الباب الثالث

حساب التكامل للدوال الاتجاهية

أولاً: تكاملات الدوال القياسية والاتجاهية:

تصف الدوال القياسية مجالاً قياسيا ϕ بينما تصف الدوال الاتجاهية $\bar{F}$ مجالاً إتجاهياً ، ويوجد لدينا ٣ أنواع من التكاملات:

(١) تكاملات خطية

قياسية

$\int \bar{F} \cdot d\bar{r}$ (لمجال اتجاهي)

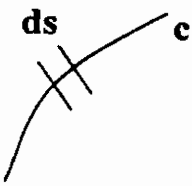
$\int \phi ds$ (لمجال قياسي)

اتجاهية

$\int \bar{F} \wedge d\bar{r}$ (لمجال اتجاهي)

$\int \phi d\bar{r}$ (لمجال قياسي)

حيث ds هي طول قوس من المنحنى c.



(i) في الإحداثيات الكرتيزية: $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

حيث: $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ومعادلة المنحنى: $y = f(x)$.

(ii) في الإحداثيات البارامترية: $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

حيث: $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}, \quad \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

ومعادلات المنحنى هي المعادلات البارامترية : $y = g(t)$ ، $x = f(t)$.

(iii) <u>في الإحداثيات القطبية</u>: $ds=\sqrt{r^2+r'^2}\ d\theta$ ∴

حيث : $r'=\dfrac{dr}{d\theta}$ ومعادلة المنحنى $r=f(\theta)$.

(٢) <u>التكاملات السطحية</u>:

قياسية

$\iint \vec{F}\cdot d\vec{S}$

(المجال اتجاهي)

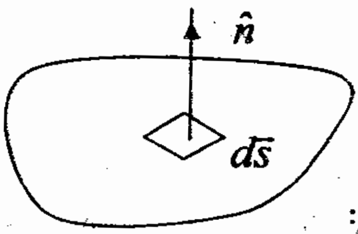
اتجاهية

$\iint \vec{F}\wedge d\vec{S}$

(المجال اتجاهي)

$\iint \phi d\vec{S}$

(المجال قياسي)



حيث $d\vec{S}$ عنصر متجه المساحة: $d\vec{S}=ds\cdot\hat{n}$

$\hat{n}$ متجه وحدة عمودي على المساحة إلى الخارج.

(٣) <u>التكاملات الحجمية</u>:

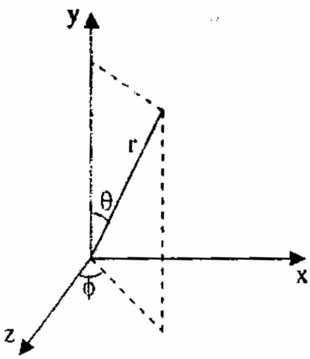
قياسية

$\iiint \phi\ dV$

اتجاهية

$\iiint \vec{F}\,dV$

حيث dV عنصر الحجم (قياسي)



(i) <u>في الإحداثيات الكرتيزية</u>:

$$dV = dx\ dy\ dz$$

(ii) <u>في الإحداثيات القطبية الكروية</u>:

$$dV = r^2 \sin\theta\ dr\,d\theta\,d\phi$$

أمثلة محلولة:

مثال (١):

احسب التكامل الخطي القياسي $\int_c xy^2 ds$ على المنحنى c الذي معادلاته البارامترية هي: $x = \cos t$ ، $y = \sin t$

حيث: $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

الحل:

نوجد طول القوس ds من المنحنى c

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

$$x = \cos t \rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sin t$$

$$y = \sin t \rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\therefore ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = (1)dt = dt$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$\int_c xy^2 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\sin t)^2 (dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \ \sin^2 t \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, .d(\sin t) = \frac{\sin^3 t}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$d(\sin t) = \cos t \ dt$$

وهو المطلوب.

مثال(٢):

أحسب التكامل الخطي القياسي $\int_c (xydx + x^2dy)$ في الحالتين:

(i) إذا كانت المعادلات البارامترية للمنحنى c هي:

$$x = 3t - 1, y = 3t^2 - 2t$$

حيث: $1 \le t \le \frac{4}{3}$

(ii) إذا كان المنحنى c يتألف من القطع المستقيمة من (1,2) إلى (4,1) ومن (4,1) إلى (4,5).

الحل:

الحالة الأولى:

نعوض بدلا من x, y, dx, dy بدلالة المتغير t ، وبذلك من المعادلات البرامترية :

$$x = 3t - 1 \quad \rightarrow dx = 3dt$$

$$y = 3t^2 - 2t \quad \rightarrow dy = (6t - 2)dt$$

ويصبح التكامل:

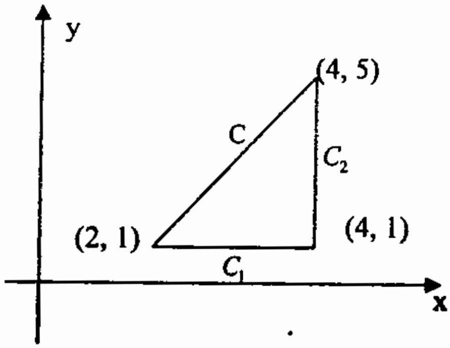
$$I = \int_c (xydx + x^2dy)$$

$$= \int_1^{\frac{4}{3}} [(3t-1)(3t^2-2t)(3dt) + (3t-1)^2(6t-2)dt]$$

$$= \int_1^{\frac{4}{3}} [81t^3 - 81t^2 + 24t - 2]dt = 58$$

الحالة الثانية:

المنحنى c يتكون من جزئين c_1, c_2



المعادلات البارامترية للجزئين (أو المنحنين) c_1, c_2 :

$$C_1 : x = t, y = 1 \quad (2 \leq t \leq 4)$$

$$dx = dt \ , \ dy = 0$$

$$C_2 : x = 4 \ , y = t \quad (1 \leq t \leq 5)$$

$$dx = 0 \ , \ dy = dt$$

التكامل على C_1:

$$I_1 = \int_{c_1} (xy dx + x^2 dy) = \int_2^4 t dt = 6$$

التكامل على C_2:

$$I_2 = \int_{c_2} (xy dx + x^2 dy) = \int_1^5 16 \, dt = 64$$

ويصبح التكامل الكلي على c هو: $I = I_1 + I_2 = 6 + 64 = 70$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أوجد التكامل الخطي القياسي للمجال الاتجاهي:

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\hat{j} + 20xz^2\hat{k}$$

من النقطة (0, 0, 0) إلى النقطة (1, 1, 1) على المسارات آلاتية:

(i) المسار c الذي معادلاته البارامترية هي $x = t, y = t^2, z = t^3$.

(ii) المستقيم الواصل بين النقطتين (1, 1, 1) ,(0, 0, 0).

(iii) المسار c المكون من المستقيمات الواصلة من (0,0,0) إلى (1,0,0) ثم إلى (1,1,0) ثم إلى (1,1,1)

<u>الحل:</u>

(i) يسمى المسار c الذي معادلاته البارامترية هي: $x=t, y=t^2, z=t^3$

بالمنحنى الفراغي وتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المنحنى:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\therefore d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$= dt\,\hat{i} + 2t\,dy\,\hat{j} + 3t^2 dt\,\hat{k}$$

$$= (\hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt \qquad \rightarrow (2)$$

<u>أيضا:</u> نوجد $\vec{F}$ بدلالة t :

$$\therefore \vec{F} = (3t^2 + 6t^2)\hat{i} - 14(t^2)(t^3)\hat{j} + 20(t)(t^3)^2\hat{k}$$

$$= 9t^2\hat{i} - 14t^5\hat{j} + 20t^7\hat{k} \qquad \rightarrow (3)$$

ويكون التكامل الخطي القياسي للمجال $\vec{F}$ هو:

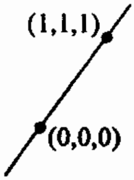
$$I = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 [9t^2 - 28t^6 + 60t^9]dt$$

$$= [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]_0^1 = 5$$

(ii) المستقيم الواصل بين النقطتين $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, 1)$:

المعادلات البارامترية لهذا المستقيم هي: $x = t,\ y = t,\ z = t$

حيث: $0 \leq t \leq 1$



وتصبح المعادلة الاتجاهية لهذا المستقيم هي:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t\hat{i} + t\hat{j} + t\hat{k}$$

$$= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})t \qquad \rightarrow (4)$$

$$\therefore\ d\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \qquad \rightarrow (5)$$

أيضا: نوجد $\vec{F}$ بدلالة t :

$$\vec{F} = (3t^2 + 6t)\hat{i} - 14t^2\hat{j} + 20t^3\hat{k} \qquad \rightarrow (6)$$

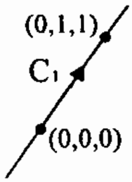
ويصبح التكامل المطلوب:

$$I = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [(3t^2 + 6t) - 14t^2 + 20t^3]dt$$

$$= \int_0^1 [20t^3 - 11t^2 + 6t]dt = \frac{13}{3}$$

(iii) المسار c يتكون من ٣ مستقيمات معادلاتها البارامترية هي :

(١) المستقيم C_1:



$$x = t\ ,\ y = 0\ ,\ z = 3$$

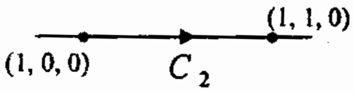
$$(0 \leq t \leq 1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} = t\hat{i} \rightarrow d\vec{r} = dt\ \hat{i}$$

أيضاً: $\vec{F} = 3x^2\hat{i} = 3t^2\hat{i}$

$$\therefore\ I_1 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 3t^2 dt = 1 \qquad \rightarrow (7)$$

(٢) <u>المستقيم</u> C_2:



$$x = 1 \quad , \quad y = t \quad , \quad z = 0$$

$$(0 \le t \le 1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{i} = \hat{i} + x\hat{j}$$

$$\therefore \; d\vec{r} = dt\hat{j}$$

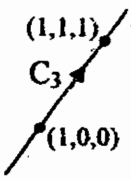
أيضاً:

$$\vec{F} = (3x^2 + 6y)\hat{i} = (3 + 6t)\hat{i}$$

$$\therefore I_2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int [(3 + 6t)\hat{i}] \cdot (dt\hat{j}) = 0 \qquad \rightarrow (8)$$

(٣) <u>المستقيم</u> C_3:



$$x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = t$$

$$(0 \le t \le 1)$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \hat{i} + \hat{j} + t\hat{k}$$

$$\therefore \; d\vec{r} = dt\,\hat{k}$$

أيضاً:

$$\vec{F} = 9\hat{i} - 14t\hat{j} + 20t^2\hat{k}$$

$$\therefore I_3 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 20t^2 dt = 20\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{20}{3} \qquad \rightarrow (9)$$

ويصبح التكامل المطلوب:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1 + 0 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤):

إذا كانت $\phi = 2xyz^2$ تمثل مجالا قياسيا ، وكانت $\vec{F} = xy\,\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ تمثل مجالا اتجاهيا، فاحسب التكاملين الخطيين الاتجاهيين $\int_c \vec{F} \wedge d\vec{r}$ ، $\int_c \phi d\vec{r}$ على طول المنحنى C الذي معادلاته البارامترية هي :

$$x = t^2,\ y = 2t\ ,\ z = t^3\ (0 \le t \le 1)$$

الحل : المعادلات البارامترية للمنحنى C :

$$x = t^2\ ,\qquad y = 2t\ ,\qquad z = t^3$$

المعادلة الاتجاهية (الفراغية) للمنحنى C:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} + t^3\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r} = (2t\hat{i} + 2\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt \qquad \rightarrow (1)$$

المجال ϕ بدلالة t:

$$\phi = 2xyz^2 = 2(t^2)(2t)(t^3)^2 = 4t^9 \qquad \rightarrow (2)$$

المجال $\vec{F}$ بدلالة t:

$$\vec{F} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k} = 2t^3\hat{i} - t^3\hat{j} + t^4\hat{k} \qquad \rightarrow (3)$$

التكاملات المطلوبة:

$$(1)\qquad \int_c \phi\, d\vec{r} = \int_0^1 (4t^9)(2t\hat{i} + 2\hat{j} + 3t^2\hat{k})dt$$

$$= \int_0^1 (8t^{10}\hat{i} + 8t^9\hat{j} + 12t^{11}\hat{k})dt = \frac{8}{11}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j} + \hat{k}$$

