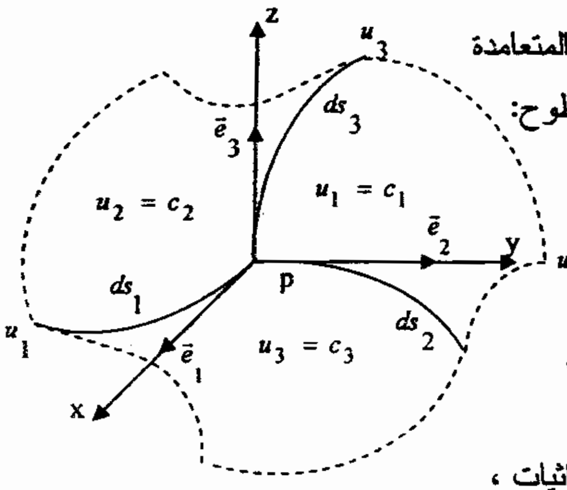
الباب الرابع

الإحداثيات المنحنية المتعامدة

Orthogonal Curvilinear Coordinates

تعريف الإحداثيات المنحنية :



يعرف نظام الإحداثيات المنحنية المتعامدة بأنه النظام الذي يكون فيه ثلاثة سطوح:

$$u_1 = (x, y, z) = c_1$$

$$u_2 = (x, y, z) = c_2$$

$$u_3 = (x, y, z) = c_3$$

تتلاقى في نقطة واحدة p بحيث أن كل زوج من هذه السطوح تتقاطع في منحنيات تسمى منحنيات الإحداثيات ، وكل سطح يقطع السطحين الآخرين على التعامد.

ويمكن اعتبار (u_1, u_2, u_3) إحداثيات للنقطة p وتسمى بالإحداثيات المنحنية.

متجهات الوحدة في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

إذا كانت $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ هي ثلاثة متجهات وحدة متعامدة في اتجاه المماس لمنحنيات الإحداثيات u_1, u_2, u_3 على الترتيب عند نقطة p .

فإذا كان $\vec{r}$ هو متجه موضع النقطة p وكانت المماسات لمنحنيات الإحداثيات موازية لمتجهات الوحدة $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ فإن متجهات المماس للمنحنيات u_1, u_2, u_3 عند نقطة p تكون على الترتيب :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$$

وتكون متجهات الوحدة في إتجاه المماس للمنحنيات الثلاثة هي :

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right|} \ , \ \vec{e}_2 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right|} \ , \ \vec{e}_3 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right|}$$

ويأخذ الكميات :

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right| = h_1 \ , \ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right| = h_2 \ , \ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right| = h_3$$

والتي تسمى معاملات المقياس (scale factors) نحصل على :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \vec{e}_1 \ , \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = h_2 \vec{e}_2 \ , \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = h_3 \vec{e}_3$$

وحيث أن $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ هي متجهات وحدة متعامدة عند p فإن :

(i) $\quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \rightarrow \left(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_m = 0 \right)$

(ii) $\quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \rightarrow \left(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n = 1 \right)$

(iii) $\quad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \ , \ \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

(iv) $\quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$

متجهات الوحدة العمودية على الأسطح المحدودة بالمنحنيات المتعامدة :

المتجه $\vec{\nabla} u_1$ أو grad u_1 هو المتجه العمودي على السطح $u_1 = c_1$ عند النقطة p . فإذا كانت $\vec{E}_1$ هي متجه الوحدة عند النقطة p في الإتجاه العمودي على السطح u_1 فإن :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} u_1}{\left|\vec{\nabla} u_1\right|}$$

ويكون هذا المتجه فـــي إتجـــاه الممـــاس للمنحنيـــين $u_2 = c_2 \ , u_3 = c_3$
وبالمثل فإن متجهي الوحدة العموديين على الـــسطحين $u_2 = c_2 \ , u_3 = c_3$
عند p هما على الترتيب :

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{\nabla} u_2}{\left|\vec{\nabla} u_2\right|} \quad , \quad \vec{E}_3 = \frac{\vec{\nabla} u_3}{\left|\vec{\nabla} u_3\right|}$$

وحيث أن $\vec{\nabla} u_3 \ , \vec{\nabla} u_2 \ , \vec{\nabla} u_1$ تمثل نظاماً للمتجهات المتعامدة فإن :

$$\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 = 0 \ , \quad \vec{\nabla} u_2 \cdot \vec{\nabla} u_3 = 0 \ , \quad \vec{\nabla} u_3 \cdot \vec{\nabla} u_1 = 0$$

ويلاحظ أن : $\vec{E}_n \cdot \vec{E}_m = 0 \ , \ \vec{E}_n \cdot \vec{E}_n = 1 \ , \ \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 = 1$

إذا كانت ds_1 تمثل عنصر طول على المنحنى u_1 وكانت $\left|\vec{\nabla} u_1\right|$ تمثل المشتقة الإتجاهية لـــ u_1 في إتجاه العمودي على السطح $u_1 = c_1$ فإن :

$$\left|\vec{\nabla} u_1\right| = \frac{du_1}{ds_1}$$

وبالمثل فإن :

$$\left|\vec{\nabla} u_2\right| = \frac{du_2}{ds_2} \quad , \quad \left|\vec{\nabla} u_3\right| = \frac{du_3}{ds_3}$$

<u>عنصر الطول الإحداثيات المنحنية المتعامدة :</u>

إذا كان $\vec{r} = \vec{r}\left(u_1 , u_2 , u_3\right)$ هو متجه موضع p فإن :

$$\begin{aligned}
d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \\
&= h_1 \vec{e}_1 \, du_1 + h_2 \vec{e}_2 \, du_2 + h_3 \vec{e}_3 \, du_3 \\
&= \left(h_1 du_1\right) \vec{e}_1 + \left(h_2 du_2\right) \vec{e}_2 + \left(h_3 du_3\right) \vec{e}_3 \\
&= ds_1 \, \vec{e}_1 + ds_2 \, \vec{e}_2 + ds_3 \, \vec{e}_3
\end{aligned}$$

حيث ds_1 , ds_2 , ds_3 تمثل عناصر الطول مقاسة على طول منحنيات الإحداثيات u_1 , u_2 , u_3 على الترتيب .

