $C(\mu,\nu)$ تشكل ممتدا واذكر خواصه.

الحل: معادلات التحويل للممتدين $A^{\mu},\ B^{\nu}$:

$$A'^{\alpha}=\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}A^{\mu}\quad\rightarrow A^{\mu}=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}A'^{\alpha}\qquad\rightarrow(1)$$

$$B'^{\beta}=\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}B^{\nu}\quad\rightarrow B^{\nu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}B'^{\beta}\qquad\rightarrow(2)$$

وحيث أن $C(\mu,\nu)A^{\mu}B^{\nu}$ هي كمية لا متغيرة.

$$\therefore\ C'(\mu,\nu)A'^{\mu}B'^{\nu}=C(\mu,\nu)A^{\mu}B^{\nu}\qquad\rightarrow(3)$$

بالتعويض من (٢) و(١) في الطرف الأيمن من (٣) نحصل على:

$$C'(\mu,\nu)A'^{\mu}B'^{\nu}=C(\mu,\nu)\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}A'^{\alpha}\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}B'^{\beta}\right)$$

$$=C(\mu,\nu)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}A'^{\alpha}B'^{\beta}$$

وحيث أن $\mu,\ \nu$ هي رموز دمية فيمكن استبدالها في التعبيــر الموجــود فــي الطرف الأيسر بالرمزين $\alpha,\ \beta$.

$$C'(\alpha,\beta)A'^{\alpha}B'^{\beta} = C(\mu,\nu)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}A'^{\alpha}B'^{\beta}$$

$$\therefore [C'(\alpha,\beta)-(\mu,\nu)\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}]A'^{\alpha}B'^{\beta} = 0$$

وحيث أن A'^{α}, B'^{β} اختياريان فيمكن أخذ $A'^{\alpha}B'^{\beta} \neq 0$

$$\therefore C'(\alpha,\beta) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}C(\mu,\nu)$$

وهي معادلة تحويل لممتد صورته:

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}}T_{\mu\nu}$$

فبالمقارنة نجد أن: $C(\mu,\nu) = T_{\mu\nu}$

أي أنها تشكل ممتدا متغايرا من المرتبة الثانية، وهو المطلوب.

مثال(٢):

إذا كانت $C(\mu,\nu)$ هي كمية ما، وكان A^{ν}_{α} هـو ممتـد اختيـاري لا يساوي صفرا، وكان حاصل الضرب $C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha} = B^{\mu}_{\alpha}$ حيث B^{μ}_{α} هـو ممتد آخر، أثبت أن $C(\mu,\nu)$ يشكل ممتد واذكر خواصه.

الحل: معادلة التحويل للممتد الاختياري A^{ν}_{α}

$$A'^{s}_{r} = \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}A^{\nu}_{\alpha} \qquad \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة فإن

$$C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha} = B^{\mu}_{\alpha} \qquad \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$C'(p,s)A'^{s}_{r} = B'^{p}_{r} = \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}B^{\mu}_{\alpha}$$

$$= \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha} \qquad \text{[من (٢)]}$$

وباستخدام (١) نحصل على:

$$C'(p,s)\frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}A^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha}$$

وبالضرب في $\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}}\right)$:

$$\therefore C'(p,s)A^{\nu}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{r}}C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}C(\mu,\nu)A^{\nu}_{\alpha}$$

$$\therefore \left[C'(p,s) - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}C(\mu,\nu)\right]A^{\nu}_{\alpha} = 0$$

وحيث أن A^{ν}_{α} لا يساوي صفرا فان:

$$C'(p,s) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}\frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}C(\mu,\nu)$$

وهي معادلة تحويل لممتد صورته:

$$T'^{p}_{s} = \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{s}}T^{\mu}_{\nu}$$

فبالمقارنة نجد أن: $C(\mu,\nu) = T^{\mu}_{\nu}$

أي أنها تشكل ممتدا مختلطا من المرتبة الثانية، وهو المطلوب .