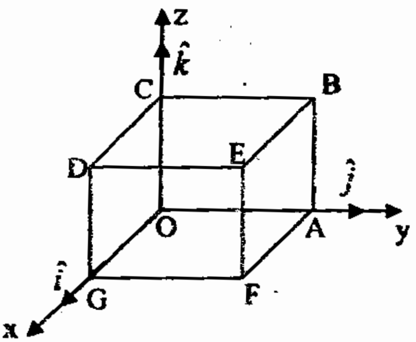
$$(2)\quad \int_c \vec{F}\wedge d\vec{r} = \int_0^1 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2t^3 & -t^3 & t^4 \\ 2t & 2 & 3t^2 \end{vmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 [(-3t^5 - 2t^4)\hat{i} - 4t^5\hat{j} + (4t^3 + 2t^4)\hat{k}]dt$$

$$= -\frac{9}{10}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{7}{5}\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال (٥): إذا كانت $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ دالة تمثل مجالا اتجاهيا، فاحسب التكامل السطحي $\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$ حيث S هي مساحة المكعب المحدد بالمستويات.



x = 0 , x = 1

y = 0 , y = 1

z = 0 , z = 1

الحل:

التكامل السطحي $\iint \vec{F}\cdot d\vec{s}$ حيث:

$$\therefore \iint \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS \leftarrow d\vec{S} = \hat{n}\,dS$$

نوجد التكاملات السطحية على الأوجه الستة للمكعب كمساحات اتجاهية ، وذلك باعتبار أن $\hat{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على أي وجه إلى الخارج ، وتمثله هنا المتجهات $\hat{i}\ ,\ \hat{j}\ ,\ \hat{k}$

(١) الوجه الأول $[DEFG]$

$x = 1,\ \hat{n} = \hat{i},\ dS = dy\,dz$

ويكون التكامل على هذا الوجه:

$$I_1 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$= \iint (4z\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}) \cdot (\hat{i})(dydz)$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (4z)(dydz) = 4\int_0^1 zdz \int_0^1 dy$$

$$= 4\int_0^1 zdz = 4[\frac{z^2}{2}]_0^1 = 2 \qquad \rightarrow (1)$$

(٢) **<u>الوجه الثاني</u>:** $[CBAO]$

$$x = 0 \quad , \quad \hat{n} = -\hat{i} \quad , \quad dS = dydz$$

$$\therefore I_2 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint (-y^2\hat{j} + yz\hat{k}).(-\hat{i})(dydz) = 0 \rightarrow (2)$$

(٣) **<u>الوجه الثالث</u>:** $[EBAF]$

$$y = 1 \ , \ \hat{n} = \hat{j} \ , \ dS = dx\,dz$$

$$\therefore I_3 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$= \iint (4xz\hat{i} - \hat{j} + z\hat{k}).(\hat{j})(dxdz)$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (-1) dxdz = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1 \qquad \rightarrow (3)$$

(٤) **<u>الوجه الرابع</u>:** $[DCOG]$

$$y = 0 \quad , \quad \hat{n} = -\hat{j} \quad , \quad dS = dx\,dz$$

$$\therefore I_4 = \iint \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

$$= \iint (4xz\hat{i}).(-\hat{j})(dxdz) = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

(٥) الوجه الخامس: $[CBED]$ $z=1\ ,\ \hat{n}=\hat{k}\ ,\ ds=dx\,dy$

$$\therefore I_5=\iint \vec{F}\cdot\hat{n}dS$$
$$=\iint(4x\hat{i}-y^2\hat{j}+y\hat{k}).(\hat{k})(dxdy)$$
$$=\int_0^1\int_0^1(y)dxdy=\int_0^1 ydy\int_0^1 dx=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\quad\rightarrow(5)$$

(٦) الوجه السادس: $[OAFG]$

$$z=0\quad,\quad\hat{n}=-\hat{k}\quad,\quad dS=dx\,dy$$
$$\therefore I_6=\iint\vec{F}\cdot\hat{n}dS$$
$$=\iint(-y^2\hat{j}).(-\hat{k})(dxdy)=0\qquad\rightarrow(6)$$

∴ التكامل على جميع أوجه المكعب:

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6$$
$$=2+0+(-1)+0+\frac{1}{2}+0=\frac{3}{2}$$

وهو المطلوب.

<u>أمثلة عامة على تكاملات الدوال القياسية والإتجاهية :</u>

<u>مثال (١) :</u>

أوجد التكامل الخطي القياسي $\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$ للدالة الإتجاهية $\vec{F}=xy\hat{i}+yz\hat{j}+zx\hat{k}$ على المنحنى c الذي معادلته الإتجاهية هي: $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ومعادلاته البارامترية هي :

$x=t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ (حيث $-1\le t\le 1$)

الحـــل :

نوجد $\vec{F}, d\vec{r}$ بدلالة البارامتر t .

فحيث أن : $x=t\ ,\ y=t^2\ ,\ z=t^3$ ، $\vec{r}=x\,\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}$

$$\therefore\quad \vec{r}=t\,\hat{i}+t^2\,\hat{j}+t^3\,\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{r}=(\hat{i}+2t\,\hat{j}+3t^2\,\hat{k})dt \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\vec{F}=(t)(t^2)\hat{i}+(t^2)(t^3)\,\hat{j}+(t^3)(t)\hat{k}$$

$$=t^3\hat{i}+t^5\,\hat{j}+t^4\,\hat{k} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

من (٢) ، (١) :

$$\vec{F}\cdot d\vec{r}=(t^3+2t^6+3t^6)dt=(t^3+5t^6)\ dt$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$I=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{-1}^{1}\left(t^3+5t^6\right)\ dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}+\frac{5t^7}{7}\right]_{-1}^{1}=\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{5}{7}-\left(-\frac{5}{7}\right)\right)\right]=\frac{10}{7}$$

وهو المطلوب .

مثال (٢) :

أوجد التكامل $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ للدالة الإتجاهية $\vec{F}=3\times y\,\hat{i}-y^2\,\hat{j}$ على المنحنى c الذي هو عبارة عن المنحنى المستوى $y=2x^2$ من $(0,0)$ إلى $(1,2)$.

الحـــل :

نكتب المعادلات البارامترية للمنحنى c$(y=2x^2)$، فحيث أن المنحنى يقع على المستوى فإن معادلته الإتجاهية تكون: $\vec{r}=x\,\hat{i}+y\hat{j}$، وبأخذ $x=t$

حيث $0 \leq t \leq 1$

فإن :

$$\therefore \ \vec{r} = t\,\hat{i} + 2t^2\,\hat{j} \qquad \longleftarrow \qquad y = 2t^2$$

ولإيجاد $\vec{F}, d\vec{r}$ بدلالة t :

$$d\vec{r} = dt\,\hat{i} + 4t\,dt\,\hat{j} = \left(\hat{i} + 4t\,\hat{j}\right)dt \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\vec{F} = 3(t)\left(2t^2\right)\hat{i} - \left(2t^2\right)^2\hat{j} = 6t^3\hat{i} - 4t^4\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_(2)$$

$$\therefore \vec{F}\cdot dr = \left(6t^3 - 16t^5\right)dt$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$I = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(6t^3 - 16t^5\right)dt = -\frac{7}{6}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣) :</u>

أوجد $\int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ للدالة الإتجاهية $\vec{F}$ التي تمثل مجـــالا مـــستويا حيـــث : $\vec{F} = \left(5\times y - 6x^2\right)\hat{i} + (2y - 4x)\,\hat{j}$ والمنحنى c الذي هو المنحنى الـــذي معادلته $y = x^3$ والتكامل من النقطة (1,1) إلى النقطـــة (2,8) علـــى المنحنـــى المذكور .

<u>الحـــل :</u>

نأخذ $x = t$ حيث $1 \leq t \leq 2$ فتكون $y = t^3$ وتصبح المعادلـــة الإتجاهيـــة للمنحنى c هي :

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} = t\,\hat{i} + t^3\,\hat{j}$$

$$d\vec{r} = \left(\hat{i} + 3t^2\,\hat{j}\right)dt \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

أيضاً فإن :

$$\vec{F} = \left(5t^4 - 6t^2\right)\hat{i} + \left(2t^3 - 4t\right)\hat{j} \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

من (٢) ، (١) :

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \left[\left(5t^4 - 6t^2\right) + 3t^2\left(2t^3 - 4t\right)\right]\ dt$$
$$= \left[6t^5 + 5t^4 - 12t^3 - 6t^2\right]dt$$

ويصبح التكامل المطلوب :

$$I = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \left[6t^5 + 5t^4 - 12t^3 - 6t^2\right]dt$$
$$= \left[t^6 + t^5 - 3t^4 - 2t^3\right]\Big|_1^2$$
$$= (64-1) + (32-2) - 3(16-1) - 2(8-1) = 35$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

إذ كانت $\vec{F} = 4y\,\hat{i} + x\,\hat{j} + 2z\,\hat{k}$ دالة إتجاهية ، أوجد التكامل السطحي $\iint\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)\cdot d\vec{S}$ مأخوذاً على نصف الكرة $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ حيث $z \geq 0$.

الحل :

نحسب أولاً $\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}\right)$:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4y & x & 2z \end{vmatrix} = (1-4)\hat{k} = -3\hat{k} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

إذا كان $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ متجه موضع أي نقطة في الفراغ فإن سطح النصف كرة (التي مركزها عند نقطة الأصل) يكون عمودياً على $\vec{r}$ ولذلك يكون متجه الوحدة العمودي على السطح هو :

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{a} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{a} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

حيث r = a نصف قطر السطح الكروي .

ويكون التكامل المطلوب:

$$I = \iint\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)\cdot d\vec{S} = \iint\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)\cdot \hat{n}\, dS \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

ومن (٢) ، (١) :

$$\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right)\cdot \hat{n} = \left(-3\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{a}\right) = -3\, z/a \qquad \text{\_\_\_\_ (4)}$$

ويصبح التكامل في (٣) بالصورة:

$$I = \frac{-3}{a}\iint z\, dS \qquad \text{\_\_\_\_\_\_ (5)}$$

وبإستخدام الإحداثيات القطبية الكروية : حيث عنصر المساحة هو :

$$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$[\ r = a\ ,\ \theta = 0 \to \pi/2\ \ (\text{لنصف الكرة})\quad ,\quad \phi = 0 \to 2\pi\,]$$

أيضاً فإن:

$$z = r\cos\theta$$

$$\therefore I = -\frac{3}{a}\iint(a\cos)\left(a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\right) = -3a^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= -3a^2(2\pi)\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = -3a^2(2\pi)(\tfrac{1}{2}) = -3\pi a^2$$

وهو المطلوب .

مثال (٥) :

إذا كانت $\vec{F} = x^2\,\hat{i} + y^2\,\hat{j} + z^2\,\hat{k}$ دالة إتجاهية ، فأحسب التكامل السطحي $\iint \vec{F}\cdot d\vec{S}$ على أوجه المكعب $0 \le x, y, z \le 1$.

الحل :

نتبع نفس خطوات حل المثال رقم (٥) ، حيث التكامل المطلوب يتكون من ٦ تكاملات على أسطح المكعب الستة وهذه التكاملات هي :

$$I_1 = \iint_{DEFG} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dy\,dz = 1 \qquad (\hat{n} = \hat{i} \quad , \quad x = 1)$$

$$I_2 = \iint_{CBAO} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dy\,dz = 0 \qquad (\hat{n} = -\hat{i} \quad , \quad x = 0)$$

$$I_3 = \iint_{EBAF} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dx\,dz = 1 \qquad (\hat{n} = \hat{j} \quad , \quad y = 1)$$

$$I_4 = \iint_{DCOG} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dx\,dz = 0 \qquad (\hat{n} = -\hat{j} \quad , \quad y = 0)$$

$$I_5 = \iint_{CBED} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dx\,dy = 1 \qquad (\hat{n} = \hat{k} \quad , \quad z = 1)$$

$$I_6 = \iint_{OAFG} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dx\,dy = 0 \qquad (\hat{n} = -\hat{k} \quad , \quad z = 0)$$

$$\therefore I = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$$

وهو المطلوب .

مثال(٦): إذا كانت $\vec{F}=\dfrac{-y\hat{i}+x\hat{j}}{x^2+y^2}$ فأوجد $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$ في الحالتين:

(i) إذا كان المنحنى c هو منحنى بسيط مغلق في المستوى (x,y) ولا يشتمل على نقطة الأصل.

(ii) إذا كان المنحنى c هو الدائرة $x^2+y^2=1$ في المستوى (xy) واتجاه المنحنى هو الإتجاهي اليميني (عكس عقارب الساعة).