$$\therefore \quad ds_1 = h_1\, du_1 \quad , \quad ds_2 = h_2\, du_2 \quad , \quad ds_3 = h_3\, du_3$$

$$\therefore \quad \frac{du_1}{ds_1} = \frac{1}{h_1} \quad , \quad \frac{du_2}{ds_2} = \frac{1}{h_2} \quad , \quad \frac{du_3}{ds_3} = \frac{1}{h_3}$$

$$\therefore \boxed{\left|\vec{\nabla} u_1\right| = \frac{1}{h_1} \quad , \quad \left|\vec{\nabla} u_2\right| = \frac{1}{h_2} \quad , \quad \left|\vec{\nabla} u_3\right| = \frac{1}{h_3}}$$

وتصبح متجهات الوحدة العمودية على الأسطح المحدودة بالمنحنيات u_1 , u_2 , u_3 هي :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} u_1}{\left|\vec{\nabla} u_1\right|} = h_1\, \vec{\nabla} u_1 \quad , \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{\nabla} u_2}{\left|\vec{\nabla} u_2\right|} = h_2\, \vec{\nabla} u_2$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\vec{\nabla} u_3}{\left|\vec{\nabla} u_3\right|} = h_3\, \vec{\nabla} u_3$$

$$\therefore \boxed{\vec{\nabla} u_1 = \frac{\vec{E}_1}{h_1} \quad , \quad \vec{\nabla} u_2 = \frac{\vec{E}_2}{h_2} \quad , \quad \vec{\nabla} u_3 = \frac{\vec{E}_3}{h_3}}$$

ويكون عنصر الطول التفاضلي في الإحداثيات المنحنية :

$$\begin{aligned} ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= (h_1\, du_1)(h_1\, du_1) + (h_2\, du_2)(h_2\, du_2) \\ &\quad + (h_3\, du_3)(h_3\, du_3) \\ &= h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2 \\ &= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 \end{aligned}$$

فئة المتجهات المتعامدة المتعاكسة :

(Reciprocal sets of orthogonal vectors)

لدينا فئتان لمتجهات الوحدة عند نقطة p :

(١) $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ في إتجاه المماس لاحداثيات المنحنيات .

(٢) $\left(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right)$ في إتجاه العمودي على إحداثيات السطوح .

وتعرف الفئة الأولى كالآتي :

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \quad , \vec{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \quad , \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$$

وتعرف الفئة الثانية كالآتي :

$$\vec{E}_1 = h_1 \vec{\nabla} u_1 \quad , \quad \vec{E}_2 = h_2 \vec{\nabla} u_2 \quad , \quad \vec{E}_3 = h_3 \vec{\nabla} u_3$$

ويمكـــن إثبـــات أن الفئتـــين $\left(\vec{\nabla} u_1 , \vec{\nabla} u_2 , \vec{\nabla} u_3\right), \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right)$

تكون نظاماً للمتجهات المتعاكسة بمعنى أن :

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n}\right) \cdot \left(\vec{\nabla} u_n\right) = 1$$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n}\right) \cdot \left(\vec{\nabla} u_m\right) = 0$$

أو أن :

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n}\right) \cdot \left(\vec{\nabla} u_m\right) = \delta nm \qquad \_\_\_\_\_\_(\mathrm{I})$$

حيث :

$$\delta_{nm} = \begin{matrix} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{matrix}$$

وأن :

$$\left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3\right)\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right)=1 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_} (\Pi)$$

__الإثبات:__

حيث أن :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$$

__فبالضرب قياسياً في__ $\vec{\nabla} u_1$ وإعتبار أن $\vec{\nabla} u_1 \cdot d\vec{r} = du_1$

$$\therefore \vec{\nabla} u_1 \cdot d\vec{r} = \left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right) du_1 + \left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right) du_2$$

$$+ \left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right) du_3 = du_1$$

ومن ذلك يتضح أن :

$$\vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = 1 \ , \ \vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} u_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = 0$$

__وبالمثل بالضرب قياسياً في__ $\vec{\nabla} u_2$ وإعتبار أن $\vec{\nabla} u_2 \cdot d\vec{r} = du_2$

نحصل على :

$$\vec{\nabla} u_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = 1 \ , \ \vec{\nabla} u_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} u_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = 0$$

أيضاً يمكن إثبات أن :

$$\vec{\nabla} u_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = 1 \ , \ \vec{\nabla} u_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} u_3 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = 0$$

وبتجميع هذه العلاقات يتضح أن :

$$\vec{\nabla} u_n \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_n} = 1 \ , \ \vec{\nabla} u_n \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_m} = 0$$

$$\therefore \ \vec{\nabla} u_n \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_m} = \delta_{nm} = \begin{matrix} 1 \longrightarrow (n = m) \\ 0 \longrightarrow (n \neq m) \end{matrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (\mathrm{I})$$

وهو شرط أن تكون الفئتان المعطيتان تكونان نظاماً من المتجهات المتعاكسة .

ويمكن إثبات الشرط الثاني للمتجهات المتعاكسة وهو :

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3 \right) = 1$$

بسهولة كالآتي :

حيث أن :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = h_1 \vec{e}_1 , \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = h_2 \vec{e}_2 , \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = h_3 \vec{e}_3$$

وأن :

$$\vec{\nabla} u_1 = \frac{\vec{E}_1}{h_1} \quad , \quad \vec{\nabla} u_2 = \frac{\vec{E}_2}{h_2} \quad , \quad \vec{\nabla} u_3 = \frac{\vec{E}_3}{h_3}$$

فإن :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = (h_1 \vec{e}_1) \cdot (h_2 \vec{e}_2) \wedge (h_3 \vec{e}_3)$$

$$= h_1 h_2 h_3 (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) = h_1 h_2 h_3 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

حيث أن :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$$

$$\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3 = \left(\frac{\vec{E}_1}{h_1}\right) \cdot \left(\frac{\vec{E}_2}{h_2}\right) \wedge \left(\frac{\vec{E}_3}{h_3}\right)$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3\right) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \quad \_\_\_\_\_ (2)$$

حيث :

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3 = 1$$

من (٢) ، (١) يتضح أن :

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right) \left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3\right) = 1 \quad \_\_\_\_\_ (\Pi)$$

وهو المطلوب .