الممتد المتماثل والممتد مضاد التماثل:

(١) يعرف الممتد المتماثل بالعلاقة:- $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ ،

(متماثل في الدليلين μ, ν)

أيضا: إذا كان $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} = A_{\mu\nu}^{\beta\alpha\gamma}$ فانه يكون متماثلا في الدليلين α, β

(٢) يعرف الممتد مضاد التماثل بالعلاقة: $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$

(مضاد التماثل في μ, ν)

أيضا: إذا كان $A_{\mu\nu}^{\alpha\beta\gamma} = -A_{\mu\nu}^{\beta\alpha\gamma}$ فانه يكون مضاد التماثل في μ, ν

ملحوظة: ينطبق التعريف السابق على الممتد مضاد التغاير

$A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ (متماثل)، $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ (مضاد التماثل).

أمثلة محلولة:

مثال(١):

أثبت أن المركبات القطرية للممتد مضاد التماثل تساوي صفرا.

الحل: من تعريف الممتد مضاد التماثل $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$

$$\therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 0$$

وفي حالة المركبات القطرية فان: $\mu = \nu$

$$\therefore A_{\mu\mu} + A_{\mu\mu} = 0$$

$$\therefore 2A_{\mu\mu} = 0 \qquad \rightarrow A_{\mu\mu} = 0$$

أي أن المركبات القطرية .... $A_{11}, A_{22}, A_{33},$ للممتد مضاد التماثل تساوي أصفارا. وهو المطلوب .

<u>مثال(٢):</u>

أثبت أن أي ممتد يمكن كتابته كمجموع ممتدين أحدهما متماثل والآخر مضاد التماثل في زوج من الأدلة المتغايرة أو مضادة التغاير.

<u>الحل</u>: <u>في حالة الممتد المتغاير</u> $A_{\mu\nu}$:

يمكن كتابة $A_{\mu\nu}$ بالصورة:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = B_{\mu\nu} + C_{\mu\nu}$$

ويمكن إثبات أن $B_{\mu\nu}$، وبذلك هو ممتد متماثل، بينما $C_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل ، وبذلك يثبت المطلوب.

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\nu\mu} + A_{\mu\nu}) = B_{\nu\mu}$$

أي أن $B_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) = -\frac{1}{2}(A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu}) = -C_{\nu\mu}$$

أي أن $C_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل وهو المطلوب.

ويمكن إثبات هذه الخاصية في حالة الممتد مضاد التغاير $A^{\mu\nu}$ بنفس الطريقة.

<u>مثال (٣):</u>

أثبت أنه إذا كان هناك ممتدا متماثلا (أو مضاد التماثل) بالنسبة لأي دليلين في نظام للإحداثيات فانه يظل متماثلا(أو مضاد التماثل) بالنسبة لنفس الدليلين في أي نظام آخر.

الحل:

(i) في حالة الممتد $A_{\alpha\beta}$ المتغاير والمتماثل في الدليلين $\alpha,\ \beta$:

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}A_{\beta\alpha} = A'_{\nu\mu}$$

أي أنه إذا كان $A_{\alpha\beta}$ متماثلا في النظام $S(x^{\mu})$ فإنه يكون متماثلاً أيضاً في النظام $S'(x'^{\mu})$ بالنسبة لـ α, β.

(ii) في حالة الممتد $A^{\alpha\beta}$ مضاد التغاير ومضاد التماثل في الدليلين $\alpha,\ \beta$

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$$

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}A^{\alpha\beta} = -\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\beta\alpha} = -A'^{\nu\mu}$$

أي أنه إذا كان $A^{\alpha\beta}$ مضاد التماثل في النظام $S(x^{\mu})$ فانه يظل مضاد التماثل في النظام $S'(x'^{\mu})$ بالنسبة لـ α, β.

مثال(٤):

إذا كان A^{pq}, B_{rs} ممتدان مضادا التماثل فاثبت أن:

حاصل ضربهما $A^{pq}B_{rs} = C^{pq}_{rs}$ هو ممتد متماثل في زوجي الأدلة المتغايرة (r, s) ومضادة التغاير (p, q).

الحل:

المطلوب إثبات أن $C^{qp}_{sr} = C^{pq}_{rs}$ ، حيث أن A^{pq}, B_{rs} ممتدان مضادا التماثل

$$\therefore\ A^{pq} = -A^{qp}, \qquad B_{rs} = -B_{sr}$$

وحيث أن: $C_{rs}^{pq} = A^{pq} B_{rs}$ وبتبديل وضع الأدلة (r,s) ، (q,p) في الطرفين :

$$\therefore C_{sr}{}^{qp} = A^{qp} B_{sr} = (-A^{pq})(-B_{rs}) = A^{pq} B_{rs} = C_{rs}{}^{pq}$$

وهو المطلوب.

