الباب الثاني

حساب التفاضل للدوال الاتجاهية

الدالة الاتجاهية:

هي دالة تسلك سلوك المتجهات ، وتعتمد على متغير قياسي t وتكتب بالصورة $\vec{F} = \vec{F}(t)$ ، مثل الدالة: $\vec{F}(t) = (\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j}$.

وتنطبق على تلك الدالة جميع القوانين التي درسناها في جبر المتجهات.

مثال (١):

إذا كانت:

$$\vec{F}(t) = t\hat{i} + \cos t\hat{k}$$
$$\vec{G}(t) = \sin t\hat{i} + \ln t\hat{j} + t^2\hat{k}$$

دالتان اتجاهيتان ، فاوجد:

$$(1)\vec{F}(t) + \vec{G}(t)$$
$$(2)\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$$
$$(3)\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t)$$

الحل:

$$\vec{F}(t) + \vec{G}(t) = (t + \sin t)\hat{i} + \ln t\hat{j} + (t^2 + \cos t)\hat{k}$$
$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = (t)(\sin t) + (0)(\ln t) + (\cos t)(t^2) \ = t(\sin t + t\cos t)$$
$$\vec{F}(t) \wedge \vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \vec{k} \\ t & o & \cos t \\ \sin t & \ln t & t^2 \end{vmatrix}$$
$$= -(\cos t)(\ln t)\hat{i} - (t^3 - \cos t \sin t)\hat{j} + (t\ln t)\hat{k}$$

مثال(٢): أثبت أن الدالتين الاتجاهيتين:

$$\vec{F}(t) = a(\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j})\,,\vec{G}(t) = b(\sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j})$$

حيث a,b ثابتان ، متعامدتان لجميع قيم t في الفترة $[\,o\,, 2\,\pi\,]$.

الحل:

شرط التعامد أن يكون حاصل الضرب القياسي مساويا للصفر أي أن:

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = 0$$

في المسألة:

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = ab(\cos t\sin t - \sin t\cos t) = 0$$

لجميع قيم t في الفترة المعطاة وهو المطلوب.

مشتقة الدوال الاتجاهية:

(١) إذا كانت $\vec{F}(t)$ دالة اتجاهية للمتغير القياسي t في الفترة [a,b] فإن مشتقة $\vec{F}\,(t)$ تعرف كالآتي:

$$\vec{F}'(t) = \frac{d\vec{F}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{F}(t+\Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$$

(٢) إذا كانت:

$$\vec{F}\,(t) = f_1(t)\hat{i} + f_2(t)\hat{j} + f_3(t)\hat{k}$$

حيث: f_1, f_2, f_3 هي مركبات $\vec{F}(t)$ ، فإن $\vec{F}\,(t)$ تكون قابلة للتفاضل في الفترة [a,b]، أي يكون لها مشتقة تفاضلية في تلك الفترة إذا كانت مركباتها أيضا قابلة للتفاضل في نفس الفترة ، وبحيث أن:

$$\vec{F}'(t) = f_1'(t)\hat{i} + f_2'(t)\hat{j} + f_3'(t)\hat{k}$$

(٣) تطبق قوانين المشتقات العادية على الدوال الاتجاهية مـــع مراعـــاة الترتيـــب، فمثلا:

$$(i) \quad [\vec{F} + \vec{G}]' = \vec{F}' + \vec{G}'$$

$$(ii) \quad [\vec{F} \cdot \vec{G}]' = \vec{F} \cdot \vec{G}' + \vec{F}' \cdot \vec{G}$$

$$(iii) \quad [\vec{F} \wedge \vec{G}]' = \vec{F} \wedge \vec{G}' + \vec{F}' \wedge \vec{G}$$

$$(iV) \quad [\vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}]' = \vec{F}' \cdot \vec{G} \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G}' \wedge \vec{H} + \vec{F} \cdot \vec{G} \wedge \vec{H}'$$

$$(V) \quad [\vec{F} \wedge \vec{G} \wedge \vec{H}]' = \vec{F}' \wedge (\vec{G} \wedge \vec{H}) + \vec{F} \wedge (\vec{G}' \wedge \vec{H}) + \vec{F} \wedge (\vec{G} \wedge \vec{H}')$$

أمثلة محلولة:

مثال (١) : اذا كانت $\vec{G}(t)$ و $\vec{F}(t)$ دالتان اتجاهيتان في المتغير القياسي t ، فاثبت أن:

$$[\vec{F} \wedge \vec{G}' - \vec{F}' \wedge \vec{G}]' = \vec{F} \wedge \vec{G}'' - \vec{F}'' \wedge \vec{G}$$

حيث :

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{F}'' = \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}, \ldots\ldots\ldots$$

الحل:

$$\begin{aligned}[\vec{F} \wedge \vec{G}' - \vec{F}' \wedge \vec{G}]' &= [\vec{F} \wedge \vec{G}']' - [\vec{F}' \wedge \vec{G}]' \\ &= [\vec{F} \wedge \vec{G}'' + \vec{F}' \wedge \vec{G}'] - [\vec{F}' \wedge \vec{G}' + \vec{F}'' \wedge \vec{G}] \\ &= \vec{F} \wedge \vec{G}'' - \vec{F}'' \wedge \vec{G}\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كانت $\vec{F}(t)$ دالة اتجاهية ، وكان:

$$\vec{F}' = \frac{d\vec{F}}{dt}, \vec{F}'' = \frac{d^2\vec{F}}{dt^2}, \vec{F}''' = \frac{d^3\vec{F}}{dt^3}$$

فاثبت أن:

$$[\vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'']' = \vec{F} \cdot \vec{F}' \wedge \vec{F}'''$$

الحل:

بتطبيق قانون مشتقة حاصل الضرب الثلاثي القياسي للدوال الثلاثة $\vec{F},\vec{F}',\vec{F}''$

[القانون رقم iV]

$$[\vec{F}\cdot\vec{G}\wedge\vec{H}]'=\vec{F}'\cdot\vec{G}\wedge\vec{H}+\vec{F}\cdot\vec{G}'\wedge\vec{H}+\vec{F}\cdot\vec{G}\wedge\vec{H}'$$

$$\therefore[\vec{F}\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}'']'=\vec{F}'\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}''+\vec{F}\cdot\vec{F}''\wedge\vec{F}''+\vec{F}\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}'''$$

ولكن:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}\wedge\vec{B}=0\rightarrow\vec{F}'\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}''=0$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{B}=0\rightarrow\vec{F}\cdot\vec{F}''\wedge\vec{F}''=0$$
$$\therefore[\vec{F}\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}'']'=\vec{F}\cdot\vec{F}'\wedge\vec{F}'''$$

وهو المطلوب .

المجالات القياسية والاتجاهية:

(١) يقال أن الدالة القياسية $\phi(x,y,z)$ تشكل مجالا قياسيا، إذا كان لكل نقطة في الفراغ يوجد عدد قياسي وحيد عبارة عن قيمة الدالة ϕ عند هذه النقطة.

$\therefore$ المجال القياسي يمكن وصفه بالدالة القياسية ϕ .

(٢) يقال أن الدالة الاتجاهية $\vec{F}(x,y,z)$ تشكل مجالا اتجاهيا، إذا كان لكل نقطة في الفراغ يوجد متجة وحيد عبارة عن المتجه $\vec{F}$ عند هذه النقطة.

$\therefore$ المجال الاتجاهي يمكن وصفه بالدالة الاتجاهية $\vec{F}$.

(٣) تطبق القوانين الخاصة بالدوال الاتجاهية على المجالات الاتجاهية الموصوفة بتلك الدوال.