الحل:

$$\vec{F}=\frac{-y\hat{i}+x\hat{j}}{x^2+y^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$$

$$d\vec{r}=dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j} \qquad (\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j} \text{ حيث})$$

$$\therefore \oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int[-\frac{y}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}]\cdot[dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}]$$

$$=\int[-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy]$$

$$=\int[\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}]=\int[\frac{x\,dx-y\,dy}{x^2+y^2}] \qquad \_\_\_\_(1)$$

ولإيجاد هذا التكامل نتحول إلى الإحداثيات القطبية وذلك بوضع:

$$x=r\cos\theta \;,\quad y=r\sin\theta$$

$$\therefore x^2+y^2=r^2 \qquad , \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$d\theta=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}[\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}]=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int d\theta \qquad \_\_\_\_(2)$$

<u>الحالة الأولى (i):</u> حيث أن المنحنى مغلق فإنه إذا كان لدينا نقطة p على المنحنى بحيث أن الحد السفلى للزاوية θ عند p هو ϕ (مثلاً) فإن الحد العلوي سيكون أيضاً ϕ:

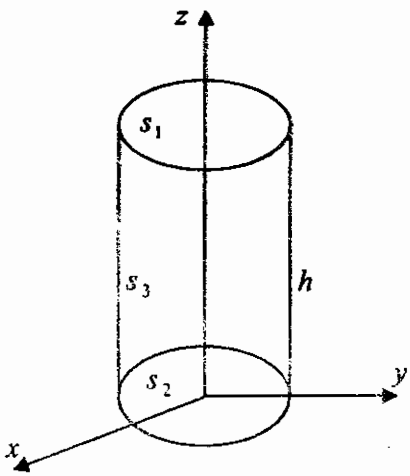
$$\therefore \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\phi}^{\phi} d\theta = [\theta]_{\phi}^{\phi} = \phi - \phi = 0$$

<u>الحالة الثانية(ii):</u> المنحنى c هو الدائرة $x^2+y^2=1$ في المستوى (xy) وتكون الزاوية θ متغيرة من 0 إلى 2π (في الإتجاهي اليمني)

$$\therefore \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{0}^{2\pi} d\theta = [\theta]\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٧):</u> أحسب التكامل السطحي $\iint \vec{A}\cdot d\vec{s}$ للمتجه $\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ على السطح المغلق لأسطوانة ذات قاعدة دائرية نصف قطرها a وتقع في المستوى (xy) وارتفاعها h في إتجاه محور z.



<u>الحل:</u> لحساب التكامل السطحي

$$\iint (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot d\vec{s}$$
$$= (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\cdot \hat{n}\, ds$$

لدينا ثلاثة تكاملات: تكامل على قمة سطح الاسطوانة وآخر على القاع وثالث على السطح المنحنى للاسطوانة فبأخذ $\hat{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على سطح الاسطوانة.

$\therefore$ <u>على قمة سطح الأسطوانة</u>: نجد أن:

$$\hat{n}=\hat{k}\ ,\ \vec{A}\cdot\hat{n}=\vec{A}\cdot\hat{k}=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{k}=z=h$$

$$\therefore\ \iint\vec{A}\cdot d\vec{s}_1=\iint\vec{A}\cdot\hat{n}\,ds_1=\int h\,ds_1=h\int ds_1=h(\pi a^2)=h\pi a^2 \qquad \_\_\_(1)$$

وعلى قاع سطح الاسطوانة: نجد أن

$$\hat{n}=-\hat{k}\ ,\ \vec{A}\cdot\hat{n}=-\vec{A}\cdot\hat{k}=-z=0$$

(حيث أنه عند قاع الاسطوانة فإن $z=0$)

$$\therefore\ \iint\vec{A}\cdot ds_2=\iint\vec{A}\cdot\hat{n}\,ds_2=0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

على السطح المنحنى للاسطوانة: المتجه $(x\hat{i}+y\hat{j})$ عمودي على السطح المنحنى للاسطوانة ولذلك فإن متجه الوحدة العمودي على ذلك السطح:

$$\hat{n}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{a}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{n}=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{a})=\frac{x^2+y^2}{a}=\frac{a^2}{a}=a$$

$$\therefore\ \iint\vec{A}\cdot\hat{n}\,ds_3=a\iint ds_3=a(2\pi ah)=2\pi a^2h \qquad \_\_\_(3)$$

حيث مساحة السطح المنحنى للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

$$s_3=(2\pi a)(h)=2\pi ah$$

ويصبح التكامل السطحي على سطح الاسطوانة [بجمع (3) ,(2) ,(1)]:

$$\iint\vec{A}\cdot\hat{n}\,ds=\pi a^2h+0+2\pi a^2h=3\pi a^2h$$

وهو المطلوب.

مثال(٨): أوجد قيمة التكامل السطحي

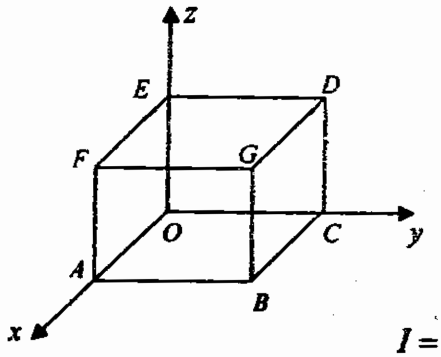
$$I=\iint\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_s[\vec{F}_1\cdot d\vec{s}_1+\vec{F}_2\cdot d\vec{s}_2+\vec{F}_3\cdot d\vec{s}_3\ ]$$

حيث: $\bar{F}_1 = (x^3 - yz)\hat{i}\ ,\ \bar{F}_2 = -2x^2 y\hat{j},\ \bar{F}_3 = z\hat{k}$

$ds_1 = dy\,dz\ ,\ ds_2 = dz\,dx\ ,\ ds_3 = dx\,dy$

وذلك على سطح المكعب المحدود بمستويات الإحداثيات والمستويات

$x = y = z = a$



الحل: التكامل هنا على سطح المكعب المبين ولإيجاد هذا التكامل نسقط السطح على مستويات الإحداثيات الثلاثة:

ولنكتب التكامل بالصورة:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

حيث:

$$I_1 = \iint_s \bar{F}_1 \cdot d\bar{s}_1 = \iint_s (x^3 - yz)\hat{i} \cdot d\bar{s}_1$$

$$I_2 = \iint_s \bar{F}_2 \cdot d\bar{s}_2 = \iint_s (-2x^2 y)\hat{j} \cdot d\bar{s}_2$$

$$I_3 = \iint_s \bar{F}_3 \cdot d\bar{s}_3 = \iint_s (z)\hat{k} \cdot d\bar{s}_3$$

ولإيجاد I_1 : المساحة $ds_1 = dy\,dz$ والتكامل يكون على السطحين $ABGF\ ,\ OCDE$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها هما: $\hat{n} = +\hat{i}\ (x = a)\ ,\ \hat{n} = -\hat{i}\ (x = 0)$

$$\therefore d\bar{s}_1\ (x = a) = \hat{i}\,dy\,dz \qquad ,\qquad d\bar{s}_1\ (x = 0) = -\hat{i}\,dy\,dz$$

$$I_1 = \iint_{x=a} (a^3 - yz)\hat{i} \cdot \hat{i}\,dy\,dz + \iint_{x=0} (0 - yz)(-\hat{i} \cdot \hat{i})\,dy\,dz$$

$$= \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} (a^3 - yz)\,dy\,dz + \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} (yz)\,dy\,dz = \int_0^a \int_0^a a^3\,dy\,dz = a^5 \qquad (1)$$

و<u>لإيجاد</u> I_2: المساحة $ds_2 = dz\,dx$ والتكامل على الــسطحين $BCGD\,, AOEF$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها: $\hat{n} = +\hat{j}\,(y=a)\,,\ \hat{n} = -\hat{j}\,(y=0)$

$$\therefore d\bar{s}_2\,(y=a) = \hat{j}\,dz\,dx \qquad , \qquad d\bar{s}_2\,(y=0) = -\hat{j}\,dz\,dx$$

$$I_2 = -2[\iint_{y=a}(x^3 y)\hat{j}\cdot\hat{j}\,dz\,dx + \iint_{y=0}(x^2 y)(-\hat{j}\cdot\hat{j})\,dz\,dx]$$

$$= -2\int_0^a\int_0^a a\,x^2\,dz\,dx = -\frac{2}{3}a^5 \qquad \_\_\_\_(2)$$

و<u>لإيجاد</u> I_3: المساحة $ds_3 = dx\,dy$ والتكامل على السطحين $FGDE\,, ABOC$

حيث متجه الوحدة العمودي عليها: $\hat{k} = +\hat{k}\,(z=a)\,,\ \hat{n} = -\hat{k}\,(z=0)$

$$\therefore d\bar{s}_3\,(z=a) = \hat{k}\,dx\,dy \qquad , \qquad d\bar{s}_3\,(z=0) = -\hat{k}\,dx\,dy$$

$$I_3 = \iint_{z=a}(z)\hat{k}\cdot\hat{k}\,dx\,dy + \iint_{z=0}(z)(-\hat{k}\cdot\hat{k})\,dx\,dz = \int_0^a\int_0^a a\,dx\,dz = a^3 \qquad \_\_\_\_(3)$$

من (1), (2), (3): $\therefore I = I_1 + I_2 + I_3 = a^5 - \frac{1}{3}a^5 + a^3 = \frac{1}{3}a^5 + a^3$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٩)</u>: إذا كانت $\phi = 45x^2 y$ فأوجد التكامل الحجمي $\iiint_V \phi\,dV$ حيث V هي

المنطقة المغلقة (الحجم) المحدودة بالمستويات:

$$x=0\,,\ y=0\,,\ z=0\,,\ 4x+2y+z=8$$

<u>الحل</u>: المطلوب إيجاد: $I = \iiint_v \phi\,dV = \iiint_v (45x^2 y)\,dx\,dy\,dz$

ولإيجاد حدود التكامل: x تتغير من 0 إلى 2 (تقاطع الحجم مع محور x يــأتي

بوضع $y=0\,, z=0$ فنحصل على: $4x=8 \leftarrow x=2$)

y تتغير من 0 إلى $4-2x$ (تقاطع الحجم مع المستوى xy يأتي بوضع $z=0$

فيعطي الخط المستقيم: $2x+y=4 \leftarrow y=4-2x$)

z تتغير من 0 إلى $8-4x-2y$ (حدود تكامل z من نقطة على المستوى $z=0$ إلى نقطة على السطح $4x+2y+z=8$)

$$\therefore I=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x}\int_{z=0}^{8-4x-2y}(45x^2y)\,dx\,dy\,dz$$

$$=45\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{4-2x}x^2y[z]\Big|_0^{8-4x-2y}\,dx\,dy$$

$$=45\int_0^2\int_0^{4-2x}x^2y(8-4x-2y)\,dx\,dy$$

$$=45\int_0^2\int_0^{4-2x}x^2(8y-4xy-2y^2)\,dx\,dy$$

$$=45\int_0^2 x^2[4y^2-2xy^2-2\frac{y^3}{3}]\Big|_0^{4-2x}dx$$

$$=45\int_0^2 x^2[4(4-2x)^2-2x(4-2x)^2-\frac{2}{3}(4-2x)^3]dx$$

$$=\frac{45}{3}\int_0^2 x^2(4+2x)^2[12-6x-2(4-2x)]dx$$

$$=15\int_0^2 x^2(4-2x)^2[4-2x]dx=15\int_0^2 x^2(4-2x)^3\,dx$$

$$=15\int_0^2 x^2[64-32x+16x^2-8x^3]dx$$

$$=15\int_0^2[64x^2-32x^3+16x^4-8x^5]dx$$

$$=15[\frac{64x^3}{3}-\frac{32x^4}{4}+\frac{16x^5}{5}-\frac{8x^6}{5}]\Big|_0^2=128$$

وهو المطلوب.