مثال(٥):

إذا كان $A^{\alpha\beta}$ ممتد مضاد التماثل وكان B_α, B_β متجهان متغايران ، فاثبت أن : $A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$

الحل:

حيث أن $A^{\alpha\beta}$ مضاد التماثل فان: $A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$ وباعتبار الكمية $A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta$ وبتبادل الأدلة:

$$A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = A^{\beta\alpha} B_\beta B_\alpha = (-A^{\alpha\beta}) B_\beta B_\alpha = -A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta$$

$$\therefore A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta + A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$$

$$\therefore 2 A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0 \quad \to A^{\alpha\beta} B_\alpha B_\beta = 0$$

وهو المطلوب.

مسألة إذا كان $A_{\alpha\beta}$ ممتد مضاد التماثل وكان A^α, B^β متجهان مضادا التغير ، فأثبت أن $A_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = 0$.

مثال (٦): إذا كان $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل فاثبت أن:

$$(B_\alpha^\mu B_\beta^\nu + B_\beta^\mu B_\alpha^\nu) A_{\mu\nu} = 0$$

الحل: حيث أن $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل فان $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ وباعتبار الكمية

$$(B_\alpha^\mu B_\beta^\nu A_{\mu\nu})$$

وبتبديل موضع الدليلين (μ,ν) نحصل على:

$$B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} A_{\mu\nu} = B_{\alpha}^{\nu} B_{\beta}^{\mu} A_{\nu\mu}$$

$$= B_{\alpha}^{\nu} B_{\beta}^{\mu} (-A_{\mu\nu}) = -B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu} A_{\mu\nu}$$

$$\therefore \; B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} A_{\mu\nu} + B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu} A_{\mu\nu} = 0$$

$$(B_{\alpha}^{\mu} B_{\beta}^{\nu} + B_{\beta}^{\mu} B_{\alpha}^{\nu}) A_{\mu\nu} = 0$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٧):</u> إذا كان $A_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ ممتداً فأثبت أن :

(i) $(A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu})$ يكون ممتداً متماثلاً .

(ii) $(A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu})$ يكون ممتداً مضاداً التماثل ..

<u>الحـــل :</u>

(i) نفرض أن : $C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$

فبتغير مواضع الأدلة نحصل على :

$$C_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} + A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = C_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$$

أي أن $C_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$ هو ممتد متماثل .

(ii) نفرض أن $D_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$

فبتغير مواضع الأدلة نحصل على :

$$D_{\beta\alpha}^{\nu\mu} = A_{\beta\alpha}^{\nu\mu} - A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = -\left(A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}\right) = -D_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$$

أي أن $D_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - A_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$ هو ممتد مضاد التماثل . وهو المطلوب .

مسائل عامة على جبر الممتدات

(١) أكتب قانون التحويل للممتدات الآتية، مع ذكر خواص كل منها:

$$A_\alpha \, , B_{\alpha\beta} \, , C^{ij}_{k} \, , D^{ij}_{kl}$$

(٢) أثبت الخواص الآتية لدلتا كرونيكر:

(i) $\delta^p_q A^{rs}_p = A^{rs}_q$

(ii) $\delta^p_q \delta^r_s A^{qs} = A^{pr}$

(iii) $\delta^p_q \delta^q_r \delta^r_s = \delta^p_s$

(iv) $\delta^p_q \delta^q_r \delta^r_s \delta^s_p = 1$

(٣) بين ما إذا كانت الكمية $A(j,k,m,l)$ التي تتحول من نظام إحداثيات إلى نظام أخر تبعا للقانون:

$$A'(p,q,r,s) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^q}{\partial x^k}\frac{\partial x'^r}{\partial x^m}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l} A(j,k,m,l)$$

هي كمية ممتدة أم لا، وإذا كانت تشكل ممتدا فاذكر مرتبته ورتبته المتغــايرة ومضادة التغاير.

(٤) إذا كانت $A'^p_r = \dfrac{\partial x'^p}{\partial x^q}\dfrac{\partial x^s}{\partial x'^r} A^q_s$

فاثبت أن: $A^q_s = \dfrac{\partial x^q}{\partial x'^p}\dfrac{\partial x'^r}{\partial x^s} A'^p_r$

(٥) إذا كان A^μ , B_ν متجهان أحدهما مضاد التغاير والأخر متغــاير، فاثبــت أن حاصل ضربهما $(A^\mu B_\nu)$ هو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

(٦) إذا كان $A^{\alpha}_{\beta}, B_{\mu}$ ممتدان فاثبت أن حاصل ضربهما $A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu}$ هو ممتد أيضا، وأذكر خواصه.