المشتقات الجزئية للمجالات القياسية والاتجاهية:

إذا كانت: $\vec{F}(x,y,z)$ و $\phi(x,y,z)$ تشكل مجالين قياسي واتجاهي، يعتمدان على أكثر من متغير، فانه يكون لدينا المشتقات الجزئية الآتية:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots \quad , \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2}, \ldots\ldots\ldots, \quad \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y}, \ldots\ldots\ldots$$

حيث:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}]$$

وفي حالة المجالات التي تصفها دوال متصلة فان:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y \partial x}$$

وتخضع هذه المشتقات لقوانين التفاضل الجزئي المعروفة:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}+\vec{G}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}\cdot\vec{G}) = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\cdot\vec{G}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}\wedge\vec{G}) = \vec{F}\wedge\frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\wedge\vec{G}, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

تفاضلة دالة اتجاهية:

إذا كانت $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ دالة اتجاهية تصف مجالا اتجاهيا، فإن تفاضلة $\vec{F}$ تعرف بالعلاقة:

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}dz$$

وبدلالة المركبات: إذا كانت:

$$\vec{F} = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k} = (f_1, f_2, f_3)$$

حيث:

$$f_1 = f_1(x, y.z)$$

$$f_2 = f_2(x, y, z)$$

$$f_3 = f_3(x, y, z)$$

فإن:

$$d\vec{F} = df_1\hat{i} + df_2\hat{j} + df_3\hat{k}$$

حيث:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

أمثلة محلولة:

مثال (١): إذا كانت:

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2yz\,\hat{i} - 2xz^3\,\hat{j} + xz^2\,\hat{k}$$

$$\vec{G}(x, y, z) = 2z\hat{i} + y\hat{j} - x^2\hat{k}$$

دالتان تصفان مجالين اتجاهين، فأوجد:

$$\frac{\partial^2(\vec{F} \wedge \vec{G})}{\partial x\,\partial y}$$

عند النقطة (1, 0, -2).

الحل:

$$\vec{F}\wedge\vec{G}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x^2yz & -2xz^3 & xz^2\\ 2z & y & -x^2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(2x^3z^3-xyz^2)-\hat{j}(-x^4yz-2xz^3)+\hat{k}(x^2y^2z+4xz^4)\ \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial^2(\vec{F}\wedge\vec{G})}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial(\vec{F}\wedge\vec{G})}{\partial y}]$$

ومن (١):

$$\frac{\partial(\vec{F}\wedge\vec{G})}{\partial y}=\hat{i}(-xz^2)+\hat{j}(x^4z)+\hat{k}(2x^2yz)$$

$$\frac{\partial^2(\vec{F}\wedge\vec{G})}{\partial x\partial y}=-z^2\hat{i}+4x^3z\hat{j}+4xyz\,\hat{k}$$

وعند النقطة (1, 0, -2):

$$\frac{\partial^2(\vec{F}\wedge\vec{G})}{\partial x\partial y}=-4\hat{i}-8\hat{j}=-4(\hat{i}+2\hat{j})$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): إذا كانت: $\phi=\phi(x,y,z)=xy^2z$ دالة قياسية تـصف مجـالا قياسـيا

وكانت: $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=xz\hat{i}-xy^2\hat{j}+yz^2\hat{k}$

دالة اتجاهية تصف مجالا اتجاهيا فأوجد: $\frac{\partial^3(\phi\vec{F})}{\partial x^2\partial z}$ عند النقطة (2,-1,1) .

الحل: حاصل الضرب $(\phi\vec{F})$ عبارة عن دالة اتجاهية صورتها:

$$\phi\vec{F}=(xy^2z)(xz\hat{i}-xy^2\hat{j}+yz^2\hat{k})$$

$$=x^2y^2z^2\hat{i}-x^2y^4z\hat{j}+xy^3z^3\hat{k}\qquad\rightarrow (1)$$

المطلوب:

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2(\phi\vec{F})}{\partial x \partial z}\right]$$

$$\frac{\partial^2(\phi\vec{F})}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(\phi\vec{F})}{\partial z}\right]$$

ومن (١):

$$\frac{\partial(\phi\vec{F})}{\partial z} = 2x^2y^2z\hat{i} - x^2y^4\hat{j} + 3xy^3z^2\hat{k}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x:

$$\frac{\partial^2(\phi\vec{F})}{\partial x \partial z} = 4xy^2z\hat{i} - 2xy^4\hat{j} + 3y^3z^2\hat{k}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x مرة ثانية:

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = 4y^2z\hat{i} - 2y^4\hat{j} = 2y^2(2z\hat{i} - y^2\hat{j})$$

وعند النقطة (2, -1, 1):

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{F})}{\partial x^2 \partial z} = 2(2\hat{i} - \hat{j})$$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

إذا كانت الدالة الاتجاهية $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ تصف مجالا اتجاهيا، وكانت x, y, z تعتمد على t فاثبت أن:

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

حيث : $\frac{d\vec{F}}{dt}$ المشتقة الكلية، $\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}$ المشتقة الجزئية للدالة $\vec{F}$ بالنسبة إلى t وتحدد الاعتماد الصريح للدالة $\vec{F}$ على t .

الحــل : نفرض أن:

$$\vec{F} = f_1(x,y,z,t)\hat{i} + f_2(x,y,z,t)\hat{j} + f_3(x,y,z,t)\hat{k}$$

$$\therefore d\vec{F} = df_1\,\hat{i} + df_2\,\hat{j} + df_3\,\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz + \frac{\partial f_1}{\partial t}dt\right)\hat{i}$$

$$+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz + \frac{\partial f_2}{\partial t}dt\right)\hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz + \frac{\partial f_3}{\partial t}dt\right)\hat{k}$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial t}\hat{k}\right)dt$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\hat{k}\right)dx$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\hat{k}\right)dy$$

$$+ \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\hat{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\hat{k}\right)dz$$

$$= \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}dz$$

بقسمة الطرفين على dt:

$$\therefore \frac{d\vec{F}}{dt} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\frac{dy}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \to (1)$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة: بأخذ: $\frac{d\vec{F}}{dt} = \dot{\vec{F}}, \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \ldots\ldots\ldots; \frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}_t\ ,\ \frac{d\vec{F}}{dx} = \vec{F}_x, \ldots\ldots$ فإن (١)

تأخذ الصورة: $\dot{\vec{F}} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}\dot{z} = \vec{F}_t + \vec{F}_x\dot{x} + \vec{F}_y\dot{y} + \vec{F}_z\dot{z}$

خواص المجالات القياسية

الخاصية الأولى:

المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي (Directional Derivative)

هي كمية قياسية تعرف كالآتي:

المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي ϕ عند النقطة $P(x, y, z)$ في اتجاه تزايد المتجه $\vec{a}$ هي:

$$D_a\phi = l\frac{\partial\phi}{\partial x} + m\frac{\partial\phi}{\partial y} + n\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

حيث l, m, n هي مركبات متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{a}$ أي أن:

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

مثال:

إذا كانت الدالة $\phi(x, y) = x^3 y^2$ تشكل مجالا قياسيا، فأوجد المشتقة الاتجاهية لـ ϕ عند النقطة $P(-1, 2)$ في اتجاه تزايد المتجه:

$$\hat{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$$

الحل:

حيث أن الدالة $\phi = \phi(x, y)$ ، ففي المستوى (x, y) تكون المشتقة الاتجاهية لـ ϕ هي:

$$D_a\phi = l\frac{\partial\phi}{\partial x} + m\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad \to (1)$$

حيث l, m هما مركبتا متجه الوحدة $\hat{a}$ في اتجاه المتجه $\vec{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4\hat{i} - 3\hat{j}}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j} = l\hat{i} + m\hat{j}$$

$$\therefore l = \frac{4}{5}, \qquad m = -\frac{3}{5}$$

أيضا:

$$\phi = x^3 y^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 y^2 , \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^3 y$$

بالتعويض في (١):

$$D_a\phi = \frac{4}{5}(3x^2y^2) - \frac{3}{5}(2x^3y) = \frac{12}{5}x^2y^2 - \frac{6}{5}x^3y$$

عند النقطة P(-1, 2):

$$D_a\phi = \frac{12}{5}(4) - \frac{6}{5}(-2) = \frac{12}{5}(4+1) = 12$$

وهو المطلوب. ويلاحظ أن المشتقه الاتجاهيه $D_a\phi$ لدالة قياسية هي كميه قياسية (عدديه).