مثال : أثبت أن حاصل الضرب الثلاثي $\left(\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3\right)$ يمكن كتابته في صورة المحدد الجاكوبي أو جاكوبيان التحويل من الإحداثيات u_1, u_2, u_3 إلى (x, y, z) ويرمز له $J\left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right)$.

الحـل :

حيث أن : $u_1 = u_1(x, y, z)$, $u_2 = u_2(x, y, z)$, $u_3 = u_3(x, y, z)$

فإن :

$$\vec{\nabla} u_1 \cdot \vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} J = \left(\frac{u_1, u_2, u_3}{x, y, z}\right)$$

كما أن حاصل الضرب الثلاثي $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\wedge\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right)$ يمكن كتابته في صورة المحدد الجاكوبي أو جاكوبيان التحويل من الإحداثيات (x,y,z) إلى (u_1,u_2,u_3) ويرمز له $J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)$ كالتالي :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\wedge\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1}\\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2}\\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3}\end{vmatrix}=J\left(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z}\right)$$

ويمكن إثبات أن :

$$J\left(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z}\right)=\vec{\nabla}u_1\cdot\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_3=\frac{1}{h_1h_2h_3}\quad\_\_\_\_\_\_(1)$$

$$J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\wedge\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}=h_1h_2h_3\quad\_\_\_\_\_\_(2)$$

ومن ذلك يتضح أن :

$$J\left(\frac{u_1,u_2,u_3}{x,y,z}\right)J\left(\frac{x,y,z}{u_1,u_2,u_3}\right)=1$$

<u>عنصر المساحة في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :</u>

بالرجوع إلى الشكل الموجود في أول هذا الباب نجد أن هناك ثلاثة أوجه متقابلة كل منها له مساحة محددة .

ويكون عنصر المساحة على الوجه الأول هو :

$$\begin{aligned} dA_1 &= \left| ds_2\,\vec{e}_2 \wedge ds_3\,\vec{e}_3 \right| \\ &= \left| \left(h_2\,du_2\,\vec{e}_2\right) \wedge \left(h_3\,du_3\,\vec{e}_3\right) \right| \\ &= h_2 h_3 \left|\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3\right| du_2\,du_3 \\ &= h_2 h_3 \left|\vec{e}_1\right| du_2\,du_3 = h_2 h_3\,du_2\,du_3 \end{aligned}$$

حيث :

$$\left|\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3\right| = \left|\vec{e}_1\right| = 1$$

بالمثل فإن عنصر المساحة على الوجه الثاني هو :

$$dA_2 = \left| ds_1\,\vec{e}_1 \wedge ds_3\,\vec{e}_3 \right| = h_1 h_3\,du_1\,du_3$$

ويكون عنصر المساحة على الوجه الثالث هو :

$$dA_3 = \left| ds_1\,\vec{e}_1 \wedge ds_2\,\vec{e}_2 \right| = h_1 h_2\,du_1\,du_2$$

عنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

يعطي عنصر الحجم في الإحداثيات المنحنية المتعامدة بالعلاقة :

$$dV = \left(ds_1\,\vec{e}_1\right)\cdot\left(ds_2\,\vec{e}_2\right)\wedge\left(ds_3\,\vec{e}_3\right)$$

(حاصل الضرب الثلاثي القياسي لعناصر الطول الإتجاهية)

$$\begin{aligned} dV &= \left(h_1\,du_1\,\vec{e}_1\right)\cdot\left(h_2\,du_2\,\vec{e}_2\right)\wedge\left(h_3\,du_3\,\vec{e}_3\right) \\ &= h_1\,h_2\,h_3\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\right)du_1\,du_2\,du_3 \\ &= h_1\,h_2\,h_3\;du_1\,du_2\,du_3 \end{aligned}$$

حيث :

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3 = 1$$

التدرج و التباعد و الإلتفاف في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

(١) التدرج (grad) :

نفرض أن $\phi(u_1, u_2, u_3)$ دالة قياسية معطاه بدلالة الإحداثيات المنحنية المتعامدة . يعطي التغير في ϕ من العلاقة :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\phi}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\phi}{\partial u_3}du_3 \qquad \_\_\_\_(1)$$

أيضاً بكتابة :

$$\vec{\nabla}\phi = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du_3$$

$$= h_1\vec{e}_1\,du_1 + h_2\vec{e}_2\,du_2 + h_3\vec{e}_3\,du_3$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = d\phi = h_1\,du_1\,f_1 + h_2\,du_2\,f_2 + h_3\,du_3\,f_3 \qquad \_\_\_\_(2)$$

من (٢) ، (١) نجد أن :

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \quad , \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} \quad , \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = grad\,\phi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3} \qquad \_\_\_\_(I)$$

من هذا يتضح أن مركبات $grad\,\phi$ على طول متجهات الوحدة $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ هي على الترتيب :

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \;,\; \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} \;,\; \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

وأن المؤثر $\vec{\nabla}$ تكون له الصورة الآتية في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :

$$\vec{\nabla}=\frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}$$

(٢) التباعد (div) :

نفرض أن $\vec{A}$ دالة إتجاهية في الإحداثيات المنحنية المتعامدة $u_1\ u_2\ ,u_3$ بحيث أن :

$$\vec{A}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3$$

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\left(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3\right)$$

$$=\vec{\nabla}\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(A_2\vec{e}_2\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(A_3\vec{e}_3\right) \qquad (1)$$

وبإعتبار أن :

$$\vec{e}_1=h_1\vec{\nabla}u_1\ ,\ \vec{e}_2=h_2\vec{\nabla}u_2\ ,\ \vec{e}_3=h_3\vec{\nabla}u_3$$

$$\therefore\vec{\nabla}\cdot\left(A_1\vec{e}_1\right)=\vec{\nabla}\cdot\left[A_1\left(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\right)\right]$$

$$=\vec{\nabla}\cdot\left[A_1\left(h_2h_3\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_3\right)\right]$$

$$=A_1h_2h_3\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_3\right)$$

$$+\left(\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_3\right)\cdot\vec{\nabla}\left(A_1h_2h_3\right)$$