(٧) إذا كان A^{pq}_{r} ممتدا من المرتبة الثالثة فاثبت أن: A^{pr}_{r} هو ممتد مضاد التغاير من المرتبة الأولى (أي متجه مضاد التغاير).

(٨) إذا كان $A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$ ممتدا من المرتبة الخامسة فبين كيف تحصل منه على ممتد من المرتبة الأولى (أي متجه)

(٩) إذا كان A^{pq}_{rs} ممتدا من المرتبة الرابعة فاثبت أن عملية الانكماش (أو التقليص) الثنائي له يعطي كمية لا متغيرة (أي مقدارا قياسيا).

(١٠) إذا كان A_{pq}, B^{rs} ممتدان فاثبت أن:

(i) حاصل الضرب الخارجي لهما هو ممتد من المرتبة الرابعة

(ii) حاصل الضرب الداخلي لهما يمكن أن يكون ممتدا من المرتبة الثانية أو الصفرية.

(١١) إذا كانت $x(\mu,\nu)$ كمية ما، وكان حاصل ضربها مع الممتد مضاد التغاير والاختياري $A^{\nu\sigma}$ هو ممتد أخر $B^{\mu\sigma}$:أي أن $x(\mu,\nu)A^{\nu\sigma} = B^{\mu\sigma}$ فاثبت أن $x(\mu,\nu)$ هي كمية ممتدة.

(١٢) إذا كانت $A(p,q,r)$ كمية ما، وكان حاصل ضربها مع الممتد المختلط الاختياري B^{qs}_{r} هو ممتد أخر C^{s}_{p}، أي أن: $A(p,q,r)B^{qs}_{r} = C^{s}_{p}$، فاثبت أن $A(p,q,r)$ هي كمية ممتدة

حلول مسائل الباب الأول في الممتدات

جبر الممتدات

مسألة (١) :

قوانين التحويل للممتدات:

$$(i)\ A_\alpha \quad : \quad A'_m = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m} A_\alpha$$

ممتد من المرتبة الأولى (متجه) متغاير :

$$(ii)\ B_{\alpha\beta} \quad : B'_{mn} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^m} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^n} B_{\alpha\beta}$$

ممتد من المرتبة الثانية متغاير :

$$(iii)\ C^{ij}_k \ : C'^{\beta\gamma}_\alpha = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\alpha} C^{ij}_k$$

ممتد مختلط من المرتبة الثالثة متغاير من الرتبة الأولى ومضاد التغاير من الرتبة الثانية.

$$(iv)\ D^{ij}_{kl} \ : D'^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^l}{\partial x'^\delta} D^{ij}_{kl}$$

ممتد مختلط من المرتبة الرابعة متغاير من الرتبة الثانية ومضاد التغاير من الرتبة الثانية.

مسألة (٢) :

$$(i)\delta^p_q A^{rs}_p = \delta^p_q A^{rs}_q = A^{rs}_q$$

(بوضع $p = q$ واعتبار أن $\delta^p_q = 1$)

$$(ii)\delta_q^p \delta_s^r A^{qs} = \delta_p^p \delta_s^r A^{ps} = \delta_s^r A^{ps} = \delta_r^r A^{pr} = A^{pr}$$

(بوضع $q = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$ ثم بوضع $s = r$ واعتبار أن $\delta_r^r = 1$)

$$(iii)\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r = \delta_p^p \delta_r^p \delta_s^r = \delta_r^p \delta_s^r = \delta_p^p \delta_s^p = \delta_s^p$$

(بوضع $q = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$ ثم بوضع $r = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$).