<u>**مثال(١٠)**:</u> إذا كانت $\vec{F}=(2x^2-3z)\hat{i}-2xy\,\hat{j}-4x\hat{k}$ فأوجد التكاملين المحجمين:

$$\text{(i)}\ \iiint_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,dV\quad,\quad\text{(ii)}\iiint_V(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\,dV$$

حيث V هو المنطقة المغلقة (الحجم) المحدودة بالمستويات:

$x=0$ ، $y=0$, $z=0$, $2x+2y+z=4$

<u>الحل:</u>

$$\vec{F}=(2x^2-3z)\hat{i}-2xy\hat{j}-4x\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})[(2x^2-3z)\hat{i}-2xy\hat{j}-4x\hat{k}]$$

$$=[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2-3z)+\frac{\partial}{\partial y}(-2xy)+\frac{\partial}{\partial z}(-4x)]=4x-2x=2x$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2x^2-3z & -2xy & -4x\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(-4x)-\frac{\partial}{\partial z}(-2xy)]+\hat{j}[\frac{\partial}{\partial z}(2x^2-3z)-\frac{\partial}{\partial x}(-4x)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(-2xy)-\frac{\partial}{\partial y}(2x^2-3z)]$$

$$=\hat{i}(0)+\hat{j}(-3+4)+\hat{k}(-2y)=\hat{j}-2y\hat{k}$$

حدود التكامل هي: x تتغير من $0 \leftarrow 2$

y تتغير من $0 \leftarrow 2-x$

z تتغير من $0 \leftarrow 4-2x-2y$

(i) $$\iiint_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV=\iiint_V 2x\,dx\,dy\,dz=2\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\int_{z=0}^{4-2x-2y}x\,dx\,dy\,dz$$

$$=2\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}x(4-2x-2y)dx\,dy$$

$$=2\int_{x=0}^{2}x[(4-2x)(2-x)-(2-x)^2]dx$$

$$=2\int_{x=0}^{2}x[(8-4x-4x+2x^2-4+4x-x^2]dx$$

$$=2\int_0^2 x[4-4x+x^2]dx=2\int_0^2[4x-4x^2+x^2]dx$$

$$=2[2x^2-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^4}{4}]_0^2=2[8-\frac{32}{3}+4]=2(\frac{4}{3})=\frac{8}{3}$$

وهو المطلوب أولاً.

(ii) $$\iiint_V(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\,dV=\iiint_V(\hat{j}-2y\hat{k})\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2-x}\int_{z=0}^{4-2x-2y}(\hat{j}-2y\hat{k})\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^2\int_0^{2-x}(\hat{j}-2y\hat{k})(4-2x-2y)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2[\hat{j}\{(4-2x)y-y^2)-\hat{k}\{(4-2x)y^2-\frac{4}{3}y^3\}]_0^{2-x}\,dx$$

$$=\int_0^2[\hat{j}\{(4-2x)(2-x)-(2-x)^2\}-\hat{k}\{(4-2x)(2-x)^2$$
$$-\frac{4}{3}(2-x)^3\}]dx$$

$$=\int_0^2[\hat{j}\{8-8x+2x^2-4-x^2+4x\}-\hat{k}\{16-24x+12x^2-2x^3$$
$$-\frac{4}{3}(8-12x+6x^2-x^3\}]dx$$

$$=\int_0^2[\hat{j}\{4-4x+x^2\}-\frac{\hat{k}}{3}\{16x-24x+12x^2-2x^3\}]dx$$

$$=[\hat{j}\{4x-2x^2+\frac{x^3}{x}\}-\frac{\hat{k}}{3}\{16-12x^2+4x^2-\frac{1}{2}x^4\}]_0^2$$

$$=\hat{j}\{8-8+\frac{8}{3}\}-\frac{\hat{k}}{3}\{32-48+32-8\}$$

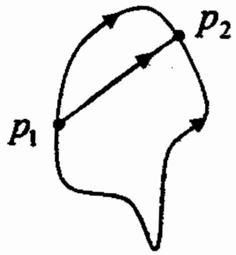
$$=\frac{8}{3}\hat{j}-\frac{8}{3}\hat{k}=\frac{8}{3}(\hat{j}-\hat{k})$$

وهو المطلوب ثانياً.

المجالات المحافظة:

يقال أن الدالة الاتجاهية $\vec{F}$ تمثل مجالا محافظا إذا كان التكامل الخطي $\int_{p_2}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r}$

لا يعتمد على المسار الذي يربط بين النقطتين p_1, p_2 في منطقة ما في الفراغ.



الجهد القياسي للمجال المحافظ:

إذا كانت $\vec{F}$ تمثل مجالا محافظا فان هذا المجال يمكن كتابته بالصورة:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} u$ حيث u دالة قياسية تسمى بالجهد القياسي للمجال أو دالة الجهد

أمثلة محلولة:

مثال(١):

إذا كانت $\vec{F} = -\vec{\nabla} u$ فاثبت أن: $\int_{p_1}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار بين p_1, p_2.

الحل: حيث أن $\vec{F} = -\vec{\nabla} u$ فان:

$$\int_{p_2}^{p_2} -\vec{F}.d\vec{r} = -\int_{p_2}^{p_1} (\vec{\nabla} u).(d\vec{r})$$

$$= -\int_{p_2}^{p_2} (\hat{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial u}{\partial z}).(\hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz)$$

$$= -\int_{p_2}^{p_2} (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz)$$

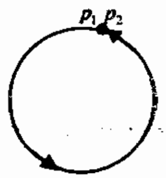
$$= -\int_{p1}^{p2} du = -[u]_{p1}^{p2} = u(p_1) - u(p_2)$$

حيث $u(p_1), \; u(p_2)$ هما قيمتا u عند p_1, p_2 وهذا يعني أن التكامل $\int_{p_2}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار بين $p_1, \; p_2$ ولكن يعتمد على موضع كلا من $p_1, \; p_2$. وهو المطلوب.

<u>مثال (٢):</u>

أثبت أن $\oint_c \vec{F}.d\vec{r} = 0$

حول أي مسار مغلق يصل p_1, p_2 .



<u>الحل:</u>

إذا كان التكامل حول منحنى مغلق، فان النقطتان p_1, p_2 تكونان منطبقتان على بعضهما، وحيث أن:

$$\int_{p_1}^{p_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(p_1) - u(p_2)$$

[مثال (١)]

$$\therefore \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{p_1}^{p} \vec{F} \cdot d\vec{r} = u(p_1) - u(p_1) = 0$$

<u>مثال (٣):</u>

إذا كانت $\vec{F}$ تمثل مجالا محافظا، أي $\vec{F} = -\vec{\nabla} u$، فاثبت أن $\vec{F}$ يكون متجها لا دورانياً أي أن: $curl\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$.

الحل:

حيث أن $\vec{F}=-\vec{\nabla}u$ فيكون الالتفاف (أو الالتواء) $\vec{F}$ هو:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=curl\quad\vec{F}=-\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}u)=0$$

وذلك لأن: $curl\ \ grad\, u=\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}u=0$ (سبق اثباتها) وهذا يعني أن $\vec{F}$ يشكل متجها لا دورانيا. وهو المطلوب.

ملحوظة:

تستخدم العلاقة $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=0$ عادة لإثبات أن $\vec{F}$ تشكل مجالا محافظا.

ملخص:

إذا كانت $\vec{F}$ تشكل مجالا محافظا فان:

(i) $\int_{p_1}^{p_2}\vec{F}.d\vec{r}$ لا يعتمد على المسار بين p_1, p_2.

(ii) $\vec{F}=-\vec{\nabla}u$ حيث u دالة قياسية (دالة الجهد).

(iii) $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=0$ أي أن $\vec{F}$ يكون متجها لا دورانياً.

مثال (٤):

إذا كانت: $\vec{F}=\cos y\ \hat{i}-x\sin y\ \hat{j}+\cos z\ \hat{k}$ تمثل مجالا اتجاهياً فاثبت أن هذا المجال هو مجال محافظ.

الحل:

شرط المجال المحافظ هو : $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=0$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \cos y & -x\sin y & \cos z\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(\cos z) - \frac{\partial}{\partial z}(-x\sin y)] + \hat{j}[\frac{\partial}{\partial z}(\cos y) - \frac{\partial}{\partial x}(\cos z)]$$

$$+ \hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(-x\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos y)]$$

$$= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}[-\sin y + \sin y] = 0$$

$\therefore$ المجال $\vec{F}$ هو مجال محافظ.

ملحوظة:

في علم الميكانيكا تمثل $\vec{F}$ بالقوة المؤثرة على جسيم متحرك في مجال معين جهده u وغالبا ما تكون هذه القوة من النوع المحافظ، ويمثل التكامل الخطي $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ الشغل المبذول في تحريك الجسيم في مجال القوة $\vec{F}$.

مثال: أثبت أن المجال الاتجاهي الذي تمثله القوة:

$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2 y)\hat{j}$

هو مجال محافظ وأوجد دالة الجهد (أو الجهد القياسي) لهذا المجال.ثم احسب الشغل المبذول في تحريك جسيم في هذا المجال من النقطة $(0,1)$ إلى النقطة $(1,2)$.

الحل: شرط المجال المحافظ هو: $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$ فنحسب $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ فإذا انطبق الشرط فالمجال محافظ.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + xy^2 & y^2 + x^2 y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}(2xy - 2xy) = 0$$

أي أن $\vec{F}$ تمثل مجالا محافظا.

ولإيجاد دالة الجهد u:

حيث أن $\vec{F}$ تمثل مجالا محافظا فان $\vec{F} = -\vec{\nabla} u$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$= (\vec{\nabla} u).(d\vec{r}) = -(\vec{F}).(d\vec{r})$$

$$= -\left[(x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2 y)\hat{j}\right].(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$= -\left[(x^2 + xy^2)dx + (y^2 + x^2 y)dy\right]$$

$$= -\left[x^2 dx + xy^2 dx + y^2 dy + x^2 y dy\right]$$

وبإجراء التكامل:

$$u = -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right] + c$$

$$\therefore u = -\frac{1}{3}(x^3 + y^3) - x^2y^2 + c$$

وهي دالة الجهد المطلوبة ، ولإيجاد الشغل المبذول :

$$w = \int_{(0,1)}^{(1,2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(1,2)} [(x^2 + xy^2)dx + (y^2 + x^2 y)dy]|$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right) + \left(\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2\right)\right]\Bigg|_{(0,1)}^{(1,2)}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x^3 + y^3) + x^3y^3\right]\Bigg|_{(0,1)}^{(1,2)}$$

$$= \left[\frac{1}{3}(1+8) + 4] - [\frac{1}{3}(0+1) + 0\right] = 7 - \frac{1}{3} = \frac{20}{3}$$

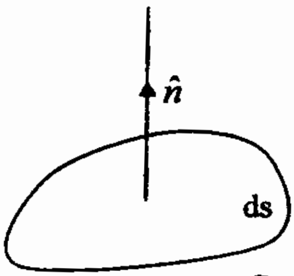
وهو المطلوب.

ثانياً: نظريات التكامل الاتجاهية:

هي نظريات تشتمل على تكاملات خطية وسطحية وحجمية لـدوال اتجاهيـة ولدينا ٣ نظريات سوف نأخذها بدون برهان، وهي:

(١) نظرية التباعد لجاوس: Gauss Divergence Theorem

تربط بين التكامل السطحي لدالة اتجاهية $\vec{F}$ والتكامل الحجمي لتباعد هذه الدالة $(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})$ وصورتها:



$$\iint_{s}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \iiint_{v}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dv$$

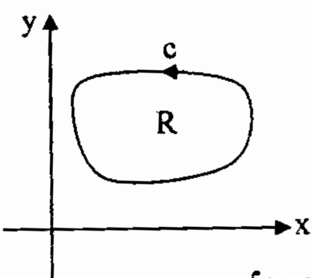
حيث: $d\vec{s} = \hat{n}ds$

(٢) نظرية الالتفاف لستوكس : Stokes Curl Theorem

تربط بين التكامل الخطي لدالة اتجاهية $\vec{F}$ والتكامل السطحي لالتفاف هذه الدالة $(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$ وصورتها:

$$\oint_{c}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{s}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot d\vec{s}$$

(٣) نظرية جرين في المستوى (Green Theorem)

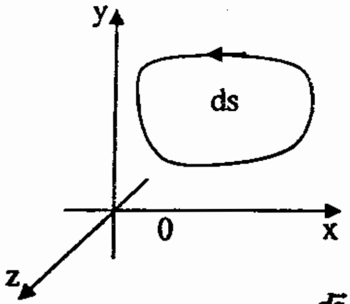


نفرض أن لدينا منطقة R يحدها المنحنى C فإذا كانت M , N دالتان متصلتان في هذه المنطقة، فان نظرية جرين في المستوى تنص على أن:

$$\oint_{c}(Mdx + Ndy) = \iint_{R}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)ds$$

مثال:

أثبت أن نظرية جرين في المستوى هي حالة خاصة من نظرية الالتفاف لستوكس:



الحل:

باعتبار المستوى (xy) فيكون العمودي عليه هو z

$\therefore$ متجه الوحدة العمودي على (xy) هو: $\hat{n}=\hat{k}$

$\therefore$أي مساحة في المستوى(xy) تكون:

$$d\vec{s}=ds\hat{k} \qquad \to (1)$$

نظرية ستوكس:

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot d\vec{s}$$

$$=\iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\hat{k}ds \qquad \to (2)$$

وباعتبار أن M, N دالتان متصلتان في المنطقة R في المستوى (xy)، بحيث أن الدالة $\vec{F}$ تكون بالصورة: $\vec{F}=M\hat{i}+N\hat{j}$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ M & N & O\end{vmatrix}=(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\hat{k}$$

أيضاً:

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\hat{k}=(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})\hat{k}\cdot\hat{k} \qquad \Big|\ \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$=(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}) \to (3)$$

وحيث أن :

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

$$\therefore \vec{F} \cdot d\vec{r} = (M\hat{i} + N\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= Mdx + Ndy \qquad \rightarrow (4)$$

بالتعويض من (٤) و(٣) في نظرية ستوكس [رقم (٢)] نحصل على:

$$\oint_c (Mdx + Ndy) = \iint (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}) ds$$

وهي نفس نظرية جرين في المستوى .