الخاصية الثانية:

تدرج المجال القياسي:

يعرف تدرج (gradient) المجال القياسي ϕ بالعلاقة الآتية:

$$grad\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

وهو كمية اتجاهية.

المؤثر التفاضلي الاتجاهي نابلا ($\vec{\nabla}$):

يعرف هذا المؤثر بالعلاقة الآتية:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$grad\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\phi = \vec{\nabla}\phi$$

يلاحظ أن المتجه $\bar{\nabla}$ ليس كمية مضروبة في ϕ ولكنه مؤثر اتجـــاهي يـــؤثر على ϕ .

$$\therefore \ grad \ \phi = \bar{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \phi \text{ تدرج}$$

أمثلة محلولة:

مثال(١): إذا كانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ فأوجد تدرج $|\vec{r}|$.

الحـــل: المطلوب هو : $grad|\vec{r}| = \vec{\nabla}|\vec{r}| = \vec{\nabla}(r)$.

حيث : $r = |\vec{r}| = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \vec{\nabla}(r) = \vec{\nabla}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)\right]$$

$$+ \hat{j}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2y)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2z)\right]$$

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right] = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$$

حيث $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ هو متجه الوحدة في إتجاه $\vec{r}$. وهو المطلوب .

مثال (٢): إذا كانت $\phi=\phi(r)$ فاثبت أن : $\vec{\nabla}\phi=\frac{d\phi}{dr}\hat{r}$

الحــل :

من المعلوم أنه إذا كانت $\phi=\phi(x,y,z)$ فإن:

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}$$

وكحالة خاصة : إذا كانت ϕ دالة في x فقط أي $\phi=\phi(x)$

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i}=\frac{d\phi}{dx}\hat{i}$$

وإذا كانت ϕدالة في r فقط أي $\phi=\phi(r)$ فإن :

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r}=\frac{d\phi}{dr}\hat{r}$$

وهو المطلوب .

وكأمثلة على تطبيق هذه العلاقة :

$$\text{(i)}\ \phi=\frac{1}{r}\rightarrow\vec{\nabla}\phi=\frac{d\phi}{dr}\hat{r}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r}=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\hat{r}=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\therefore\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{(ii)}\ \phi=\ln r\rightarrow\vec{\nabla}\phi=\frac{d\phi}{dr}\hat{r}=\frac{d}{dr}(\ln r)\hat{r}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)\hat{r}=\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{\vec{r}}{r^2}\qquad\therefore\vec{\nabla}(\ln r)=\frac{\vec{r}}{r^2}$$

مثال (٣) : إذا كانت $\vec{a}$ متجه ثابت فأثبت أن :

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$$

حيث : $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\ ,\ \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

الحـل :

$$\vec{a}\cdot\vec{r}=\phi=\left(a_1\,\hat{i}+a_2\,\hat{j}+a_3\,\hat{k}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)$$
$$=a_1x+a_2y+a_3z \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ومن تعريف $\vec{\nabla}\phi$:

$$\vec{\nabla}\phi=\hat{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}+\bar{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ولكن : من (١) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(a_1x)=a_1 \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(a_2y)=a_2$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(a_3z)=a_3$$

بالتعويض في (٢) :

$$\therefore\ \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\hat{i}\,a_1+\hat{j}\,a_2+\hat{k}\,a_3=\vec{a}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

إذا كان :

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k} \quad , \quad \vec{a}=\alpha\,x\hat{i}+\beta\,y\,\hat{j}+\gamma\,z\,\hat{k}$$

حيث : α,β,γ ثوابت ، فأثبت أن : $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=2\vec{a}$

الحـل :

نوجد أولاً : $\vec{a}\cdot\vec{r}=\phi$

$$\phi=\left(\alpha\,x\hat{i}+\beta\,y\,\hat{j}+\gamma\,z\,\hat{k}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\,\hat{j}+z\,\hat{k}\right)$$
$$=\alpha\,x^2+\beta\,y^2+\gamma\,z^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

ومن تعريف $\vec{\nabla}\phi$:

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

ولكن من (١) :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2\alpha\, x\,, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2\beta\, y\,, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2\gamma z$$

بالتعويض في (٢) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r}) &= 2\alpha\, x\hat{i} + 2\beta\, y\,\hat{j} + 2\gamma\, z\,\hat{k} \\ &= 2\left(\alpha\, x\hat{i} + \beta\, y\,\hat{j} + \gamma\, z\,\hat{k}\right) = 2\vec{a}\end{aligned}$$

وهو المطلوب .

مثال(٥):

أثبت أن:

$$(i) \quad grad(\frac{1}{r}) = \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$(ii) \quad grad(\ln r) = \vec{\nabla}(\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

حيث:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

الحــل:

$$(i) \quad \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = \vec{\nabla}(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + y^2}}) = \vec{\nabla}[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}]$$

ومن تعريف $\vec{\nabla}\phi$ حيث:

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\vec{\nabla}\,\phi = \vec{\nabla}\,(\frac{1}{r}) = \hat{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial z} + \hat{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \hat{i}[\frac{-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}(2x)] + \hat{j}[\frac{-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}(2y)]$$

$$+ \hat{k}[\frac{-1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}(2z)]$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}[x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}] = -\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

حيث :

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow r^3 = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

<u>ملحوظة</u>: إذا كان $\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$ هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{r}$

$$\therefore \vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = (\frac{-1}{r^2})\hat{r} = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$ [مثال (٢)]

$$\vec{\nabla}\,(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r})\,\hat{r} \;\rightarrow\; \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\,\hat{r}$$

$$(ii)\vec{\nabla}(\ln r) = \vec{\nabla}[\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}\vec{\nabla}[\ln(x^2+y^2+z^2)]$$

ومن تعريف $\vec{\nabla}\phi$ ← حيث $\phi = \ln(x^2+y^2+z^2)$

$$\therefore \vec{\nabla}(\ln r) = \frac{1}{2}[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2+z^2)$$

$$+ \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}[\ln(x^2+y^2+z^2) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\ln(x^2+y^2+z^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[\hat{i}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x)+\hat{j}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2y)+\hat{k}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2z)]$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\hat{i}+y\vec{j}+z\hat{k}) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

حيث :

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad r^2 = (x^2+y^2+z^2)$$

ملحوظة: بدلالة متجه الوحدة $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\therefore \vec{\nabla}(\ln r) = \frac{\hat{r}}{r} = (\frac{1}{r})\hat{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\ln r)\hat{r} \quad \Big| \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r}$$

مثال (٦):

أثبت أن العلاقة بين المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي $(D_a\phi)$ والتدرج $(\vec{\nabla}\phi)$ هي:

$$D_a\phi = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{a}$$

الحل:

المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي ϕ في اتجاه تزايد المتجه $\vec{a}$ هي:

$$D_a\phi = l\frac{\partial\phi}{\partial x} + m\frac{\partial\phi}{\partial y} + n\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث l,m,n هي مركبات متجه الوحدة $\hat{a}$ في اتجاه $\vec{a}$

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \qquad \rightarrow (2)$$

أيضا: تدرج ϕ هو:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \qquad \rightarrow (3)$$

من (٢) و(٣):

$$(\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{a}=\frac{\partial\phi}{\partial x}l+\frac{\partial\phi}{\partial y}m+\frac{\partial\phi}{\partial z}n \qquad \rightarrow(4)$$

بمقارنة (١) و(٤):

$$D_a\phi=(\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{a}$$

وهو المطلوب.