<u>طريقة أخرى</u>: باستخدام تعريف دلتاكرونيكر:

$$\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r = \left(\frac{\partial x^p}{\partial x^q}\right)\left(\frac{\partial x^q}{\partial x^r}\right)\left(\frac{\partial x^r}{\partial x^s}\right) = \frac{\partial x^p}{\partial x^s} = \delta_s^p$$

$$(iv)\ \delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s = \delta_p^p \delta_r^p \delta_s^r \delta_p^s = \delta_r^p \delta_s^r \delta_p^s$$

$$= \delta_p^p \delta_s^p \delta_p^s = \delta_s^p \delta_p^s = \delta_p^p \delta_p^p = 1.1 = 1$$

(بوضع $q = p$ ثم $r = p$ ثم $s = p$ واعتبار أن $\delta_p^p = 1$)

<u>طريقة أخرى</u>: باستخدام دلتاكرونيكر:

$$\delta_q^p \delta_r^q \delta_s^r \delta_p^s = \frac{\partial x^p}{\partial x^q}\frac{\partial x^q}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial x^p} = \frac{\partial x^p}{\partial x^p} = 1$$

<u>مسألة (٣):</u>

الكمية المعطاة تتغير طبقا لقانون التحويل:

$$A'(p,q,r,s) = \frac{\partial x^j}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^q}{\partial x^k}\frac{\partial x'^r}{\partial x^m}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l} A(j,k,m,l) \quad \rightarrow (1)$$

وبمقارنتها بالممتد الذي له نفس معاملات التحويل:

$$A'^{qrs}_{p} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x'^{q}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{m}} \frac{\partial x'^{s}}{\partial x^{l}} A^{kml}_{j} \qquad \to (2)$$

نجد أن الكمية $A(j,k,m,l) = A^{kml}_{j}$ فهي تشكل ممتدا من المرتبة الرابعة وهو متغاير من الرتبة الأولى ومضاد التغاير من الرتبة الثالثة

مسألة (٤) :

حيث أن :

$$A'^{p}_{r} = \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{r}} A^{q}_{s}$$

فبضرب الطرفين في $\dfrac{\partial x^{q}}{\partial x'^{p}} \dfrac{\partial x'^{r}}{\partial x^{s}}$ نحصل على:

$$\frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{s}} A'^{p}_{r} = \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{r}} A^{q}_{s}$$

$$= \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{q}} \cdot \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{r}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{s}} A^{q}_{s}$$

$$= \delta^{q}_{q} \cdot \delta^{s}_{s} A^{q}_{s} = A^{q}_{s}$$

$$\therefore A^{q}_{s} = \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x'^{r}}{\partial x^{s}} A'^{p}_{r}$$

وهو المطلوب.

مسألة (٥) : قانون التحويل للممتدين A^{μ}, B_{ν}

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} , \; B'_{\beta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B_{\nu}$$

$$\therefore A'^{\alpha} B'_{\beta} = \left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu} \right) \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} B_{\nu} \right) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A^{\mu} B_{\nu}$$

وبكتابة $A'^{\alpha} B'_{\beta} = C'^{\alpha}_{\beta}\ , A^{\mu} B_{\nu} = C^{\mu}_{\nu}$

$$\therefore\ C'^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} C^{\mu}_{\nu}$$

أي أن حاصل الضرب $C^{\mu}_{\nu} = A^{\mu} B_{\nu}$ يشكل ممتداً مختلطاً من المرتبة الثانية .

<u>مسألة (٦) :</u> قوانين التحويل للممتدين $A^{\alpha}_{\beta}, B_{\mu}$:

$$A'^{m}_{n} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{n}} A^{\alpha}_{\beta}\ , B'_{l} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} B_{\mu}$$

حاصل الضرب:

$$A'^{m}_{n} B'_{l} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{n}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu}$$

وبمقارنة حاصل الضرب هذا بالممتد الذي له نفس معاملات التحويل:

$$C'^{m}_{nl} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{n}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} C^{\alpha}_{\beta\mu}$$

نجد أن حاصل الضرب $C^{\alpha}_{\beta\mu} = A^{\alpha}_{\beta} B_{\mu}$ هو ممتد، وهو مختلط من المرتبة الثالثة، متغاير من الرتبة الثانية ومضاد التغاير من الرتبة الأولى.

<u>مسألة (٧) :</u> بكتابة قانون التحويل للممتد A^{pq}_{r} :

$$A'^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\gamma}} A^{pq}_{r}$$

وبأخذ $\beta = \gamma$ (أي بإجراء عملية انكماش):

$$\therefore\ A'^{\alpha\gamma}_{\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\gamma}} A^{pq}_{r}$$

$$= \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} \delta^{r}_{q} A^{pq}_{r} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} \delta^{r}_{r} A^{pr}_{r} = A^{pr}_{r}$$

وهو ممتد مضاد التغاير من المرتبة الأولى حيث أن قانون تحويله هو:

$$A'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} A^{p} \qquad \therefore\ A^{pr}_{r} = A^{p}$$

وهو المطلوب.