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة على نظريات التكامل الاتجاهية

(١) أمثلة محلولة على نظرية التباعد لجاوس:

مثال(١):

إذا كانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S، فاثبت أن:

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = 3V$$

حيث V هي الحجم المحدود بالسطح S ، $d\vec{s} = \hat{n}ds$

الحل:

بتطبيق نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV$$

بوضع $\vec{F} = \vec{r}$ نحصل على:

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\, dV \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

بالتعويض في (١):

$$\iint_S \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iiint_V 3\, dV = 3\iiint_V dV = 3V$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u>

إذا كانت $\hat{n}$ هي متجه الوحدة العمودي على السطح المغلق S فاثبت أن:

$$\iiint_V div\, \hat{n}\ dV = S$$

<u>الحل:</u>

من نظرية جاوس:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V div\ \vec{F}\, dV$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iiint div\ \vec{F}\, dV$$

وبأخذ $\vec{F} = \hat{n}$ نحصل على:

$$\iiint div\, \hat{n}\, dV = \iint_F \hat{n} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S dS = S \qquad \Big|\ \hat{n} \cdot \hat{n} = 1$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٣):</u>

إذا كانت $\vec{r}$ هي متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S فاثبت أن: الحجم المحصور داخل هذا السطح يعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{1}{6} \oiint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S}$$

<u>الحل:</u> من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\, dV$$

بوضع $\vec{F} = \vec{\nabla}(r^2)$ نحصل على:

$$\oiint_S \vec{\nabla}(r^2) \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(r^2)]\, dV \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن :
$$\vec{\nabla}(r^n)=\frac{\partial}{\partial r}(r^n)\hat{r}$$

حيث:
$$\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$ (مثال سابق)

$$\vec{\nabla}(r^2)=\frac{\partial}{\partial r}(r^2)\hat{r}=2r\hat{r}=2r(\frac{\vec{r}}{r})=2\vec{r}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(r^2)=\vec{\nabla}\cdot(2\vec{r})=2(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})=2(3)=6$$

بالتعويض في (١):

$$\oiint_S \vec{\nabla}(r^2)\cdot d\vec{S} = \iiint_V 6\,dV = 6V$$

$$\therefore V = \frac{1}{6}\oiint_S \vec{\nabla}(r^2)\cdot d\vec{S}$$

<u>مسألة:-</u> أثبت أن:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{r}\cdot d\vec{S}$$

<u>الحل:</u> من المثال السابق، حيث أن:

$$\vec{\nabla}(r^2)=2\vec{r}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(r^2)=6$$

فبالتعويض في (١):

$$\oiint_S (2\vec{r})\cdot dS = \iiint_V (6)\,dV = 6V$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\oiint_S \vec{r}\cdot d\vec{S}$$

وهو المطلوب.

مثال (٤):

إذا كانت $\vec{r}$ هي متجه موضع أي نقطة على السطح المغلق S المحتـوى على الحجم V فاثبت أن:

$$\oiint_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \frac{dV}{r^2}$$

الحل:

من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$ وبأخذ $\vec{F}=\frac{\vec{r}}{r^2}$

نحصل على:

$$\oiint_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V [\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^2}]dV \qquad \to (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{r}}{r^2}) = \vec{\nabla}\cdot(\frac{1}{r^2}\vec{r})$$

$$=\frac{1}{r^2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})+\vec{\nabla}(\frac{1}{r^2})\cdot\vec{r}$$

$$=\frac{1}{r^2}(3)+(\frac{-2\vec{r}}{r^4})\cdot\vec{r}$$

$$=\frac{3}{r^2}-\frac{2}{r^4}(\vec{r}\cdot\vec{r})$$

$$=\frac{3}{r^2}-\frac{2}{r^2}=\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})=\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A},\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3$$

$$\vec{\nabla}(\frac{1}{r^2})=\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r^2})\hat{r} = \frac{-2}{r^3}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{-2\vec{r}}{r^4}$$

بالتعويض في (١) ينتج المطلوب:

$$\oiint_S \frac{\vec{r}\cdot d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \frac{dV}{r^2}$$

مثال(٥):

إذا كانت $\vec{A}$ دالة اتجاهية ، ϕ دالة قياسية فاثبت أن:

$$\iiint_V [(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})]\,dV = \iint_S (\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{S}$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

وبأخذ $\vec{F}=\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi$

$$\therefore \iint_S (\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{S} = \iiint_V [\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi)]\,dV$$

$$= \iiint_V [(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi)]\,dV$$

$$= \iiint_V [(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})]\,dV \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi = 0$$

$$\therefore \iiint_V [(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})]\,dV = \iint_S (\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi)\cdot dS$$

وهو المطلوب.

[من قوانين المتجهات:

$$[\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

مثال(٦):

إذا كانت ϕ,ψ دالتان قياسيتان فاثبت أن:

$$\iint_S (\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S} = 0$$

الحل: من نظرية جاوس:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV$$

فبوضع $\vec{F}=\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi$

$$\therefore \iint_S (\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S} = \iiint_v [\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)]dV \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)=(\vec{\nabla}\psi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi-(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\psi)=0$$

وذلك لأن :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi=0 \quad , \ \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\psi=0$$

وتصبح (١):

$$\iint_S (\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S}=0$$

وهو المطلوب.

(٢) <u>أمثلة على نظرية الالتفاف لستوكس:</u>

<u>مثال(١) :</u>

أثبت أن: $\int[\phi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r}=0$

<u>الحل:</u> من نظرية ستوكس:

$$\int\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

فبأخذ $\vec{F}=\phi\,\vec{\nabla}\phi$ نحصل على:

$$\int[\phi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r} = \iint[\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{\nabla}\phi)]\cdot d\vec{S} \qquad \rightarrow (1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{\nabla}\phi)=\phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\phi)+(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\phi) = 0+0=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{A}) = \phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})+(\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{A}$$

وبالتعويض في (١):

$$\int[\phi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r}=0$$

وهو المطلوب.

مثال(٢): أثبت أن:

$$\int[\phi\vec{\nabla}\psi+\psi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r}=0$$

الحل: من نظرية ستوكس:

$$\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot d\vec{S}$$

وبأخذ $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\psi$

$$\therefore\int[\phi\vec{\nabla}\psi]\cdot d\vec{r}=\iint[\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{\nabla}\psi)]\cdot d\vec{S}\qquad\rightarrow(1)$$

ولكن:

$$\vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{\nabla}\psi)=\phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\psi)+(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)$$

$$=0+(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)$$

$$=(\vec{\nabla}\phi)\wedge(\vec{\nabla}\psi)$$

وبالتعويض في (١):

$$\therefore\int[\phi\vec{\nabla}\psi]\cdot d\vec{r}=\iint[\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi)]\cdot d\vec{S}\qquad\rightarrow(2)$$

وباستبدال ψ مكان ϕ نحصل على:

$$\int[\psi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r}=\iint[\vec{\nabla}\psi)\wedge\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{s}$$

$$=-\iint[\vec{\nabla}\phi)\wedge\vec{\nabla}\psi]\cdot d\vec{s}\qquad\rightarrow(3)$$

بجمع (٢) و(٣):

$$\int[\phi\vec{\nabla}\psi+\psi\vec{\nabla}\phi]\cdot d\vec{r}=0$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالصورة:

$$\int(\phi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{r}=-\int(\psi\vec{\nabla}\phi)\cdot d\vec{r}$$

مثال(٣):

إذا كانت ϕ دالة قياسية قابلة للتفاضل فاثبت أن:

$$\oint_C \phi\, d\vec{r} = -\iint (\vec{\nabla}\phi) \wedge d\vec{S}$$

الحل : من نظرية ستوكس:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

بوضع $\vec{F} = \vec{a}\phi$ حيث $\vec{a}$ متجه اختياري ثابت :

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = \iint [\vec{\nabla} \wedge (\vec{a}\phi)] \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint [\phi(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) + (\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{a}] \cdot d\vec{S}$$

حيث $\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = 0$ ($\vec{a}$ متجه ثابت).

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = \iint [(\vec{\nabla}\phi) \wedge \vec{a}] \cdot d\vec{S}$$

$$= -\iint [\vec{a} \wedge (\vec{\nabla}\phi)] \cdot d\vec{S} = -\iint [\vec{a}.\vec{\nabla}\phi] \wedge d\vec{S}$$

وذلك لان:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$\therefore \oint_C (\vec{a}\phi) \cdot d\vec{r} = -\iint \vec{a} \cdot \vec{\nabla}\phi \wedge d\vec{S}$$

وحيث أن $\vec{a}$ متجه ثابت واختياري

$$\vec{a} \cdot \oint_C \phi\, d\vec{r} = -\vec{a} . \iint \vec{\nabla}\phi \wedge d\vec{S}$$

(نتعامل هنا مع تكاملات اتجاهية).

$$\therefore \oint_C \phi\, d\vec{r} = -\iint \vec{\nabla}\phi \wedge d\vec{S}$$

وهو المطلوب.

(٣) أمثلة على نظرية جرين في المستوى :

مثال (١) :

باستخدام نظرية جرين في المستوى، أثبت أن مساحة المنطقة R المحدودة بالمنحنى المغلق c تعطى بالصورة:

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c}(xdy-ydx)$$

ومن ذلك أثبت أن مساحة القطع الناقص تساوي (πab) حيث a,b نصفا المحورين الأكبر والأصغر للقطع.

الحل:

من نظرية جرين في المستوى:

$$\oint_{c}(Mdx+Ndy)=\iint_{R}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)ds$$

وحيث أن M, N دالتان اختياريتان فبأخذ:

(i) $M=o$ ، $N=x$:

$$\oint_{c}xdy=\iint_{R}dS=S \qquad \rightarrow (1)$$

(ii) $M=-y$ ، $N=o$:

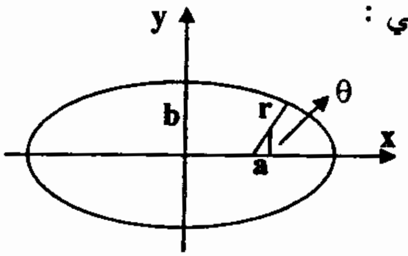
$$\oint_{c}(-y)dx=\iint_{R}dS=S \qquad \rightarrow (2)$$

بجمع (٢)، (١)

$$\oint_{c}(xdy-ydx)=2S$$

$$S=\frac{1}{2}\oint_{c}(xdy-ydx) \qquad \rightarrow (3)$$

تطبيق العلاقة (٣) لإيجاد مساحة القطع الناقص:



تستخدم المعادلات البارامترية للقطع الناقص وهي :

$$x = a\cos\theta ,\ y = b\sin\theta$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\therefore dx = -a\sin\theta\ d\theta ,\ dy = b\cos\theta\ d\theta$$

بتطبيق العلاقة (٣):

$$S = \frac{1}{2}\oint_c (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int [(a\cos\theta)(b\cos\theta\ d\theta) - (b\sin\theta)(-a\sin\theta\ d\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta]d\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}ab[2\pi] = \pi ab$$

وهو المطلوب.