ولكن :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_3\right)=\vec{\nabla}u_3\cdot curl\vec{\nabla}u_2-\vec{\nabla}u_2\cdot curl\vec{\nabla}u_3=0$$

$$\vec{\nabla}\left(A_1h_2h_3\right)=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)\vec{\nabla}u_1+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_1h_2h_3\right)\vec{\nabla}u_2$$

$$+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_1h_2h_3\right)\vec{\nabla}u_3$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(A_1 e_1)=\vec{\nabla}u_2 \wedge \vec{\nabla}u_3 \cdot \vec{\nabla}\,(A_1 h_2\, h_3)$$

$$=\vec{\nabla}u_2 \wedge \vec{\nabla}u_3 \cdot\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2\, h_3)\vec{\nabla}u_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_2\, h_3)\vec{\nabla}u_2 + \ldots\ldots\right]$$

$$=\vec{\nabla}u_2 \wedge \vec{\nabla}u_3 \cdot\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2\, h_3)\vec{\nabla}u_1\right]$$

وتتلاشى الحدود الأخرى بإستخدام حواصل الضرب الثلاثي القياسي .

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(A_1\vec{e}_1)=\frac{\vec{e}_2}{h_2}\wedge\frac{\vec{e}_3}{h_3}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2\, h_3)\frac{\vec{e}_1}{h_1}\right]$$

$$=\frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1)\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2\, h_3)$$

$$=\frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2\, h_3)$$

حيث :

$$\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3=1$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\vec{\nabla}\cdot(A_2\vec{e}_2)=\frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3\, h_1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(A_3\vec{e}_3)=\frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_3 h_1\, h_2)$$

وبالتعويض في (١) نحصل على:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_2 h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_2 h_3 h_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_1 h_2)\right] \qquad \text{(II)}$$

وهي الصيغة المطلوبة.

(٣) **<u>الالتفاف (curl)</u>** :

نفرض أن : $\vec{A} = A_1\,\vec{e}_1 + A_2\,\vec{e}_2 + A_3\,\vec{e}_3$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\vec{A}=curl\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\left(A_1\,\vec{e}_1+A_2\,\vec{e}_2+A_3\,\vec{e}_3\right)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\left(A_1\,\vec{e}_1\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(A_1 h_1\,\vec{\nabla}u_1\right)$$

$$=\vec{\nabla}\left(A_1 h_1\right)\wedge\vec{\nabla}u_1+A_1 h_1\,\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}u_1=\vec{\nabla}\left(A_1 h_1\right)\wedge\vec{\nabla}u_1$$

حيث : $\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}u_1=0$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\left(A_1\,\vec{e}_1\right)=\vec{\nabla}\left(A_1 h_1\right)\wedge\vec{\nabla}u_1$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1 h_1)\vec{\nabla}u_1+\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\vec{\nabla}u_2+\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1)\vec{\nabla}u_3\right]\wedge\vec{\nabla}u_1$$

$$=\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\vec{\nabla}u_2\wedge\vec{\nabla}u_1+\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1)\vec{\nabla}u_3\wedge\vec{\nabla}u_1$$

$$=\frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)(\vec{e}_2\wedge\vec{e}_1)+\frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1)(\vec{e}_3\wedge\vec{e}_1)$$

$$=-\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\vec{e}_3+\frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1)\vec{e}_2$$

وبالمثل فإن :

$$\vec{\nabla} \wedge (A_2 \vec{e}_2) = -\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2)\vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla} \wedge (A_3 \vec{e}_3) = -\frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3)\vec{e}_1$$

بالجمع نحصل على :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(A_2 h_2)\right]\vec{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(A_3 h_3)\right]\vec{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(A_1 h_1)\right]\vec{e}_3 \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_(III)}\end{aligned}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

<u>**مؤثر لابلاس في الإحداثيات المنحنية المتعامدة :**</u>

حيث أن

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

ويعرف مؤثر لابلاس بالعلاقة :

$$\vec{\nabla}^2\phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi$$

ولما كان :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(A_1h_2h_3\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A_2h_3h_1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(A_3h_1h_2\right)\right]$$

فبأخذ :

$$\vec{A}=\vec{\nabla}\phi=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3$$

نجد أن :

$$A_1=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1},\;A_2=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2},\;A_3=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

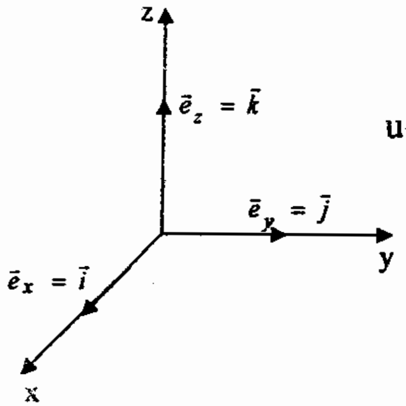
$$\therefore\nabla^2\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right]\qquad\_\_\_\_\_\_(IV)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

بعض نظم الإحداثيات المتعامدة الخاصة :

سوف نكتفي هنا بدراسة النظم الثلاثة المشهورة للإحداثيات المتعامدة وهي :
" **الكرتيزية والقطبية الكروية والأسطوانية** . "



(i) **الإحداثيات الكرتيزية :**

في هذه الحالة نضع : $u_1 = x , u_2 = y , u_3 = z$

ويكون عنصر الطول :

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} = d\vec{s}$$

$$\therefore ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$\vec{e}_1 = \vec{i} \quad , \quad \vec{e}_2 = \vec{j} \quad , \quad \vec{e}_3 = \vec{k}$$

$$ds_1 = dx = h_1\, du_1 \longrightarrow \quad \therefore h_1 = 1$$

$$ds_2 = dy = h_2\, du_2 \longrightarrow \quad \therefore h_2 = 1$$

$$ds_3 = dz = h_3\, du_3 \longrightarrow \quad \therefore h_3 = 1$$

عنصر الحجم :

$$dV = dx\ \ dy\ \ dz$$

التدرج :