مثال (٧): إذا كانت f, g تشكلان مجالين قياسيين، فاثبت أن :

$$(i)\quad \vec{\nabla}(f+g)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g$$

$$(ii)\quad \vec{\nabla}(fg)=f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f$$

$$(iii)\quad \vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\vec{\nabla}f-f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

الحل: من تعريف التدرج:

$$(i)\quad \vec{\nabla}(f+g)=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(f+g)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(f+g)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(f+g)$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\left(\hat{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g$$

$$(ii)\quad \vec{\nabla}(fg)=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(fg)+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(fg)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(fg)$$

$$=\hat{i}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\hat{j}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\hat{k}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$=f\left(\hat{i}\frac{\partial g}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial g}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right)+g\left(\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)=f\vec{\nabla}g+g\vec{\nabla}f$$

$$(iii)\quad \vec{\nabla}(\frac{f}{g}) = \hat{i}\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f}{g}) + \hat{j}\,\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f}{g}) + \hat{k}\,\frac{\partial}{\partial z}(\frac{f}{g})$$

$$= \hat{i}\,(\frac{g\,\frac{\partial f}{\partial x} - f\,\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}) + \hat{j}(\frac{g\,\frac{\partial f}{\partial y} - f\,\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}) + \hat{k}(\frac{g\,\frac{\partial f}{\partial z} - f\,\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2})$$

$$= \frac{1}{g^2}[g(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}) - f(\frac{\partial g}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k})]$$

$$= \frac{1}{g^2}[g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g] = \frac{g\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}g}{g^2}$$

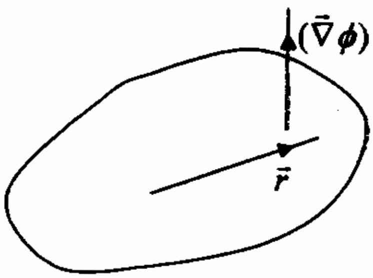
وهو المطلوب.

نظريات التدرج

نظرية (١): المتجه $(\bar{\nabla})\phi$ يكون عموديا على السطح الذي معادلته

$\phi(x, y, z) = const$.

البرهان:



نفرض أن: $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

هو متجه موضع أي نقطة

على السطح $\phi = const$.

$$\therefore\ d\bar{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k} \quad \rightarrow (1)$$

هو عنصر طول يقع في المستوى المماس للسطح

ومن معادلة السطح: $\phi = const$

$$\therefore d\phi = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \quad \rightarrow (2)$$

ولكن:

$$\bar{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad \rightarrow (3)$$

من (٣) و(١):

$$(\bar{\nabla}\phi)\cdot(d\bar{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \quad \rightarrow (4)$$

من (٤) و(٢) نجد أن:

$$(\bar{\nabla}\phi)\cdot(d\bar{r}) = 0$$

وهذا يعني أن المتجه $(\bar{\nabla}\phi)$ يكون عموديا على $(d\bar{r})$ وبالتالي علـــى الــسطح وهو المطلوب.

مثال:

أوجد متجه الوحدة العمودي على السطح الذي معادلته: $x^2 y + 2xz = 4$ عند النقطة $P(2, -2, 3)$.

الحل:

معادلة السطح:

$$\phi(x, y.z) = x^2 y + 2xz = 4$$

العمودي على هذا السطح هو المتجه: ($\vec{\nabla}\phi$) (نظرية ١)

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}(2xy + 2z) + \hat{j}(x^2) + \hat{k}(2x)$$

وعند النقطة $(2, -2, 3)$ P فإن:

$$(\vec{\nabla}\phi)_p = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

وهو يمثل المتجه العمودي على السطح عند النقطة P ويكون متجه الوحدة العمودي على السطح عند P هو:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} = \frac{-2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{-1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

نظرية (٢): (بدون برهان)

إذا كانت ϕ تشكل مجالا قياسيا قابلا للاشتقاق فإن:

(i) - أكبر قيمة للمشتقة الاتجاهية (أو أكبر معدل زيادة للمجال ϕ) تكون في اتجاه $\vec{\nabla}\phi$.

(ii) –القيمة العظمى (أكبر قيمة) للمشتقة الاتجاهية هي $|\vec{\nabla}\phi|$.

مثال: أوجد المشتقة الاتجاهية للمجال القياسي:

$\phi(x,y,z) = x^2yz + 4xz^2$ عند النقطة p (1, -2, -1) في اتجاه تزايد المتجه $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ ، ثم أوجد الاتجاه الذي تكون فيه هذه المشتقة أكبر ما يمكن (أي الاتجاه الذي تتزايد فيه ϕ بمعدل أكبر) وكذلك مقدار هذه القيمة الكبرى (العظمى).

الحل : لإيجاد المشتقة الاتجاهية :

من التعريف:

$$D_a\phi = (\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{a} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\phi = x^2yz + 4xz^2 \quad , \quad \vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\,\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\,(2xyz + 4z^2) + \hat{j}(x^2z) + \hat{k}(x^2y + 8xz)$$

وعند النقطة p(1, -2 , -1)

$$(\vec{\nabla}\phi)_p = 8\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k} \qquad \rightarrow (2)$$

أيضا:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{1}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k} \qquad \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (2) ,(3) في (١):

$$D_a\phi = (8)(\frac{2}{3}) + (-1)(\frac{-1}{3}) + (-10)(\frac{-2}{3})$$
$$= \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3} = 12.33$$

<u>ومن نظرية (٢):</u>

الاتجاه الذي تكون فيه $D_a\phi$ أكبرما يمكن أي الاتجاه الذي تتزايد فيه ϕ بمعدل أكبر هو اتجاه المتجه ($\vec{\nabla}\phi$) أي الاتجاه $\vec{\nabla}\phi = 8\hat{i} - \hat{j} - 10\hat{k}$ ومقدار أكبر معدل للتزايد يكون:

$$\left|\vec{\nabla}\phi\right| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 10^2} = \sqrt{165} == 1284$$

وهو المطلوب.

خواص المجالات الاتجاهية :

عند تأثير المؤثر الاتجاهي $\vec{\nabla}$ على دالة اتجاهية $\vec{A}$ تمثل مجالا اتجاهيا معينا، فإننا نحصل على الحالتين الآتيتين:-

$\vec{\nabla}$ تؤثر قياسيا على $\vec{A}$

$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$

حيث $(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$ تشكل مجالا قياسيا

يسمى تباعد $\vec{A}$ (Divergence)

ويكتب:

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$
$$\therefore\ div \equiv \vec{\nabla} \cdot$$

$\vec{\nabla}$ تؤثر اتجاهيا على $\vec{A}$

$(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$

حيث $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ تشكل مجالاً أتجاهيا

يسمى التفاف $\vec{A}$ (Curling)

ويكتب:

$$Curl\ \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$
$$Curl \equiv \vec{\nabla} \wedge$$

أولا:- تباعد (Divergence) المجال الاتجاهي :

يعرف التباعد للمجال الاتجاهي $\vec{A}$ بالعلاقة:

$$div\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z)$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ويخضع التباعد للعلاقات الآتية:

(i) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$

$[div(\vec{A} + \vec{B}) = div\vec{A} + div\vec{B}]$

$$(ii)\quad \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})=\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$
$$[div(\phi\vec{A})=\phi div\vec{A}+\vec{A}\cdot grad\phi]$$

يلاحظ أن:

ϕ دالة قياسية ، $grad\,\phi=\vec{\nabla}\phi$ دالة اتجاهية.