حالة خاصة :

في حالة الدائرة : $a = b = r$ تكون مساحة الدائرة هي: $S = \pi r^2$

مسألة : باستخدام العلاقة (٣) والمعادلات البارامترية للدائرة ، اثبت أن مساحة الدائرة تساوي πr^2 حيث r هو نصف قطر الدائرة.

<u>مثال (٢):</u> حقق نظرية جرين في المستوى على التكامل:

$$\int_c [(2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy]$$

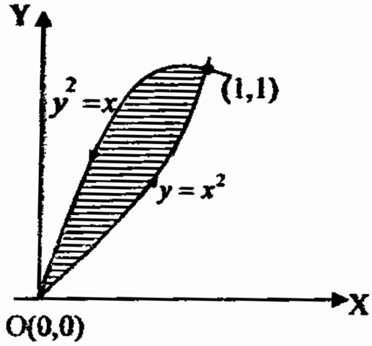
حيث c هو المنحنى المغلق للمنطقة المحصورة بين المنحيين

$$y = x^2, \quad y^2 = x$$

<u>الحل:</u>

المنحنيان $y = x^2, y^2 = x$ يتقاطعان عند النقطتين

$(0,0)$ ، $(1,1)$



<u>ولتحقيق نظرية جرين:</u>

$$\oint_c (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

فبحساب الطرف الأيسر ثم حساب الطرف الأيمن فإذا تساوى قيمتي الطرفين نكون قد حققنا نظريةجرين.

<u>حساب الطرف الأيسر:</u>

يتكون من تكاملين:

(١) <u>على المنحنى</u> $y = x^2$:

$N = x + y^2$	$M = 2xy - x^2$
$\downarrow$	$\downarrow$
$N = x + (x^2)^2 = x + x^4$	$M = 2x(x^2) - x^2 = 2x^3 - x^2$

$$\therefore I_1 = \int_0^1 [(2x^3 - x^2)dx + (x + x^4)d(x^2)]$$

$$= \int_0^1 [(2x^3 - x^2)dx + (2x^2 + 2x^5)dx]$$

$$= \int_0^1 [2x^5 + 2x^3 + x^2]dx = \frac{7}{6}$$

(٢) <u>على المنحنى</u> $y^2 = x$:

$$M = 2xy - x^2$$
$$\downarrow$$
$$M = 2(y^2)y - (y^2)^2 = 2y^3 - y^4$$

$$N = x + y^2$$
$$\downarrow$$
$$N = (y^2) + y^2 = 2y^2$$

$$\therefore I_2 = \int_1^0 [(2y^3 - y^4)d(y^2) + (2y^2)dy]$$

$$= \int_1^0 [(4y^4 - 2y^5)dy + 2y^2dy]$$

$$= \int_1^0 [-2y^5 + 4y^4 + 2y^2]dy = -\frac{17}{15}$$

ويصبح التكامل الكلي على المنحنى C :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30} \qquad \rightarrow (1)$$

<u>حساب الطرف الأيمن:</u>

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right)\right]dxdy$$

$$= \iint_R (1 - 2x)dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1} (1 - 2x)[\,y\,]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x)[\sqrt{x} - x^2]dx$$

$$= \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^3]dx = \frac{1}{30} \qquad \rightarrow (2)$$

من (٢)(١) يتضح أن: L.H.S=R.H.S.

أي أننا بذلك نكون قد حققنا نظرية جرين للتكامل المذكور.

أمثلة عامة على نظريات التكامل الاتجاهية

مثال (١): باستخدام نظرية التباعد لجاوس ، أثبت متطابقتي جرين الأولى والثانية وهما:

$$(i)\ \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\phi).(\vec{\nabla}\psi)]dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi).d\vec{S}$$

$$(ii)\ \iiint_V [\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi]dV = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi).d\vec{S}$$

الحل :

لإثبات متطابقة جرين الأولى:

من نظرية التباعد لجاوس:

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV$$

بوضع $\vec{F} = \phi\vec{\nabla}\psi$

$$\therefore \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi).d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}.(\phi\vec{\nabla}\psi)dV \qquad \rightarrow (1)$$

ولحساب $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi)$ نستخدم العلاقة الاتجاهية:

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi A) = \phi(\vec{\nabla}.\vec{A}) + \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

وبأخذ $\vec{A} = \vec{\nabla}\psi$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \phi(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\psi) + (\vec{\nabla}\psi).(\vec{\nabla}\phi)$$

$$= \phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\psi).(\vec{\nabla}\phi)$$

بالتعويض في (١):

$$\therefore \iint_S (\phi\vec{\nabla}\psi).d\vec{S} = \iiint_V [\phi\nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\phi).(\vec{\nabla}\psi)]dV$$

وهي متطابقة جرين الأولى.

إثبات متطابقة جرين الثانية:

من المتطابقة الأولى:

$$\iiint_V [\phi \nabla^2 \psi + (\vec{\nabla} \phi).(\vec{\nabla} \psi)] dV$$

$$= \iint_S (\phi \vec{\nabla} \psi).d\vec{S} \qquad \rightarrow (2)$$

وبتبديل ϕ مكان ψ نحصل على:

$$\iiint_V [\psi \nabla^2 \phi + (\vec{\nabla} \psi).(\vec{\nabla} \phi)] dV$$

$$= \iint_S (\psi \vec{\nabla} \phi).d\vec{S} \qquad \rightarrow (3)$$

من (٣) و(٢) : بالطرح:

$$\therefore \iiint_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV$$

$$= \iint_S [\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi].d\vec{S}$$

وهي متطابقة جرين الثانية.

مثال (٢): باستخدام نظرية التباعد لجاوس، احسب التكامل السطحي

$$\iint_S \vec{F}.d\vec{S}$$

حيث: $\vec{F} = 4xz\,\hat{i} - y^2\,\hat{j} + yz\,\hat{k}$

S هو سطح المكعب المحدود بالمستويات:

$x = 0, \quad x = 1$

$y = 0, \quad y = 1$

$z = 0, \quad z = 1$

الحل:

سبق حل هذا المثال كتكامل سطحي عادي والآن نطبق نظرية التباعد لجاوس لحل هذا المثال كالأتي:

$$\iint_S \vec{F}\,.d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})dV \qquad \rightarrow (1)$$

لحساب الطرف الأيمن:

$$\vec{F} = 4xz\,\hat{i} - y^2\,\hat{j} + yz\,\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$

$$= 4z - 2y + y = 4z - y \qquad \rightarrow (2)$$

وباعتبار الحجم: $dV = dx\ dy\ dz$ حيث:

$x : 0 \rightarrow 1$

$y : 0 \rightarrow 1$

$z : 0 \rightarrow 1$

وبالتعويض من (٢) في (١) نحصل على:

$$\iint \vec{F}.d\vec{S} = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(4z - y)dxdydz$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}[2z^2 - yz]_0^1 dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}[2 - y]dxdy = \int_{x=0}^{1}[2y - \frac{1}{2}y^2]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1[\frac{3}{2}]dx = \frac{3}{2}[x]_0^1 = \frac{3}{2}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٣):</u> باستخدام نظرية الالتفاف لستوكس احسب التكامـــل $\iint\limits_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}).d\vec{S}$

للدالة الاتجاهية :

$$\vec{F} = (y - z + 2)\hat{i}(yz + 4)\hat{j} - xz\hat{k}$$

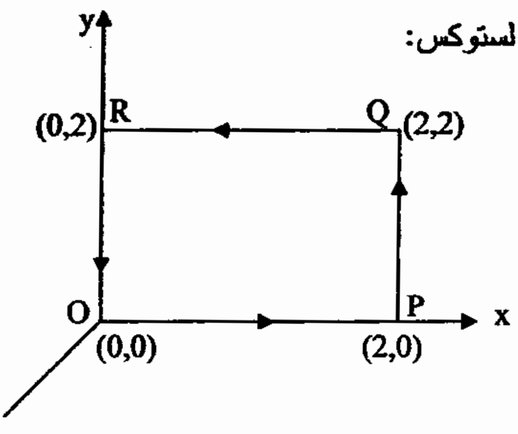
حيث S هو سطح المكعب

$$x = y = z = 0 \quad , \quad x = y = z = 2$$

فوق المستوى xy.

<u>الحل :</u>

من نظرية الالتفاف لستوكس:



$$\oint\limits_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint\limits_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}).d\vec{S} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث C (في المسألة)هي حدود السطح S ويمثل بالمربع المحدود بالمستقيمات:

$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$y = 0 \quad , \quad y = 2$$

في المستوى xy حيث (z =0)

$$\therefore \oint\limits_C \vec{F}.d\vec{r} = \int\limits_{OP} \vec{F}.d\vec{r} + \int\limits_{PQ} \vec{F}.d\vec{r} + \int\limits_{QR} \vec{F}.d\vec{r} + \int\limits_{RO} \vec{F}.d\vec{r}$$

ولحساب تلك التكاملات الأربعة:

(١) على الخط OP:

$$y = 0 \quad , \quad x : 0 \to 2$$

$$dy = 0 \quad , \quad dz = 0 \quad [y = 0, z = 0]$$

$$\vec{F} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\int_{OP} \vec{F} . d\vec{r} = \int (2\hat{i} + 4\hat{j}).(dx\,\hat{i}) = 2\int_0^2 dx = 4$$

(٢) على الخط : PQ :

$$x = 2 \quad , \quad y : 0 \to 2$$

$$dx = 0 \quad , \quad dz = 0$$

$$\vec{F} = (y + 2)\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$[x = 2 , z = 0]$$

$$\therefore \int_{PQ} \vec{F} . d\vec{r} = \int [(y + 2)\hat{i} + 4\hat{j}].(dy\,\hat{j}) = 4\int_0^2 dy = 8$$

(٣) على الخط QR:

$$y = 2 \quad , \quad x : 2 \to 0$$

$$dy = 0 \quad , \quad dz = 0$$

$$\vec{F} = 4\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$[y = 2, z = 0]$$

$$\therefore \int_{QR} \vec{F} . d\vec{r} = \int (4\hat{i} + 4\hat{j}).(dx\,\hat{i}) = 4\int_2^0 dx = -8$$

(٤)على الخط RO:

$x=0 \quad , \quad y:2\to 0$

$dx=0 \quad , \quad dz=0$

$\vec{F}=(y+2)\hat{i}+4\hat{j}$

$[x=0\;, z=0]$

$$\therefore \int_{RO}\vec{F}.d\vec{r}=\int[(y+2)\hat{i}+4\hat{j}).(dy\hat{j})=4\int_{2}^{0}dy=-8$$

ويصبح التكامل الخطي على المنحنى C هو:

$$\oint_{C}\vec{F}\,.d\vec{r}\;=\;4+8-8-8\;=\;-4$$

$$\therefore \iint(\vec{\nabla}\wedge\vec{F}).d\vec{S}\;=\;-4$$

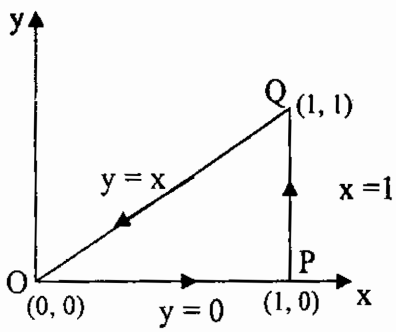
وهو المطلوب.

مثال (٤): احسب التكامل الخطي:

$$\oint_{C}[(xy-x^2)dx+x^2ydy]$$

حيث C هو المنحنى المحدود بالمستقيمات $y=x$, $x=1$, $y=0$

[أو هو المثلث الذي رؤوسه هي (1.1) ,(1, 0) ,(0, 0)] ، ومن ثم حقق نظرية جرين في المستوى.



الحل:

التكامل الخطي على $\oint_{C}(F):C$

يتكون من ٣ تكاملات هي :

(١) تكامل على OP:

$$y = 0 \quad , \quad x : 0 \to 1$$

$$dy = 0 \quad , \quad (F) = (-x^2)dx$$

$$I_1 = \int_0^1 (-x^2)dx = -\frac{1}{3}$$

(٢) تكامل على PQ :

$$x = 1 \quad , \quad y : 0 \to 1$$

$$dx = 0 \quad , \quad (F) = ydy$$

$$I_2 = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$$

(٣) تكامل على QO:

$$y = x \quad , \quad y = 1 \to 0$$

$$(F) = (y^2 - y^2)dy + y^3dy = y^3dy$$

$$\therefore I_3 = \int_1^0 y^3 dy = -\frac{1}{4}$$

ويصبح التكامل الخطي الكلي على C هو:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}$$

وهو المطلوب الأول.