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

التباعد :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

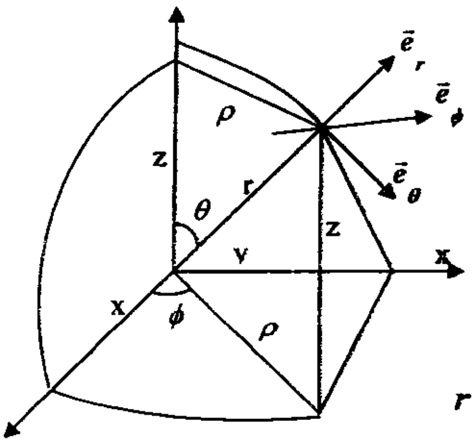
الإلتفاف :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

معادلة لابلاس :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

(ii) <u>الإحداثيات القطبية الكروية</u> :



في هذه الحالة نضع :

$$u_1 = r \ , \ u_2 = \theta \ \ , \ \ u_3 = \phi$$

$$x = \rho \cos\phi = r \sin\phi \ \cos\phi$$

$$y = \rho \sin\phi = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$r \geq 0 \ \ , \ \ 0 \leq \theta \leq \pi \ \ , \ \ 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

عنصر الطول :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

ولكن : $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$

حيث : $ds_1 = h_1 du_1 \ \ , \ \ ds_2 = h_2 du_2 \ \ , \ \ ds_3 = h_3 du_3$

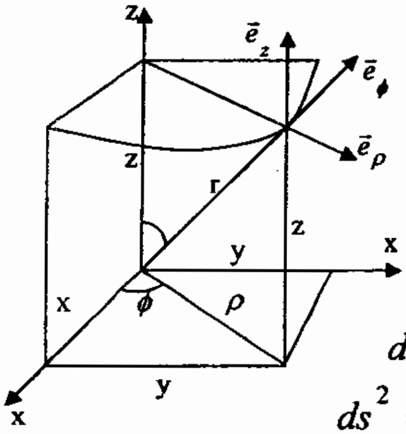
بالمقارنة نجد أن : $h_1 = 1 \ , \ \ h_2 = r \ \ , \ h_3 = r\sin\theta$

عنصر الحجم : $dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

التدرج :
$$\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi^2}\vec{e}_\phi$$

مؤثر لابلاس :
$$\nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

(iii) الإحداثيات الأسطوانية :



في هذه الحالة :
$$u_1=\rho\ ,\ u_2=\phi\ ,\ u_3=z$$
$$x=\rho\cos\phi\ ,y=\rho\sin\phi\ ,\ z=z$$
$$\rho\geq 0\ ,\ 0\leq\phi<2\pi\ ,-\infty<z<+\infty$$

عنصر الطول :
$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\phi^2+dz^2$$

ولكن : $ds^2=h_1^2du_1^2+h_2^2du_2^2+h_3^2du_3^2$

بالمقارنة نجد أن : $h_1=1\ ,\ h_2=\rho\ ,\ h_3=1$

عنصر الحجم : $dV=\rho\,d\rho\ d\phi\ \ dz$

التدرج :
$$\vec{\nabla}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

مؤثر لابلاس :
$$\vec{\nabla}^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) : أثبت أن متجهات الوحدة في الإحداثيات الإسطوانية تعطي بدلالة متجهات الوحدة الكرتيزية بالصورة :

$$\vec{e}_\rho = \cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} \quad , \quad \vec{e}_z = \vec{k}$$

ومن ثم أثبت نظام الإحداثيات الإسطوانية هو نظام متعامد . أوجد صور مناسبة لكل من $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بدلالة $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$.

الحل :

في الإحداثيات الإسطوانية : $x = \rho\cos\phi \ , \ y = \rho\sin\phi \ , \ z = z$

$$\therefore \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \rho\cos\phi\,\vec{i} + \rho\sin\phi\,\vec{j} + z\vec{k}$$

متجهات المماس للمنحنيات ρ, ϕ, z هي على الترتيب :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi\,\vec{i} + \rho\cos\phi\,\vec{j} \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k}$$

متجهات الوحدة في إتجاهات المماس للمنحنيات المذكورة :

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}/\partial\rho}{\left|\partial\vec{r}/\partial\rho\right|} = \frac{\cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = \cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j} \quad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\phi}{\left|\partial\vec{r}/\partial\phi\right|} = \frac{-\rho\sin\phi\,\vec{i} + \rho\cos\phi\,\vec{j}}{\sqrt{\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi}} = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j} \quad \_\_\_(2)$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}/\partial z}{\left|\partial \vec{r}/\partial z\right|} = \vec{k} \qquad \_\_\_\_(3)$$

العلاقات (٣) ، (٢) ، (١) هي العلاقات المطلوبة أولاً.

ولإثبات أن نظام الإحداثيات يكون متعامداً : نثبت أن $\vec{e}_\rho , \vec{e}_\phi , \vec{e}_z$ تكون متعامدة بالتبادل .

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\phi = \left(\cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}\right)\cdot\left(-\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}\right) = 0$$

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_z = \left(\cos\phi\,\vec{i} + \sin\phi\,\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{k}\right) = 0$$

$$\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_z = \left(-\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{k}\right) = 0$$

ومن هذا يتضح أن $\vec{e}_\rho , \vec{e}_\phi , \vec{e}_z$ متعامدة بالتبادل أي أن نظام الإحداثيات المعطي هو نظام إحداثيات متعامدة .

ولإيجاد $\vec{i} , \vec{j} . \vec{k}$ بدلالة $\vec{e}_\rho , \vec{e}_\phi , \vec{e}_z$:

من (١) بالضرب في $\cos\phi$ ومن (٢) بالضرب في $\sin\phi$ والطرح :

$$\therefore \cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi = \cos^2\phi\,\vec{i} + \sin^2\phi\,\vec{i}$$

$$\therefore \vec{i} = \cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi \qquad \_\_\_\_(4)$$

أيضاً : من (١) بالضرب في $\sin\phi$ ومن (٢) بالضرب في $\cos\phi$ والجمع :

$$\sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{e}_\phi = \sin^2\phi\,\vec{j} + \cos^2\phi\,\vec{j}$$

$$\therefore \vec{j} = \sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{e}_\phi \qquad \_\_\_\_(5)$$

ومن (٣) نجد أن :

$$\vec{k} = \vec{e}_z \qquad \_\_\_\_(6)$$

العلاقات (٦) ، (٥) ، (٤) هي العلاقات المطلوبة .