$\vec{A}$ دالة اتجاهية ، $div\,\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ دالة قياسية.

برهان العلاقة(i) :

من تعريف التباعد:

$$\begin{aligned}
div\,(\vec{A}+\vec{B}) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B})\\
&=\frac{\partial}{\partial x}(A_x+B_x)+\frac{\partial}{\partial y}(A_y+B_y)+\frac{\partial}{\partial z}(A_z+B_z)\\
&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\\
&=(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})+(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z})\\
&=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{\nabla}\cdot\vec{B}
\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

برهان العلاقة(ii) :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot(\phi\,\vec{A}) &=\frac{\partial}{\partial x}(\phi\,A_X)+\frac{\partial}{\partial y}(\phi\,A_y)+\frac{\partial}{\partial_z}(\phi\,A_Z)\\
&=\phi\frac{\partial A_x}{\partial x}+A_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\phi\frac{\partial A_y}{\partial y}+A_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\phi\frac{\partial A_z}{\partial z}+A_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\\
&=\phi(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})+(A_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial\phi}{\partial z})
\end{aligned}$$

ولكن:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$A_x\frac{\partial \phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial \phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial \phi}{\partial z}=\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})=\phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$

وهو المطلوب .

<u>أمثلة محلولة :</u>

<u>مثال (١) :</u>

أوجد $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ للدوال الإتجاهية الآتية :

$$(i)\quad \vec{A}=x^2z\,\hat{i}-2y^3z^2\,\hat{j}+xy^2z\,\hat{k}$$

$$(ii)\quad \vec{A}=x\cos z\,\hat{i}+y\ln x\,\hat{k}-z^3\,\hat{k}$$

<u>الحـل :</u>

$$(i)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-2y^3z^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2z\right)$$

$$=2xz-6y^2z^2+xy^2$$

$$(ii)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos z\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\ln x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-z^3\right)$$

$$=\cos z+\ln x-3z^2$$

مثال (٢):

(أ) إذا كانت $\vec{A} = \vec{A}\dfrac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y}$ فأثبت أن : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \dfrac{1}{x+y}$

(ب) إذا كانت $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ وكانت

$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$ فأوجد تفاضله $\vec{A}$ بالصورة :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt + \left(\vec{\nabla} \cdot d\vec{r}\right)\vec{A}$$

الحـل :

الجزء الأول (أ) :

$$\vec{A} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x+y} = \frac{x}{x+y}\hat{i} + \frac{y}{x+y}\hat{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x+y}\right)$$

$$= \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} + \frac{(x+y)-y}{(x+y)^2} = \frac{x+y}{(x+y)^2} = \frac{1}{x+y}$$

الجزء الثاني (ب) :

حيث أن : $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t)$ فتكون تفاضلة $\vec{A}$:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt$$

$$= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)\vec{A} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

ولكن:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right) = \vec{\nabla} \cdot d\vec{r}$$

بالتعويض في (١) نحصل على :

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt + \left(\vec{\nabla} \cdot d\vec{r}\right)\vec{A}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣) :</u> أثبت أن:

$$\vec{\nabla} \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3}) = 0$$

حيث :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \ , \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

<u>الحل:</u>

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

ومن تعريف التباعد:

$$\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{\partial}{\partial x}[x(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}] + \frac{\partial}{\partial y}[y(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[z(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}]$$

$$= x \cdot (\frac{-3}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot (2x) + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$+ y \cdot (\frac{-3}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot (2y) + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$+ z \cdot (\frac{-3}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot (2z) + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$= -3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$-3y^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$-3z^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$= -3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$
$$= -3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}} = 0$$
$$\therefore \ \vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3}) = 0$$

وهو المطلوب.

ثانيا: التفاف المجال الاتجاهي:

يعرف التفاف (curl) المجال الاتجاهي $\vec{A}$ بالعلاقة:

$$curl\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \hat{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \hat{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$
$$= \hat{i}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})_x + \hat{j}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})_y + \hat{k}(\vec{\nabla}\wedge\hat{A})_z$$

ملحوظة : يعرف الالتفاف أحياناً بالدوران (rotation) ويرمز له $rot\,\vec{A}$.

$$\therefore rot\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

ويخضع الالتفاف للعلاقات الآتية:

$$(i)\quad \vec{\nabla}\wedge(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} + \vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$
$$[curl\ (\vec{A}+\vec{B}) = curl\ \vec{A} + curl\ \vec{B}\,]$$

$$(ii)\quad \vec{\nabla}\wedge(\phi\vec{A})=\phi(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})-\vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\phi)$$

$$[curl(\phi\vec{A})=\phi curl\vec{A}-\vec{A}\wedge grad\phi]$$

إثبات (i): من تعريف الالتفاف:

$$curl\,(\vec{A}+\vec{B})=\vec{\nabla}\wedge(\vec{A}+\vec{B})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x+B_x & A_y+B_y & A_z+B_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(A_z+B_z)-\frac{\partial}{\partial z}(A_y+B_y)]$$

$$-\hat{j}[\frac{\partial}{\partial x}(A_z+B_z)-\frac{\partial}{\partial z}(A_x+B_x)]+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(A_y+B_y)-\frac{\partial}{\partial y}(A_x+B_x)]$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial B_y}{\partial z}]-\hat{j}[\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial B_x}{\partial z}]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial B_x}{\partial y}]$$

$$=\hat{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\hat{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\hat{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$+\hat{i}(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z})+\hat{j}(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x})+\hat{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y})=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}+\vec{\nabla}\wedge\vec{B}$$

إثبات (ii):

$$\vec{\nabla}\wedge(\phi\,\vec{A})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \phi\,A_x & \phi\,A_y & \phi\,A_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\,[\frac{\partial}{\partial y}(\phi\,A_z)-\frac{\partial}{\partial z}(\phi\,A_y)]+\hat{j}\,[\frac{\partial}{\partial z}(\phi\,A_x)-\frac{\partial}{\partial x}(\phi\,A_z)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_y)-\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_x)]=\hat{i}[\phi\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}A_z-\phi\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial \phi}{\partial z}A_y]$$

$$+\hat{j}[\phi\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial \phi}{\partial z}A_x-\phi\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial \phi}{\partial x}A_z]$$

$$+\hat{k}[\phi\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}A_y-\phi\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial \phi}{\partial y}A_x]$$

$$=\phi[\hat{i}(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})+\hat{j}(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})+\hat{k}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})$$

$$-[\hat{i}(A_y\frac{\partial \phi}{\partial z}-A_z\frac{\partial \phi}{\partial y})+\hat{j}(A_z\frac{\partial \phi}{\partial x}-A_x\frac{\partial \phi}{\partial z})+\hat{k}(A_x\frac{\partial \phi}{\partial y}-A_y\frac{\partial \phi}{\partial x})$$

$$=\phi\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)-\vec{A}\wedge\left(\vec{\nabla}\phi\right)$$

وهو المطلوب .

أمثلة محلولة :

مثال (١) : إذا كان $\vec{A}(x,y,z)=x\cos z\,\hat{i}+y\ln x\,\hat{j}-z^2\hat{k}$ فأوجد $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$.