ولتحقيق نظرية جرين:

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_S (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dxdy$$

حيث: $M = xy - x^2, \quad N = x^2 y, \quad dS = dxdy$

الطرف الأيسر: تم حسابه في الجزء الأول من المسألة وقيمته $= -\frac{1}{12}$

الطرف الأيمن:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x$$

$$R.H.S. = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} (2xy - x)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^2)dx = -\frac{1}{12} = L.H.S$$

وبهذا نكون قد حققنا نظرية جرين في المستوى للتكامل المذكور.

مثال (٥) :

حقق نظرية جرين في المستوى على التكامل الخطي :

$$\oint_c \left[(xy+y^2)dx + x^2dy\right]$$

حيث c هو المنحنى المغلق للمنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ في الإتجاه الموجب للمنحنى c .

الحـل:

المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ يتقاطعان عند النقطتين : (1,1) ، (0,0) .

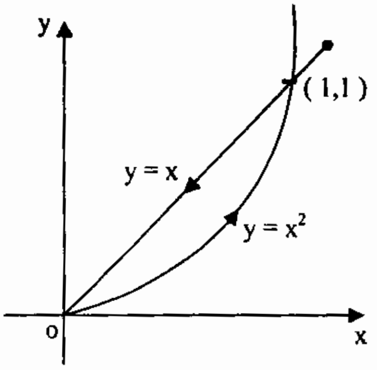
ولحساب التكامل الخطي:

يتكون هذا التكامل من تكاملين :

(i) تكامل على المنحنى $y = x^2$:

$$I_1 = \int_0^1 (x \cdot x^2 + x^4)\,dx + \int_0^1 x^2 \cdot (2x)dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 + x^4)\,dx = \frac{19}{20}$$



(ii) تكامل على المستقيم y = x من (1,1) إلى (0,0) :

$$I_2 = \int_1^0 (x^2 + x^2)\,dx + \int_1^0 x^2\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx = -1$$

ويكون التكامل الخطي المطلوب :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

حساب التكامل السطحي :

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy + y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_S (x - 2y)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (xy - y^2)\Big|_{x^2}^{x}\,dx = -\frac{1}{20} \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

من (٢) ، (١) نجد أن نظرية جرين في المستوى تكون متحققة علـــى التكامــل المذكور .

مثال (٦) : بإستخدام نظرية التباعد لجاوس ، أثبت أن :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\; dV = \iint_S \left(\hat{n} \wedge \vec{A}\right) dS$$

حيث $\vec{A}$ دالة إتجاهية ، $\hat{n}$ متجه الوحدة العمودي على السطح S .

الحـــل :

من نظرية جاوس :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\; dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\; dS$$

وبوضع $\vec{F} = \vec{A} \wedge \vec{a}$ حيث $\vec{a}$ متجه ثابت إختياري .

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{a}\right) dV = \iint_S \left(\vec{A} \wedge \vec{a}\right) \cdot \hat{n}\, dS \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

ولكن :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{a}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)$$

$$\therefore \left(\vec{A} \wedge \vec{a}\right) \cdot \hat{n} = \vec{A} \cdot \left(\vec{a} \wedge \hat{n}\right) = \left(\vec{a} \wedge \hat{n}\right) \cdot \vec{A} = \vec{a} \cdot \left(\hat{n} \wedge \vec{A}\right)$$

وتصبح (١) بالصورة :

$$\iiint_V \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) dV = \iint_S \vec{a} \cdot \left(\hat{n} \wedge \vec{A}\right) dS$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \iiint_V \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) dV = \vec{a} \cdot \iint_S \left(\hat{n} \wedge \vec{A}\right) dS \qquad \_\_\_\_\_ (2)$$

وحيث أن $\vec{a}$ متجه ثابت إختياري ، فمن (٢) نجد أن :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\, dV = \iint_S \left(\hat{n} \wedge \vec{A}\right) dS$$

وهو المطلوب .

<u>ملاحظة :</u> بملاحظة نظرية جاوس وصورتها :

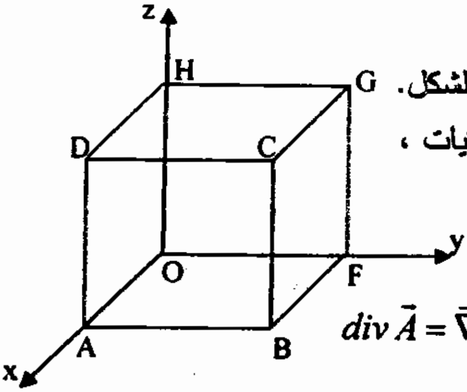
$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S \left(\hat{n} \cdot \vec{F}\right) dS$$

ومن المثال (٦) حصلنا على العلاقة المناظرة مع أستخدام علامة الضرب الإتجاهي ($\wedge$) بدلاً من علامة الضرب القياسي (•) وصورتها :

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) dV = \iint_S \left(\hat{n} \wedge \vec{F}\right) dS$$

<u>مثال (٧) :</u>

حقق نظرية جاوس للمتجه : $\vec{A} = x^2\,\hat{i} + y^2\,\hat{j} + z^2\,\hat{k}$ مأخوذاً على المكعب $0 \le x, y, z \le 1$.



الحـــل :

نعتبر المكعب (ABCDOFGH) المبين بالشكل.

نأخذ الأحرف Ox,Oy,Oz كمحاور للاحداثيات ، حيث O نقطة الأصل

$$\vec{A} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)$$

$$= 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$$

وتتغير قيم x,y,z من $0 \to 1$ وبذلك نحصل على التكامل الحجمي :

$$\iiint div\,\vec{A}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1\left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 dx\,dy = 2\int_0^1\int_0^1\left[x + y + \frac{1}{2}\right]dx\,dy$$

$$= 2\int_0^1\left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y\right]_0^1 dx = 2\int_0^1\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^1 (x+1)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 3 \qquad \text{\_\_\_\_\_}(1)$$

وبالنسبة للتكامل السطحي فإنه يتكون من ٦ تكاملات على أسطح المكعب الست ، وقد سبق إيجاده في مثال سابق ، وقيمته هي :

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = 3 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ومن (٢) ، (١) نجد أن :

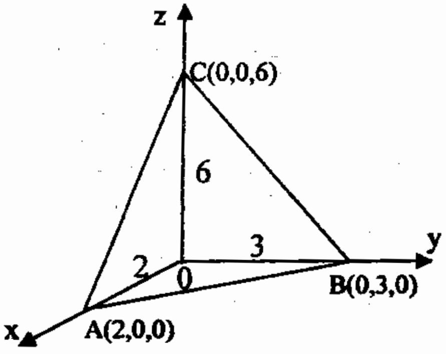
$$\iiint_V div\,\vec{A}\cdot dV = \iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

وهو المطلوب .

مثال (٨) : حقق نظرية ستوكس للمتجه : $\vec{A}=(x+y\ ,\ 2x-z\ \ ,\ y+z)$

المأخوذ على المثلث ABC المقطوع من المستوى : $3x+2y+z=6$

بواسطة مستويات الإحداثيات .



الحـــل :

معادلة المستوى المعطي :

$$3x+2y+z=6$$

بالقسمة على ٦ :

$$\therefore \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1 \qquad \_\_\_\_(1)$$

من (١) نجد أن المستوى المعطي يتقاطع مع المحاور ونقط تقاطعه على التوالي هي : 2,3,6 .

فالنقطة A : $x=2 \quad , \quad y=z=0 \longrightarrow A(2,0,0)$

ولنقطة B : $y=3 \quad , \quad z=x=0 \longrightarrow B(0,3,0)$

ولنقطة C : $z=6 \quad , \quad x=y=0 \longrightarrow C(0,0,6)$

الصورة الإتجاهية للمتجه المعطي :

$$\vec{A}=(x+y)\hat{i}+(2x-z)\hat{j}+(y+z)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & 2x-z & y+z \end{vmatrix}=2\hat{i}+\hat{k} \qquad \_\_\_\_(2)$$

ولتحقيق نظرية ستوكس :

$$\int_{ABC} \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_{S}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

<u>نوجد أولاً : التكامل الخطي</u> $\int_{ABC}\vec{A}\cdot d\vec{l}$

$$\int_{ABC}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{A}^{B}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_{B}^{C}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_{C}^{A}\vec{A}\cdot d\vec{l} = I_1 + I_2 + I_3 \;\_\_\_\_(4)$$

<u>للضلع AB :</u>

$\vec{A} = (x+y)\hat{i} + 2x\hat{j} + y\hat{k} \leftarrow 3x+2y=6$: وبذلك فإن $z=0$

$$\therefore I_1 = \int_{A}^{B}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{A}^{B}\left[(x+y)\hat{i}+2x\hat{j}+y\hat{k}\right]\cdot\left(dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}\right)$$

$$= \int_{A}^{B}\left[(x+y)dx + 2x\,dy\right] = \int_{A}^{B}\left[x+\frac{6-3x}{2}\right]dx + \int_{A}^{B}2x\left(\frac{-3}{2}dx\right)$$

$$= \int_{2}^{0}\left(3-\frac{7}{2}x\right)dx = \left[3x-\frac{7x^2}{4}\right]_2^0 = 1 \qquad \_\_\_\_\_\_(5)$$

<u>للضلع BC :</u>

$\vec{A} = y\hat{i} - z\hat{j} + (y+z)\hat{k} \leftarrow 2y+z=6$: وبذلك فإن $x=0$

$$\therefore I_2 = \int_{B}^{C}\vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_{B}^{C}\left[y\,\hat{i}-z\,\hat{j}+(y+z)\hat{k}\right]\cdot\left(dy\,\hat{i}+dz\,\hat{k}\right)$$

$$= \int_{B}^{C}\left[-dy+(y+z)dz\right] = -\int_{3}^{0}(6-2y)dy + \int_{3}^{0}(6-y)(-2dy)$$

$$= \int_0^3 [6-2y+2(6-y)]dy = \int_0^3 (18-4y)\,dy$$

$$= \left[18y-2y^2\right]_0^3 = 36 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (6)$$

<u>للضلع CA</u> :

$$\vec{A} = x\hat{i} + (2x-z)\hat{j} + z\hat{k} \leftarrow 3x+z=6 \;:\; \text{وبذلك فإن} \quad y=0$$

$$\therefore I_3 = \int_C^A \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_C^A \left[x\,\hat{i} + (2x-z)\,\hat{j} + z\,\hat{k}\right]\cdot\left(dx\,\hat{i} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$= \int_C^A [x\,dx + z\,dz] = \int_0^2 x\,dx + \int_6^0 z\,dz$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{z^2}{2}\right]_6^0 = 2-18 = -16 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (7)$$

بالتعويض في (٤) :

$$I = 1+36-16 = 21 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (8)$$

<u>ولإيجاد التكامل السطحي</u> :

$$\iint_S \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS = I_1 + I_2 + I_3 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (9)$$

حيث :

$$I_1 = \iint_{OAB}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS \;,\; I_2 = \iint_{BOC}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS \;,\; I_3 = \iint_{CAO}\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)\cdot\hat{n}\,dS$$

وباستخدام (٢) $\leftarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$

والآن : <u>للوجه OAB</u> :

$$dS = \frac{1}{2}\,dx\,dy \;, \quad \hat{n} = \hat{k}$$

$$I_1 = \iint_{OAB} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iint \left(2\hat{i} + \hat{k}\right) \cdot \hat{k}\left(\frac{1}{2}\, dx\, dy\right)$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{3} \frac{1}{2}\, dx\, dy = \frac{1}{2}[x]_0^2 [y]_0^3 = 3$$

<u>للوجه BOC</u> : $\quad dS = \frac{1}{2} dy\, dz \;,\;\; \hat{n} = \hat{i}$

$$I_2 = \iint_{BOC} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iint \left(2\hat{i} + \hat{k}\right) \cdot \hat{i}\left(\frac{1}{2}\, dy\, dz\right)$$

$$= \int_{y=0}^{3} \int_{z=0}^{6} dy\, dz = [y]_0^3 [z]_0^6 = 18$$

<u>للوجه CAO</u> : $\quad dS = \frac{1}{2} dz\, dx \;,\;\; \hat{n} = \hat{j}$

$$I_3 = \iint_{CAO} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iint \left(2\hat{i} + \hat{k}\right) \cdot \hat{j}\left(\frac{1}{2}\, dz\, dx\right) = 0$$

وبالتعويض في (٩) :

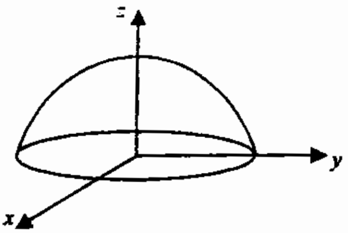
$$\therefore \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = 3 + 18 + 0 = 21 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(10)$$

من (١٠) ، (٨) نجد أن :

$$\int_c \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \hat{n}\, dS = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

وهي نظرية ستوكس ، وهو المطلوب .