<u>مثال (٢) :</u>

مثل المتجه $\vec{A} = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$ في الإحداثيات الإسطوانية ، ثم أوجد A_ρ , A_ϕ , A_z .

<u>الحل :</u>

بإستخدام نتائج المثال رقم (١) ، وبالتعويض عن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ من المعادلات (٦) و (٥) ، (٤) في معادلة المتجه نحصل على :

$$\vec{A} = z\vec{i} - 2x\vec{j} + y\vec{k}$$
$$= z(\cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi) - 2\rho\cos\phi(\sin\phi\,\vec{e}_\rho + \cos\phi\,\vec{e}_\phi)$$
$$+ \rho\sin\phi\,\vec{e}_z$$

حيث عوضنا أيضاً عن :

$$x = \rho\cos\phi \;,\; y = \rho\sin\phi \;,\; z = z$$
$$\therefore \quad \vec{A} = (z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi)\vec{e}_\rho$$
$$-\left(z\sin\phi + 2\rho\cos^2\phi\right)\vec{e}_\phi + \rho\sin\phi\,\vec{e}_z$$
$$= A_\rho\,\vec{e}_\rho + A_\phi\,\vec{e}_\phi + A_z\,\vec{e}_z$$
$$\therefore A_\rho = z\cos\phi - 2\rho\cos\phi\sin\phi$$
$$A_\phi = -z\sin\phi - 2\rho\cos^2\phi$$
$$A_z = \rho\sin\phi$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣) :</u>

أوجد مربع عنصر الطول لمنحنى وكذلك عنصر الحجم في الإحداثيات الإسطوانية .

<u>الحـــل :</u>

في الإحداثيات الإسطوانية : $x = \rho\cos\phi \ , \ y = \rho\sin\phi \ , z = z$

$$dx = -\rho\sin\phi\, d\phi + \cos\phi\, d\rho$$

$$dy = \rho\cos\phi\, d\phi + \sin\phi\, d\rho \quad , \quad dz = dz$$

مربع عنصر الطول للمنحنى هو :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (-\rho\sin\phi\, d\phi + \cos\phi\, d\rho)^2 + (\rho\cos\phi\, d\phi + \sin\phi\, d\rho)^2 + (dz)^2 \\ &= (d\rho)^2 + \rho^2 (d\phi)^2 + (dz)^2 \end{aligned}$$

ولكن :

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

فبالمقارنة وحيث أن :

$$du_1 = d\rho \ , \ du_2 = d\phi \ , \ du_3 = dz$$

$$\therefore h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \rho \ , \ h_3 = 1$$

ولإيجاد عنصر الحجم: حيث أن :

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3$$

$$\therefore dV = (1)(\rho)(1)(d\rho)(d\phi)(dz) = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٤) :</u> إذا كانت :

$$x = u_1 u_2 \cos u_3 \ , \ y = u_1 u_2 \sin u_3 \ , \ z = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

فأوجد معاملات المقياس h_1, h_2, h_3 وأثبت أن مربع عنصر الطـــول لمنحنـــى الإحداثيات المعطاه هو : $ds^2 = (u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + u_1^2 u_2^2\, du_3^2$

الحـــل :

حيث أن : $x = f(u_1, u_2, u_3)$

$$\therefore dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3$$

$$= u_1 \cos u_3 \; du_1 + u_2 \cos u_3 \, du_2 - u_1 u_2 \sin u_3 \, du_3$$

أيضاً فإن :

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3} du_3$$

$$= u_1 \sin u_3 \; du_1 + u_2 \sin u_3 \, du_2 + u_1 u_2 \cos u_3 \, du_3$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3} du_3$$

$$= u_1 \, du_1 - u_2 \, du_2 + 0 \cdot du_3$$

$$\therefore ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= (u_1 \cos u_3 \, du_1 + u_2 \cos u_3 \, du_2 - u_1 u_2 \sin u_3 \, du_3)^2$$

$$+ (u_1 \sin u_3 du_1 + u_2 \sin u_3 du_2 + u_1 u_2 \cos u_3 du_3)^2$$

$$+ (u_1 \, du_1 - u_2 \, du_2)^2$$

$$= (u_1^2 + u_2^2) du_1^2 + (u_1^2 + u_2^2) du_2^2 + u_1^2 u_2^2 \, du_3^2$$

$$= (u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) + u_1^2 u_2^2 \, du_3^2$$

ولإيجاد المعاملات h_1, h_2, h_3 نقارن العلاقة السابقة بالعلاقة :

$$ds^2 = h_1^2 \, du_1^2 + h_2^2 \, du_2^2 + h_3^2 \, du_3^2$$

نحصل على :

$$h_1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\ ,\ h_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\ \ ,\ h_3 = u_1 u_2$$

وهو المطلوب .

مثال (٥) : إذا كان :

$$u_1 = 2x+3 \quad , u_2 = y-4 \quad , u_3 = z+2$$

فأثبت أن نظام الإحداثيات (u_1, u_2, u_3) هو نظام متعامد وأوجد ds^2 والمعاملات h_1, h_2, h_3 وكذلك الجاكوبيان $J\left(\dfrac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$.

الحل :

حيث أن : $u_1 = 2x+3 \quad , \ u_2 = y-4 \ \ , \ u_3 = z+2$

$$\therefore x = \frac{u_1}{2} - \frac{3}{2}\ \ ,\ y = u_2 + 4\ \ ,\ z = u_3 - 2$$

$$\therefore \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$= \left(\frac{u_1}{2} - \frac{3}{2}\right)\vec{i} + (u_2+4)\vec{j} + (u_3-2)\vec{k}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = \frac{1}{2}\vec{i}\ \ ,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = \vec{j} \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = \vec{k}$$

ولإثبات أن النظام (u_1, u_2, u_3) يكون متعامداً نثبت أن :

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}$ تكون متعامدة بالتبادل .

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{i}\right)\cdot\left(\vec{j}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = (\vec{j}) \cdot (\vec{k}) \quad = 0$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = (\vec{k}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i}\right) = 0$$

أي أن النظام (u_1 , u_2 , u_3) هو نظام متعامد .