<u>**مسألة (٨) :**</u> قانون التحويل للممتد $A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$:

$$A'^{mn}_{lpq} = \frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma} \ \_\_\_\_ (1)$$

بوضع $m = l$ (أي بإجراء عملية الانكماش) في (١):

$$A'^{ln}_{lpq} = \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{l}} \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} \delta^{\mu}_{\alpha} A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} \delta^{\alpha}_{\alpha} A^{\alpha\beta}_{\alpha\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\alpha\beta}_{\alpha\nu\sigma}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$A'^{n}_{pq} = \frac{\partial x'^{n}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\beta}_{\nu\sigma} \qquad \to \ (2)$$

نجد أن : $A^{\alpha\beta}_{\alpha\nu\sigma} = A^{\beta}_{\nu\sigma}$

وبإجراء عملية الانكماش ثانية:- بوضع $n = p$ في (٢) :

$$A'^{\,p}_{pq} = \frac{\partial x'^{p}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{p}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A^{\beta}_{\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} \delta^{\nu}_{\beta} A^{\beta}_{\nu\sigma} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} \delta^{\nu}_{\nu} A^{\nu}_{\nu\sigma}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$A'_{q} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{q}} A_{\sigma}$$ نجد أن $A^{\nu}_{\nu\sigma} = A_{\sigma}$

أي أننا حصلنا على ممتد من المرتبة الأولى (متجه) بإجراء عمليتي انكماش متتاليتين للممتد الخماسي المعطى $A^{\alpha\beta}_{\mu\nu\sigma}$.

<u>مسألة (٩) :</u> قانون التحويل للممتد A^{pq}_{rs} :

$$A'^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} A^{pq}_{rs} \qquad \rightarrow (1)$$

بإجراء الانكماش الأول: بوضع $\alpha = \gamma$

$$A'^{\gamma\beta}_{\gamma\delta} = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{p}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{r}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} A^{pq}_{rs}$$

$$= \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} \delta^{r}_{p} A^{pq}_{rs} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} \delta^{r}_{r} A^{pq}_{rs}$$

$$= \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} A^{pq}_{rs}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة : $A'^{\beta}_{\delta} = \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \dfrac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\delta}} A^{q}_{s}$ نجد أن :

$$A^{rq}_{rs} = A^{q}_{s}$$

وبإجراء الإنكماش الثاني : بوضع $\delta = \beta$ فإن :

$$A'^{\beta}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{q}} \frac{\partial x^{s}}{\partial x'^{\beta}} A^{q}_{s} = \delta^{s}_{q} A^{q}_{s} = \delta^{s}_{s} A^{s}_{s} = A^{s}_{s}$$

وحيث أن s دليل دمية (متحرك) فيمكن أخذه يساوي β ونحصل على:

$A'^{\beta}_{\beta} = A^{\beta}_{\beta}$ وهو قانون تحويل لكمية قياسية (لا متغيرة)،

وهو المطلوب.

<u>مسألة (١٠) :</u> معادلات التحويل للممتدين A_{pq}, B^{rs}

$$A'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\beta}} A_{pq}, B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{s}} B^{rs}$$

(١) <u>حاصل الضرب الخارجي</u>:

$$A'_{\alpha\beta} B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{s}} A_{pq} B^{rs}$$

$$C'^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{r}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{s}} \frac{\partial x^{p}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{q}}{\partial x'^{\beta}} C^{rs}_{pq} \rightarrow (1)$$

وهو ما يشكل ممتد من المرتبة الرابعة .

(ii) <u>حاصل الضرب الداخلي</u>:

هو حاصل ضرب خارجي + عملية انكماش وقد أجرينا الضرب الخارجي في (١) ولإجراء عملية الانكماش:نضع $\mu = \alpha$

$$\therefore C'^{\alpha\nu}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'}{\partial x^r}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}C^{rs}_{pq}$$

$$= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}\delta^p_r C^{rs}_{pq}$$

$$= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}\delta^r_r C^{rs}_{rq} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}C^{rs}_{rq}$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة:

$$C'^{\nu}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}C^s_q$$

نجد أن $C^{rs}_{rq} = C^s_q$ وهو ممتد من المرتبة الثانية .