الحـل :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x\cos z & y\ln x & -z^2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(-z^2)-\frac{\partial}{\partial z}(y\ln x)]+\hat{j}[\frac{\partial}{\partial z}(x\cos z)-\frac{\partial}{\partial x}(-z^2)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(y\ln x)-\frac{\partial}{\partial y}(x\cos z)]$$

$$=\hat{i}[0-0]+\hat{j}[-x\sin z-0]+\hat{k}[\frac{y}{x}-0]=-x\sin z\,\hat{j}+\frac{y}{x}\hat{k}$$

وهو المطلوب .

مثال (٢) :

إذا كان $\vec{A}=\dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}}{x+y}$ فأثبت أن: $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\dfrac{x-y}{(x+y)^2}\hat{k}$.

الحـل :

نكتب $\vec{A}$ في الصورة الإتجاهية الآتية :

$$\vec{A}=\left(\frac{x}{x+y}\right)\hat{i}+\left(\frac{y}{x+y}\right)\hat{j}+(0)\hat{k}$$

ومن تعريف $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$:

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{x+y} & \dfrac{y}{x+y} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{y}{x+y})]+\hat{j}[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{x}{x+y})-\frac{\partial}{\partial x}(0)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x+y})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{x+y})]$$

$$=\hat{i}(0)+\hat{j}(0)+\hat{k}[\frac{-y}{(x+y)^2}+\frac{x}{(x+y)^2}]=\frac{x-y}{(x+y)^2}\hat{k}$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) :

إذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت ، فأثبت أن : $\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{r})=2\vec{a}$

حيث : $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

الحــل :

$$\vec{a}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=\hat{i}(a_2z-a_3y)+\hat{j}(a_3x-a_1z)+\hat{k}(a_1y-a_2x)$$

ثم نوجد إلتفاف (curl) هذا المتجه :

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{r})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_2z-a_3y & a_3x-a_1z & a_1y-a_2x\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(a_1y-a_2x)-\frac{\partial}{\partial z}(a_3x-a_1z)]$$

$$+\hat{i}[\frac{\partial}{\partial z}(a_2z-a_3y)-\frac{\partial}{\partial x}(a_1y-a_2x)]$$

$$+\hat{k}[\frac{\partial}{\partial x}(a_3x-a_1z)-\frac{\partial}{\partial y}(a_2z-a_3y)]$$

$$=\hat{i}[a_1+a_1]+\hat{j}[a_2+a_2]+\hat{k}[a_3+a_3]$$

$$=2a_1\hat{i}+2a_2\hat{j}+2a_3\hat{k}=2(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})=2\vec{a}$$

وهو المطلوب .

مثال (٤) :

إذا كان: $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

فأثبت أن: $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}=3 \quad , \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{r}=0$

الحــل :

$$(i)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{r}=\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=1+1+1=3$$

$$(ii)\ \vec{\nabla}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\hat{i}(0-0)+\hat{j}(0-0)+\hat{k}(0-0)=0$$

وهو المطلوب .

مثال (٥) : إذا كانت:

$$\vec{A} = y\hat{i} + z\hat{j} + x\hat{k}$$

$$\vec{B} = x^2z\hat{i} + y^2x\hat{j} + z^2y\hat{k}$$

دالتان اتجاهيتان فأوجد:

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

الحل:

نوجد $(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$ ثم $(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$ ثم نضربهما اتجاهيا.

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}=\hat{i}(0-1)-\hat{j}(1-0)+\hat{k}(0-1)$$

$$=-\hat{i}-\hat{j}-\hat{k} \qquad \to (1)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2z & y^2x & z^2y\end{vmatrix}=\hat{i}(z^2-0)-\hat{j}(0-x^2)+\hat{k}(y^2-0)$$

$$=z^2i+x^2j+y^2k \qquad \to (2)$$

بضرب (١) في (٢) اتجاهياً:

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & -1 & -1\\ z^2 & x^2 & y^2\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(-y^2+x^2)-\hat{j}(-y^2+z^2)+\hat{k}(-x^2+z^2)$$

$$=\hat{i}(x^2-y^2)+\hat{j}(y^2-z^2)+\hat{k}(z^2-x^2)$$

وهو المطلوب.

<u>المجال اللولبي والمجال اللادوراني:</u>

المجال اللولبي (Solenoidal)	المجال اللادوراني (Irrotational)
$div\ \vec{A}\ =\ 0$	$curl\ \vec{A}\ =\ 0$

<u>مثال:</u>

أوجد الثوابت a, b, c التي تجعل المجال الآتي مجالا لادورانياً:

$$\vec{A}=(x+2y+az)\hat{i}+(bx-3y-z)\hat{j}+(4x+cy+2z)\hat{k}$$

<u>الحل:</u>

يكون المجال $\vec{A}$ لا دورانيا إذا كان: $curl\ \vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=0$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\quad \hat{i}(c+1)+\hat{j}(a-4)+\hat{k}(b-2)=0$$

وحيث أن $\hat{i}$ ، $\hat{j}$ ، $\hat{k}$ منجهات غير متوازية، فان هذه العلاقة تتحقق بشرط أن:

$$c + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad c = -1$$

$$a - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

$$b - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad b = 2$$

وهي قيمة الثوابت المطلوبة والتي تجعل المجال $\vec{A}$ لا دورانيا. وهو المطلوب.

<u>التطبيقات المتتالية للمؤثر</u> $\vec{\nabla}$:

معنى التطبيقات المتتالية هو ظهور $\vec{\nabla}$ أكثر من مرة في نفس التعبير الرياضي ويوجد لدينا ٤ حالات هي:

(١) <u>بالتأثير بالمؤثر $\vec{\nabla}$ على المتجه $\vec{\nabla}\phi$ قياسيا</u> :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi$ = الناتج هو كمية قياسية = div grad ϕ

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \nabla^2 \phi}$$

حيث $\nabla^2 \phi$ هو مؤثر لابلاس للدالة ϕ .

<u>الإثبات:</u>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\phi$$

$$= (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\phi = \nabla^2 \phi$$

حيث : $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ هو مؤثر لابلاس .

(٢) بالتأثير بالمؤثر $\vec{\nabla}$ على المتجه $\vec{\nabla}\phi$ اتجاهيا :

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\phi)$ = الناتج هو كمية متجهة $= Curl\ \ grad\ \ \phi$

$$\boxed{Curl\ \ grad\ \ \phi = \bar{0}}$$

الإثبات:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\phi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(٣) بالتأثير بالمؤثر $\vec{\nabla}$ على المتجه $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$ قياسيا:

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$ = الناتج هو كمية قياسية $= div\ \ curl\ \ \vec{F}$

$$\boxed{div\ \ curl\ \ \vec{F} = 0}$$

الإثبات:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

(٤) بالتأثير بالمؤثر $\vec{\nabla}$ على المتجه $(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})$ اتجاهيا :

$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})$ = الناتج هو كمية متجهة $= curl\ curl\vec{F}$

$$\boxed{curl\ \ curl\vec{F} = grad div\vec{F} - \nabla^2 \vec{F}}$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$$

<u>الإثبات:</u>

باستخدام علاقة حاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي :

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})-\vec{\nabla}^2\vec{F}$$

$$\therefore Curl\ \ curl\vec{F}=graddiv\vec{F}-\nabla^2\vec{F}$$

<u>أمثلة محلولة:</u>

<u>مثال (١):</u>

إذا كان $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=0$ فاثبت أن:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{r})=0$$

حيث:

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\quad,\quad\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

<u>الحل:</u> لإثبات العلاقة : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{r})=0$ ، نوجد أولا: $(\vec{A}\wedge\vec{r})$

$$\vec{A}\wedge\vec{r}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\A_x&A_y&A_z\\x&y&z\end{vmatrix}=\hat{i}(zA_y-yA_z)+\hat{j}(xA_z-zA_x)+\hat{k}(yA_x-xA_y)$$

ومن تعريف التباعد (div):

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{r})=\frac{\partial}{\partial x}(zA_y-yA_z)+\frac{\partial}{\partial y}(xA_z-zA_x)+\frac{\partial}{\partial z}(yA_x-xA_y)$$

$$=z\frac{\partial A_y}{\partial x}-y\frac{\partial A_z}{\partial x}+x\frac{\partial A_z}{\partial y}-z\frac{\partial A_x}{\partial y}+y\frac{\partial A_x}{\partial z}-x\frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= x(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + y(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + z(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$
$$= x(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_x + y(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_y + z(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_z = \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

ولكن من رأس المسألة:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0 \qquad \therefore \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{r}) = 0$$

وهو المطلوب.