<u>ولإيجاد ds^2 :</u>

$$x = \frac{u_1}{2} - \frac{3}{2} \quad , \quad y = u_2 + 4 \;\; , \;\; z = u_3 - 2$$

$$\therefore dx = \frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3} du_3$$

$$= \frac{1}{2} du_1 + 0 + 0 = \frac{1}{2} du_1$$

وبالمثل فإن :

$$dy = du_2 \quad , \; dz = du_3$$

$$\therefore ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{2} du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$$

<u>ولإيجاد h_1, h_2 , h_3 :</u>

حيث أن :

$$ds^2 = h_1^2 \, du_1^2 + h_2^2 \, du_2^2 + h_3^2 \, du_3^2$$

فبالمقارنة نجد أن :

$$h_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad h_2 = 1 \quad , \quad h_3 = 1$$

ويكون الجاكوبيان المطلوب:

$$J\left(\frac{x, y, z}{u_1 , u_2 , u_3}\right) = h_1 \, h_2 \, h_3 = \left(\frac{1}{2}\right)(1)(1) = \frac{1}{2}$$

مثال (٦) :

أوجـــد $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}$ فـــي الإحـــداثيات القطبيـــة الكرويـــة حيث $u_3 = \phi$, $u_2 = \theta$, $u_1 = r$ ، وأثبت أن هذه المجموعة تكون متعامدة بالتبادل .

أوجد أيضاً : $\vec{\nabla} u_3, \vec{\nabla} u_2, \vec{\nabla} u_1$ لهذا النظام ، وأثبت أن هـــذه المجموعـــة تشكل مجموعة متجهات متعاكسة مع المجموعة الأولى .

الحـــل :

حيث أن :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \ y = r\sin\theta\sin\phi \ , \ z = r\cos\theta$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{k}$$

$$= r\cos\theta\cos\phi\vec{i} + r\cos\theta\sin\phi\vec{j} - r\sin\theta\vec{k} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\vec{k}$$

$$= -r\sin\theta\sin\phi\vec{i} + r\sin\theta\cos\phi\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$= -r\sin\theta\sin\phi\vec{i} + r\sin\theta\cos\phi\vec{j} \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

ولإثبات أن هذه المجموعة متعامدة بالتبادل :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}=(\sin\theta\cos\phi)\,(r\cos\theta\sin\phi)+(\sin\theta\sin\phi)(r\cos\theta\sin\phi)$$
$$+(\cos\theta)(-r\sin\theta)$$
$$=r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi+r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi-r\sin\theta\cos\theta$$
$$=r\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta\cos\theta=0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}=0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}=0$$

وهذا يعني أن مجموعة المتجهات $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi},\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta},\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ متعامدة بالتبادل .

أيضاً :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\wedge\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0\end{vmatrix}$$
$$=\sin\theta\cos\phi\left(r^2\sin^2\theta\cos\phi\right)$$
$$-\sin\theta\sin\phi\left(-r^2\sin^2\theta\sin\phi\right)$$
$$+\cos\theta\left(r^2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\phi+r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\right)$$
$$=r^2\sin^3\theta\cos^2\phi+r^2\sin^3\theta\sin^2\phi$$
$$+r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi+r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi$$
$$=r^2\sin^3\theta+r^2\sin\theta\cos^2\theta$$
$$=r^2\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)$$
$$=r^2\sin\theta \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(I)}$$

أيضاً : لحساب $\vec{\nabla} r, \vec{\nabla}\theta, \vec{\nabla}\phi$:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad \theta = \cos^{-1}\frac{z}{r} = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{i} + \frac{z}{r}\vec{k}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\vec{\nabla}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\vec{i} + \frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\vec{j} - \frac{\sin\theta}{r}\vec{k} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

$$= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\vec{i} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$= -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\vec{i} + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\vec{j} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

من (٣) ، (٢) ، (١) يمكن استنتاج أن :

$$\left(\vec{\nabla} r\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\theta\right)\wedge\left(\vec{\nabla}\phi\right) = \frac{1}{r^2\sin\theta} \qquad \_\_\_\_\_(\mathrm{II})$$

من (II) ، (I) نجد أن :

$$\left\{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right\}\left\{\left(\vec{\nabla}\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{\nabla}\theta\right)\wedge\left(\vec{\nabla}\phi\right)\right\} = 1$$

وهذا يعني أن مجموعة المتجهات $(\vec{\nabla} r, \vec{\nabla}\theta, \vec{\nabla}\phi), (\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi})$ تشكلان مجموعتين متعاكستين ، وهو المطلوب .

مثال(٧): في الإحداثيات المنحنية المتعامدة (u_1, u_2, u_3)، أثبت الآتي:

$$\text{(i)}\ \left|\vec{\nabla} u_i\right| = \frac{1}{h_i} \quad , \quad i=1,2,3$$

$$\text{(ii)}\ \vec{e}_i = \vec{E}_i \quad , \quad i=1,2,3$$

$$\text{(iii)}\ \vec{e}_1 = h_2 h_3 (\vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3)\ ,\ \vec{e}_2 = h_3 h_1 (\vec{\nabla} u_3 \wedge \vec{\nabla} u_1)$$

$$\vec{e}_3 = h_1 h_2 (\vec{\nabla} u_1 \wedge \vec{\nabla} u_2)$$

الحل: لإيجاد (i): حيث أن

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial u_3}\vec{e}_3$$

فبوضع $\phi = u_1$:

$$\vec{\nabla} u_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_1}{\partial u_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_1}{\partial u_3}\vec{e}_3$$

$$= \frac{1}{h_1}\vec{e}_1 + 0 + 0 = \frac{1}{h_1}\vec{e}_1 \qquad \therefore\ \left|\vec{\nabla} u_1\right| = \frac{1}{h_1}$$

وبالمثل فإن: $\left|\vec{\nabla} u_3\right| = \frac{1}{h_3}, \left|\vec{\nabla} u_2\right| = \frac{1}{h_2}$، أي أن: $\left|\vec{\nabla} u_i\right| = \frac{1}{h_i}$

و<u>لإيجاد (ii)</u>: حيث أن

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} u_1}{\left|\vec{\nabla} u_1\right|}$$

فباستخدام (i) :

$$\vec{E}_1 = h_1 \vec{\nabla} u_1 = h_1 (\frac{e_1}{h_1}) = \vec{e}_1$$

وبالمثل فإن $\vec{E}_3 = \vec{e}_3\ ,\ \vec{E}_2 = \vec{e}_2$، أي أن $\vec{e}_i = \vec{E}_i$