أيضا: يمكن إجراء عملية انكماش ثانية: بوضع $\beta = \nu$

$$\therefore C'^{\beta}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^{\beta}}C^s_q = \delta^q_s C^s_q = \delta^s_s C^s_s = C^s_s = C^{\beta}_{\beta}$$

(حيث s رمز دمية) ، وهي كمية لا متغيرة(قياسية) أي ممتد من المرتبة الصفرية.

<u>مسألة (١١):</u> معادلة التحويل للممتد الاختياري $A^{\nu\sigma}$

$$A'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}A^{\nu\sigma} \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة:

$$x(\mu,\nu)A^{\nu\sigma} = B^{\mu\sigma} \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$x'(\delta,\alpha)A'^{\alpha\beta} = B'^{\delta\beta} = \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}B^{\mu\sigma}$$

وبالتعويض عن $B^{\mu\sigma}$ من (٢) في الطرف الأيمن وكذلك عن $A'^{\alpha\beta}$ من (١) في الطرف الأيسر:

$$\therefore x'(\delta,\alpha)\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}A^{\nu\sigma} = \frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}\cdot x(\mu,\nu)A^{\nu\sigma}$$

وبالضرب في $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}}$:

$$\therefore x'(\delta,\alpha)A^{\nu\sigma} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\beta}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}x(\mu,\nu)A^{\nu\sigma}$$

$$= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}x(\mu,\nu)A^{\nu\sigma}$$

$$\therefore \left[x'(\delta,\alpha) - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}x(\mu,\nu)\right]A^{\nu\sigma} = 0$$

وحيث أن $A^{\nu\sigma}$ يمثل ممتدا اختياريا فيمكن أخذه $A^{\nu\sigma} \neq 0$

$$\therefore x'(\delta,\alpha) = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}x(\mu,\nu)$$

وهي معادلة تحويل لممتد صورته: $T'^{\delta}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\mu}}T^{\mu}_{\nu}$

فبالمقارنة نجد أن: $x(\mu,\nu) = T^{\mu}_{\nu}$ أي أنها تشكل ممتدا، وهو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

<u>مسألة (١٢) :</u> معادلة التحويل للممتد الاختياري B_r^{qs} :

$$B_\gamma^{\prime\alpha\beta}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^q}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial x'^\gamma}B_r^{qs} \qquad \rightarrow (1)$$

ومن رأس المسألة:

$$A(p,q,r)B_r^{qs}=C_p^s \qquad \rightarrow (2)$$

وفي تحويل للإحداثيات يمكننا كتابة:

$$A'(\delta,\alpha,\gamma)B_\gamma^{\prime\alpha\beta}=C_\delta^{\prime\beta}=\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta}C_p^s$$

وبالتعويض عن $B_\gamma^{\prime\alpha\beta}$ من (١) في الطرف الأيسر وعن C_p^s من (٢) في الطرف الأيمن :

$$\therefore\ A'(\delta,\alpha,\gamma)\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^q}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s}\frac{\partial x^r}{\partial x'^\gamma}B_r^{qs}$$

$$=\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta}\cdot A(p,q,r)B_r^{qs}$$

وبالضرب في $\frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r}$

$$\therefore\ A'(\delta,\alpha,\gamma)B_r^{qs}=\frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial x'^\beta}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^s}\frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta}A(p,q,r)B_r^{qs}$$

$$=\frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta}A(p,q,r)B_r^{qs}$$

$$\therefore\left[A'(\delta,\alpha,\gamma)-\frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r}\frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta}A(p,q,r)\right]B_r^{qs}=0$$

وحيث أن B_r^{qs} هو ممتد اختياري فيمكن كتابة: $B_r^{qs} \neq 0$

$$\therefore \; A'(\delta, \alpha, \gamma) = \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r)$$

$$= \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A(p, q, r)$$

وهي معادلة تحويل لممتد بالصورة:

$$A'^{\gamma}_{\alpha\delta} = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^r} \frac{\partial x^q}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^p}{\partial x'^\delta} A^r_{qp}$$

فبالمقارنة نجد أن $A(p,q,r) = A^r_{qp}$ وهو ممتد مختلط من المرتبة الثالثة.

وهو المطلوب.