مثال (٢) :

أثبت العلاقات الإتجاهية الآتية :

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \psi\right) = \phi \vec{\nabla}^2 \psi + \left(\vec{\nabla} \phi\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \psi\right)$$
$$(ii) \quad \vec{\nabla} \wedge \left(\phi \vec{\nabla} \psi\right) = \left(\vec{\nabla} \phi\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \psi\right)$$

حيث ϕ, ψ دالتان تمثلان مجالان قياسيان .

الحـل :

(i) بإستخدام العلاقة الإتجاهية : $\vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{A}\right) = \phi\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi$

وأخذ $\vec{\nabla} \psi = \vec{A}$ فإننا نحصل على:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \psi\right) = \phi\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi\right] + \left(\vec{\nabla} \psi\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \phi\right) = \phi \vec{\nabla}^2 \psi + \left(\vec{\nabla} \phi\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \psi\right)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$div\left(\phi \, grad \, \psi\right) = \phi \vec{\nabla}^2 \psi + \left(grad \, \phi\right) \cdot \left(grad \, \psi\right)$$

(ii) بإستخدام العلاقة الإتجاهية:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\phi \vec{A}\right) = \phi\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) - \vec{A} \wedge \vec{\nabla} \phi$$

وأخذ $\vec{\nabla} \psi = \vec{A}$ فإننا نحصل على:

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\phi \vec{\nabla} \psi\right) = \phi\left[\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \psi\right)\right] - \left(\vec{\nabla} \psi\right) \wedge \left(\vec{\nabla} \phi\right)$$

ولكن: $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\psi = curl\ \ grad\,\psi = 0$

$$\therefore \vec{\nabla} \wedge \left(\phi \vec{\nabla}\psi\right) = -\left(\vec{\nabla}\psi\right) \wedge \left(\vec{\nabla}\phi\right) = \left(\vec{\nabla}\phi\right) \wedge \left(\vec{\nabla}\psi\right)$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة: $curl\ \left(\phi\, grad\,\psi\right) = \left(grad\,\phi\right) \wedge \left(grad\,\psi\right)$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣)</u>: أثبت العلاقات الإتجاهية الآتية :

$$(i) \qquad div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot curl\,\vec{A} - \vec{A} \cdot curl\,\vec{B}$$

$$(ii) \qquad div\left(\vec{\nabla}\phi \wedge \vec{\nabla}\psi\right) = 0$$

<u>الحـل : لإثبات (i):</u>

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_x B_z - A_z B_x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

$$= A_y \frac{\partial A_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$+ A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$-\left[A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \vec{B} \cdot curl\vec{A} - \vec{A} \cdot curl\vec{B}$$

حيث :

$$curl\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

وكذلك بالنسبة لـــ $curl\,\vec{B}$.

وهو المطلوب الأول .

<u>لإثبات (ii):</u> بإستخدام (i) وكتابة $\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\ ,\ \vec{B}=\vec{\nabla}\psi$

$$\therefore div\left(\vec{\nabla}\phi\wedge\vec{\nabla}\psi\right)=div\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot curl\,\vec{A}-\vec{A}\cdot curl\,\vec{B}$$

$$=\left(\vec{\nabla}\psi\right)\cdot curl\left(grad\,\phi\right)-\left(\vec{\nabla}\phi\right)\cdot curl\left(grad\,\psi\right)=0$$

حيث :

$$curl\ grad\,\phi=0\qquad ,\qquad curl\ grad\,\psi=0$$

<u>مثال (٤):</u> أثبت العلاقتين الإتجاهيتين الآتيتين:

$$(i)\quad curl\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{A}\,div\,\vec{B}-\vec{B}\,div\,\vec{A}-\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

$$(ii)\quad grad\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\vec{A}\wedge curl\,\vec{B}+\vec{B}\wedge curl\vec{A}+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$

وإذا كان المتجه $\vec{B}$ متجهاً ثابتاً فأكتب هاتين العلاقتين في تلك الحالة الخاصة .

<u>الحــل:</u>

<u>إثبات (i):</u>

$$curl\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\wedge\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}$$

$$= \vec{\nabla} \wedge \left[\hat{i}\left(A_2B_3 - A_3B_2\right) + \hat{j}\left(A_3B_1 - A_1B_3\right) + \hat{k}\left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\right]$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_2B_3 - A_3B_2 & A_3B_1 - A_1B_3 & A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(A_1B_2 - A_2B_1\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\right]$$

$$+ \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(A_2B_3 - A_3B_2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\right]$$

$$+ \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(A_3B_1 - A_1B_3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_2B_3 - A_3B_2\right)\right]$$

$$= \hat{i}\left[A_1\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial y} - B_1\frac{\partial A_2}{\partial y} - A_3\frac{\partial B_1}{\partial z} - B_1\frac{\partial A_3}{\partial z} + A_1\frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3\frac{\partial A_1}{\partial z}\right]$$

$$+ \hat{j}\left[A_2\frac{\partial B_3}{\partial z} + B_3\frac{\partial A_2}{\partial z} - A_3\frac{\partial B_2}{\partial z} - B_2\frac{\partial A_3}{\partial z} - A_1\frac{\partial B_2}{\partial x} - B_2\frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_2}{\partial x}\right]$$

$$+ \hat{k}\left[A_3\frac{\partial B_1}{\partial x} + B_1\frac{\partial A_3}{\partial x} - A_1\frac{\partial B_3}{\partial x} - B_3\frac{\partial A_1}{\partial x} - A_2\frac{\partial B_3}{\partial y} - B_3\frac{\partial A_2}{\partial y} + A_3\frac{\partial B_2}{\partial y} + B_2\frac{\partial A_3}{\partial y}\right]$$

$$= \left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)\left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)\right]$$

$$-\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)\left[\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)\right]$$

$$+\left[\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)$$

$$-\left[\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)$$

$$= \left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)\left[\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right]$$
$$- \left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)\left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right]$$
$$+ \left[\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)$$
$$- \left[\left(A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\left(B_1\hat{i} + B_2\hat{j} + B_3\hat{k}\right)$$
$$= \vec{A}\, div\, \vec{B} - \vec{B}\, div\, \vec{A} + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}$$

وهو المطلوب .

<u>لإثبات (ii)</u> : نترك كواجب للطالب .

<u>حالة خاصة :</u> " إذا كان المتجه $\vec{B}$ متجهاً ثابتاً فإن العلاقتين (ii)،(i) تأخذان الصورتين الآتيتين " .