لإيجاد (iii): باستخدام (i):

$$\vec{\nabla} u_1 = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\ ,\ \vec{\nabla} u_2 = \frac{\vec{e}_2}{h_2}\ ,\ \vec{\nabla} u_3 = \frac{\vec{e}_3}{h_3}$$

$$\vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3 = \frac{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3}{h_2\, h_3} = \frac{\vec{e}_1}{h_2\, h_3}$$

$$\therefore \vec{e}_1 = h_2 h_3 (\vec{\nabla} u_2 \wedge \vec{\nabla} u_3)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\vec{e}_2 = h_3 h_1 (\vec{\nabla} u_3 \wedge \vec{\nabla} u_1)\ ,\ \vec{e}_3 = h_1 h_2 (\vec{\nabla} u_1 \wedge \vec{\nabla} u_2)$$

وهو المطلوب.

مثال(٨): (أ) أثبت أن مربع عنصر طول قوس في نظام الإحداثيات المنحنية المتعامدة يمكن كتابة بالصورة:

$$dS^2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}\right)^2 du_1^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right)^2 du_2^2 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3}\right)^2 du_3^2$$

(ب) أثبت أن مربع عنصر طول قوس في نظام الإحداثيات المنحنية يمكن كتابته بالصورة التربيعية الآتية:

$$dS^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} g_{ij}\, du_i\, du_j$$

حيث المعاملات g_{ij} تعرف بالعلاقة:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}$$

أدرس الحالة الخاصة لنظام الإحداثيات المنحنية المتعامدة.

الحل: الجزء(أ): نفرض أن $\vec{r}$ هو متجه الموضع حيث

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$$

$$\therefore d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3$$

مربع عنصر طول القوس:

$$dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3)^2$$

$$= (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1})^2 du_1^2 + (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2})^2 du_2^2 + (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3})^2 du_3^2 + 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_1 du_2$$

$$+ 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_2 du_3 + 2\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_3 du_1 \qquad \text{\_\_\_\_\_} (1)$$

وفي النظام المتعامد فإن:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} = 0 \ , \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = 0 \ , \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} = 0$$

بالتعويض في (1):

$$dS^2 = (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1})^2 du_1^2 + (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2})^2 du_2^2 + (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3})^2 du_3^2$$

وهو المطلوب.

الجزء(ب): حيث أن $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$

$$\therefore d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = \vec{a}_1 du_1 + \vec{a}_2 du_2 + \vec{a}_3 du_3$$

$$\therefore dS^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{a}_1 du_1 + \vec{a}_2 du_2 + \vec{a}_3 du_3) \cdot (\vec{a}_1 du_1 + \vec{a}_2 du_2 + \vec{a}_3 du_3)$$

$$= \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 \, du_1 du_1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \, du_1 du_2 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 \, du_1 du_3$$

$$+ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 \, du_2 du_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 \, du_2 du_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \, du_2 du_3$$

$$+ \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 \, du_3 du_1 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_2 \, du_3 du_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3 \, du_3 du_3$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j-1}^{3} \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \, du_i du_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j-1}^{3} g_{ij} du_i \, du_j$$

حيث $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_j} = \bar{a}_i \cdot \bar{a}_j = g_{ij}$ ، وهو المطلوب.

<u>حالة خاصة</u>: في حالة نظام الإحداثيات المنحنية المتعامد فإن:

$$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \,,\; \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 = 0 \,,\; \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_1 = 0$$

$$\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1 = 0 \,,\; \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_2 = 0 \,,\; \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 = 0$$

أي أن $g_{ij} = g_{ji} = 0$ (حيث $i \neq j$)

وتؤول العلاقة السابقة إلى:

$$\begin{aligned} dS^2 &= \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1\, du_1 du_1 + \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_2\, du_2 du_2 + \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3\, du_3 du_3 \\ &= a_1^2\, du_1^2 + a_2^2\, du_2^2 + a_3^2\, du_3^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2\, du_i^2 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الرابع

(١) أثبت أن متجهات الوحدة في الإحداثيات القطبية الكروية تعطي بدلالة متجهات الوحدة الكرتيزية بالصورة :

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\vec{i} + \cos\theta\,\sin\phi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{k}$$

ومن ثم أثبت أن نظام الإحداثيات القطبية الكروية هو نظام متعامد .

أوجد صور مناسبة لكل من $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بدلالة $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$.

(٢) مثل المتجه $\vec{A} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 3x\vec{k}$ في الإحداثيات القطبية الكروية ، ثم أوجد المركبات A_r, A_θ, A_ϕ .

(٣) أوجد مربع عنصر الطول لمنحنى وكذلك عنصر الحجم في الإحداثيات القطبية الكروية .

(٤) أوجد تعبيرات مناسبة لكل من :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

في كل من :

(i) الإحداثيات الإسطوانية (ρ, ϕ, z) .

(ii) الإحداثيات القطبية الكروية (r, θ, ϕ) .

(٥) اذا كان : $u_1 = xy\ ,\ u_2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\ ,\ u_3 = z$

أثبت أن هذا النظام من الإحداثيات لا يكون متعامدا

أوجد أيضا ds^2 والمعاملات h_1 , h_2 . h_3 وكذلك الجاكوبيان

$J\left(\frac{x, y, z}{u_1, u_2, u_3}\right)$.

(٦) إذا كانت u_1, u_2, u_3 هي إحداثيات منحنية متعامدة ، بين أن الجاكوبيان

لكل من (x,y,z) بالنسبة إلى (u_1, u_2, u_3) يكتب بالصورة :

$J = h_1 h_2 h_3$.

أثبت أن هذا الجاكوبيان يساوي .

(i) ρ في الإحداثيات الأسطوانية .

(ii) $r^2 \sin\theta$ في الإحداثيات القطبية الكروية .

(٧) أثبت أنه في أي نظام إحداثيات منحنية متعامدة يكون :

$div\ curl\ \bar{A} = 0 \quad , \quad curl\ grad\ \phi = 0$

حيث $\bar{A}$ متجه ، ϕ دالة قياسيه