<u>مثال(٩)</u>: حقق نظرية ستوكس $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\, dS$ للمتجه $\vec{F} = (2x - y)\hat{j} - yz^2\hat{j} - y^2 z\hat{k}$ حيث S هو النصف العلوي لسطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (فوق المستوى xy) ، C هو المنحنى الذي يحدها.



الحل: نظرية ستوكس: $\int_c \bar{r}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\hat{n}\,dS$

(١) التكامل الخطي: في المستوى $z=0$ فإن الحد c للسطح S هو الدائرة $x^2+y^2=1$ (مسقط النصف العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ على المستوى xy هو الدائرة $x^2+y^2=1$)

فبوضع: $x=\cos\theta\,,\ y=\sin\theta\,,\ z=0$ ، $dx=-\sin\theta\,d\theta$ ، حيث $0\le\theta\le 2\pi$ وذلك من المعادلات البارامترية للمنحنى c (الدائرة $x^2+y^2=1$)، فيكون التكامل الخطي:

$$\therefore \int_c \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_c [(2x-y)\hat{i}]\cdot[dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}] = \int_c (2x-y)dx$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}[2\cos\theta-\sin\theta](-\sin\theta\,d\theta)] = \int_0^{2\pi}[-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}[-2\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)]d\theta = [\cos^2\theta+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta]\Big|_0^{2\pi} = \pi \quad (1)$$

(٢) التكامل السطحي:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -4z^2 & -y^2 z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2 z)-\frac{\partial}{\partial z}(-yz^2)+\hat{j}[\frac{\partial}{\partial z}(2x-y)-\frac{\partial}{\partial x}(-y^2 z)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2x-y)] = (0)\hat{i}+(0)\hat{j}+\hat{k} = \hat{k}$$

ويصبح التكامل السطحي: $\iint_S (\bar{\nabla}\wedge\bar{F})\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S \hat{k}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_S ds = \iint_R dx\,dy$

وذلك لأن: $\hat{k}\cdot\hat{n}=1\ ,\ ds=dx\,dy$

R هي مسقط السطح S على المستوى (xy) وهي عبارة عن مساحة دائرة نصف قطرها 1 ومركزها نقطة الأصل، حيث:

x تتغير من $x=-1$ إلى $x=+1$،

y تتغير من $y=-\sqrt{1-x^2}$ إلى $y=+\sqrt{1-x^2}$

وبالتحول إلى الإحداثيات القطبية فإن:

$$\therefore\ \iint_R dx\,dy = \int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = 2\pi\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \pi \qquad \_\_\_(2)$$

من (2) ,(1) يتضح أن: $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\bar{\nabla}\wedge\bar{F})\cdot\bar{n}\,ds$

وهو ما يحقق نظرية ستوكس. وهو المطلوب.

مثال(١٠): حقق نظرية التباعد لجاوس للمتجه $\bar{F}=4x\hat{i}-2y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ المأخوذ على سطح الإسطوانة المحدودة بالمستويات

$x^2+y^2=4\ ,\ z=0\ ,\ z=3$

الحل: نظرية التباعد لجاوس $\iiint_V (\nabla\cdot\bar{F})\,dV = \iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,ds$

أولاً: التكامل الحجمي:

$$I_1 = \iiint_V (\bar{\nabla}\cdot\bar{F})\,dV = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x)+\frac{\partial}{\partial y}(-2y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right]dV$$

$$= \iiint_V [4-4y+2z]\,dV = \iiint [4-4y+2z]\,dx\,dy\,dz$$

ولكن x تتغير من $x=-2$ إلى $x=2$ (بوضع $y=0$ في $x^2+y^2=4$)

y تتغير من $y=-\sqrt{4-x^2}$ إلى $y=\sqrt{4-x^2}$

z تتغير من $z=0$ إلى $z=3$

فيكون التكامل الحجمي:

$$\therefore I_1=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^3(4-4y+2z)\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4z-4yz+z^2)\Big|_{z=0}^{z=3}dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(21-12y)\,dx\,dy$$

التكامل على $dx\,dy$ (بعد إجراء التكامل على z) يكون علـــى دائـــرة (قاعـــدة الاسطوانة) نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

وباستخدام الإحداثيات القطبية حيث:

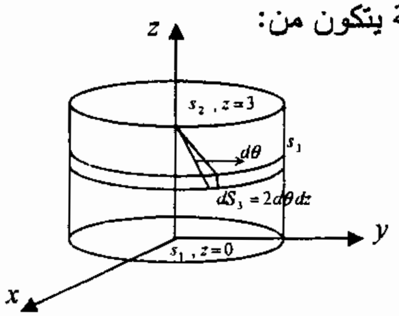
$$dx\,dy=r\,dr\,d\theta \text{ ، } x=r\cos\theta\,,\,y=\sin\theta$$

$$\therefore I_1=\int_0^2\int_0^{\pi}(21-12r\sin\theta)(r\,dr\,d\theta)$$

$$=\int_0^2(21r\theta+12r^2\cos\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}dr$$

$$=\int_0^2(42\pi r)\,dr=21\pi r^2\Big|_0^2=84\pi \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

<u>ثانياً</u>: <u>التكامل السطحي</u>: السطح S للاسطوانة يتكون من:



القاعدة S_1 (حيث $z=0$)

القمة S_2 (حيث $z=3$)

الجزء المنحنى (السطح الجانبي) S_3

(حيث $x^2+y^2=4$)

$$I_2 = \iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_1 + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_2 + \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_3$$

على القاعدة S_1: حيث $z=0$، فإن:

$$\hat{n} = -\hat{k}\ ,\ \vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j}\ ,\ \vec{F}\cdot\hat{n} = 0$$

$$\therefore \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_1 = 0$$

على القمة S_2: حيث

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = 9\ ،\hat{n} = \hat{k}\,,\,\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + 9\hat{k}\ ،z = 3$$

$$\therefore \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_2 = 9\iint_{S_2} dS_2 = 9(4\pi) = 36\pi$$

وذلك لأن المساحة: $S_2 = 4\pi$

ولإيجاد التكامل على S_3 (السطح الجانب للاسطوانة):

معادلة السطح: $x^2 + y^2 = 4$ ومتجه الوحدة العمودي على هذا السطح هو:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{\left|\vec{\nabla}\phi\right|} = \frac{2x\hat{i} + 2y\hat{j}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{n} = (4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k})\cdot(\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{2}) = 2x^2 - y^3$$

ويصبح التكامل على هذا السطح:

$$\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \iint_{S_3} (2x^2 - y^3)\,dS_3$$

المعادلات البارامترية للسطح الجانبي هي:

$$x = 2\cos\theta\ ,\ y = 2\sin\theta$$

وعنصر السطح في الإحداثيات الاسطوانية هو:

$$dS_3 = r\,d\theta\,dz = 2\,d\theta\,dz$$

$$\therefore \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS_3 = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3}[2(2\cos\theta)^2-(2\sin\theta)^3]\cdot(2\,dz\,d\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{3}[16\cos^2\theta-16\sin^3\theta]\,dz\,d\theta$$

$$= 3\int_{\theta=0}^{2\pi}[16\cos^2\theta-16\sin^3\theta]\,d\theta$$

$$= 48\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta-48\int_{0}^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta$$

$$= 48\int_{\theta=0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = 48(\pi) = 48\pi$$

(حيث $\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\pi$, $\int_{0}^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta=0$)

$$\therefore I_2 = \iint_{S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = 0+36\pi+48\pi = 84\pi \qquad \_\_\_(2)$$

ومن (2) ,(1) نجد أن

$$\iiint_{V}(div\,\vec{F})\,dV = \iint_{S}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dS$$

وهو ما يحقق نظرية التباعد لجاوس. وهو المطلوب

مسائل على الباب الثالث

أولا: تكامل الدوال القياسية والاتجاهية:

١. أوجد قيمة التكامل القياسي $\int_C y\,ds$ على طول المنحنى C المعطى بالمعادلة الكرتيزية $y = 2\sqrt{x}$ من x =3 إلى x = 12 .

٢. احسب التكامل الخطي القياسي $\int_C \vec{F}\,.d\vec{r}$ للمجال لاتجاهي $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ على المنحنى الذي معادلته $y = x^2$ من (0, 0) إلى (1, 1)

٣. احسب التكامل الخطي $\int_C \vec{F}\,.d\,\vec{r}$ للمجال الاتجاهي $\vec{F} = x^2 y\hat{i} + (x^2 + y)\,\hat{j}$ من نقطة الأصل إلى النقطة(2,4) على طول منحنى القطع المكافئ $y = x^2$.

٤. احسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي $\vec{F} = x^2\hat{i} + y\hat{j}$ على طول المنحنى الذي هو عبارة عن النصف العلوي لدائرة نصف قطرها ٢ ومركزها عند نقطة الأصل.

٥. احسب التكامل الخطي للمجال الاتجاهي:

$$\vec{F} = \alpha[-3a\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{i} + a(2\sin\theta - 3\sin^3\theta)\,\hat{j} + b\sin 2\theta\,\hat{k}]$$

على المنحنى c الذي معادلاته البارامترية هي:

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta$$

حيث θ تتغير من $\frac{\pi}{4}$ إلى $\frac{\pi}{2}$ و $\alpha\,, a\,, b$ ثوابت

٦. احسب التكامل الحجمي الاتجاهي $\iiint_V \vec{F} dV$ للدالة الاتجاهية

$\vec{F} = 2xz\hat{i} - x\hat{j} + y^2\hat{k}$ حيث V هو حجم المنطقة المحدودة بالاسطوانة المكافئية (Parabolic cylinder) $z=4-x^2$ والمستويات

$z=0\ ,\ x=0\ ,\ y=0\ ,\ y=6$.

ثانيا: نظريات التكامل الاتجاهية:

٧. (أ) إذا كان S سطح مغلق يحتوي على الحجم V وكانت :

$$\vec{F} = \alpha x i + \beta y j + \gamma z \hat{k}$$

فاستخدم نظرية جاوس لإثبات أن:

$$\iint \vec{F}.d\vec{S} = (\alpha + \beta + \gamma)V$$

(ب) باستخدام نظرية جاوس، اثبت أن:

$$\iint_S (\phi A).d\vec{S} = \iiint_V [\phi(\vec{\nabla}.\vec{A}) + \vec{A}.(\vec{\nabla}\phi)]\,dV$$

٨. (أ) باستخدام نظرية ستوكس، اثبت أن:

$$(i)\ \int \vec{r}.d\vec{r} = 0$$

$$(ii)\ \int \vec{r} \wedge d\vec{r} = 2\iint d\vec{S}$$

(ب) باستخدام نظرية ستوكس ، اثبت أن:

$$\oint_C \vec{A} \wedge d\vec{r} = -\iint_S (d\vec{S} \wedge \vec{\nabla}) \wedge \vec{A}$$

٩. (أ) باستخدام نظرية جرين في المستوى ، أحسب التكامل :

$$\int_C [(x^2 - y)\,dx + x\,dy]$$

حيث المنحنى c يمثل بالدائرة : $x^2 + y^2 = 4$

(ب) باستخدام نظرية جرين في المستوى ، أحسب التكامل:-

$$\int_C [(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dx+(x+y)^{\frac{3}{2}}dy]$$

حيث المنحنى c يمثل بالدائرة $x^2+y^2=1$

١٠. باستخدام نظرية جرين في المستوى، أثبت أن قيمة التكامل:

$$I=\oint_C [(4+e^{\cos x})dx+(\sin\ y+3x^2)dy]$$

هي $2(b^3-a^3)$، حيث C هي حدود المنطقة المحصورة بين ربعي دائرتين أنصاف أقطارها a,b والقطع المستقيمة على محوري x,y .

ملحوظة:

الحلول الكاملة لهذه المسائل ملحقة بنهاية القسم الأول [تحليل المتجهات].