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = 0 - \vec{B}\, div\, \vec{A} - 0 + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$
$$= \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \vec{B}\, div\, \vec{A} \qquad \_\_\_\_\_ (iii)$$
$$\vec{\nabla}\ \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = 0 + \vec{B} \wedge curl\, \vec{A} + 0 + \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}$$
$$= \left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \vec{B} \wedge curl\, \vec{A} \qquad \_\_\_\_\_ (iv)$$

<u>مثال (٥) :</u> إذا كان $\hat{a}$ متجه وحدة ثابت فأثبت العلاقة الإتجاهية الآتية :

$$\hat{a}\cdot\left[\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\hat{a}\right) - \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\hat{a}\right)\right] = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

<u>الحـــل :</u>

نوجد أولاً $\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\hat{a}\right),\ \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{A}\wedge\hat{a}\right)$

وذلك بإعتبار أن $\hat{a}$ متجه وحدة ثابت ، وبإستخدام العلاقتين (iv) ، (iii) في المثال السابق [الحالة الخاصة] :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{A} \wedge \hat{a}\right) = \left(\hat{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} - \hat{a}\ div\,\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\ \left(\vec{A} \cdot \hat{a}\right) \ = \left(\hat{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} + \hat{a} \wedge curl\,\vec{A}$$

$$\therefore\ \hat{a} \cdot \left[\vec{\nabla}\left(\vec{A} \cdot \hat{a}\right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{A} \wedge \hat{a}\right)\right]$$

$$= \hat{a} \cdot \left[\left(\hat{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} + \hat{a} \wedge curl\,\vec{A} - \left(\hat{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A} + \hat{a}\,div\,\vec{A}\right]$$

$$= \hat{a} \cdot \left(\hat{a} \wedge curl\,\vec{A}\right) + \hat{a} \cdot \left(\hat{a}\,div\,\vec{A}\right)$$

ولكن:

$$\hat{a} \cdot \hat{a} \wedge \vec{b} = 0 \rightarrow \hat{a} \cdot \vec{a} \wedge curl\,\vec{A} = 0$$

$$\hat{a} \cdot \left(\hat{a}\,div\,\vec{A}\right) = \left(\hat{a} \cdot \hat{a}\right) div\,\vec{A} = div\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\therefore\ \hat{a} \cdot \left[\vec{\nabla}\left(\vec{A} \cdot \hat{a}\right) - \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{A} \cdot \hat{a}\right)\right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

وهو المطلوب .

أمثلة عامة محلولة على تفاضل الدوال الاتجاهية

مثال(١):

(أ) إذا كان $\vec{a}$ متجه ثابت وكان $\vec{u}=\dfrac{\vec{r}\wedge\vec{a}}{\vec{r}\cdot\vec{a}}$ ، فأوجد $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$.

(ب) أوجد التفاضل الزمني للمتجه $(\vec{r}\wedge\vec{s})$ ومن ذلك أثبت أن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt})=\vec{r}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

الحل: الجزء(أ):

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}\wedge\vec{a}}{\vec{r}\cdot\vec{a}})=\frac{(\vec{r}\cdot\vec{a})(\dot{\vec{r}}\wedge\vec{a})-(\vec{r}\wedge\vec{a})(\dot{r}\cdot\vec{a})}{(\vec{r}\cdot\vec{a})^2}$$

$$=\frac{(\dot{\vec{r}}\wedge\vec{a})}{(\vec{r}\cdot\vec{a})}-(\vec{r}\cdot\vec{a})\frac{(\dot{\vec{r}}\wedge\vec{a})}{(\vec{r}\cdot\vec{a})^2}$$

(مع ملاحظة أن $\dot{\vec{a}}=\dfrac{d\vec{a}}{dt}=0$)

الجزء(ب): بتطبيق قاعدة تفاضل حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\vec{s})=\vec{r}\wedge\frac{d\vec{s}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge s \qquad \_\_\_(1)$$

ولإثبات الجزء الثاني بوضع $\vec{s}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ في (1)

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{r}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt})=\vec{r}\wedge\frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt})+\frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\wedge\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

وذلك لأن $\dfrac{d\vec{r}}{dt}\wedge\dfrac{d\vec{r}}{dt}=0$ $(\vec{A}\wedge\vec{A}=0)$.

مثال(٢): أوجد $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}$ للدالتين الآتيتين:

(i) $\vec{r}=x\cos y\,\hat{i}+x\sin y\,\hat{j}+ce^{\alpha y}\,\hat{k}$

(ii) $\vec{r}=\frac{1}{2}\alpha(x+y)\hat{i}+\frac{1}{2}\beta(x-y)\,\hat{j}+\gamma\ln[x+\sqrt{x^2-\gamma^2}\,]\hat{k}$

الحل:

(i) $\vec{r}=x\cos y\,\hat{i}+x\sin y\,\hat{j}+ce^{\alpha y}\,\hat{k}$

$$\therefore \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\cos y\,\hat{i}+\sin y\,\hat{j}\ ,\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=-x\sin y\,\hat{i}+x\cos y\,\hat{j}+c\alpha e^{\alpha y}\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial y^2}=-x\cos y\,\hat{i}-x\sin y\,\hat{j}+c\alpha^2 e^{\alpha y}\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right)=-\sin y\,\hat{j}+\cos y\,\hat{j}$$

(ii) $\vec{r}=\frac{1}{2}\alpha(x+y)\hat{i}+\frac{1}{2}\beta(x-y)\,\hat{j}+\gamma\ln[x+\sqrt{x^2-\gamma^2}\,]\hat{k}$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\frac{1}{2}\alpha\,\hat{i}+\frac{1}{2}\beta\,\hat{j}+\gamma\left[\ \frac{[1+\frac{1}{2}(x^2-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)]}{x+\sqrt{x^2-\gamma^2}}\,\hat{k}\ \right]$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha\,\hat{i}+\beta\,\hat{j})+\frac{\gamma}{\sqrt{x^2-\gamma^2}}\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\frac{1}{2}\alpha\,\hat{i}+\frac{1}{2}\beta\,\hat{j}+0=\frac{1}{2}(\alpha\,\hat{i}+\beta\,\hat{j})$$

$$\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial x^2}=0-\frac{1}{2}\gamma\frac{2x}{(x^2-\gamma^2)^{3/2}}\,\hat{k}=-\frac{\gamma x}{(x^2-\gamma^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right)=0$$

مثال(٣): أثبت أن الدالة $\vec{F}=\frac{e^{iw(t-r/c)}}{r}\vec{a}$ تحقق المعادلة الدالة

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \vec{F}}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{F}}{\partial t^2}$$

حيث $\vec{a}$ متجه ثابت، w,c ثابتان قياسيان، $i=\sqrt{-1}$

الحل: من رأس المسألة: $\vec{F}=\frac{e^{iw(t-r/c)}}{r}\vec{a}$

$$\therefore \frac{\partial \vec{F}}{\partial r}=\frac{r\cdot(-\frac{iw}{c})e^{iw(t-r/c)}-e^{iw(t-r/c)}}{r^2}\vec{a}$$

$$=-\frac{iw}{rc}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}-\frac{e^{iw(t-r/c)}}{r^2}\vec{a} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial r^2}=-\frac{iw}{c}\,\frac{r(-\frac{iw}{c})e^{iw(t-r/c)}-e^{iw(t-r/c)}}{r^2}\vec{a}$$

$$-\frac{r^2(-\frac{iw}{c})e^{iw(t-r/c)}-2re^{iw(t-r/c)}}{r^4}\vec{a}$$

$$=-\frac{w^2}{c^2}\frac{1}{r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{2}{r^3}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}$$

$$=-\frac{w^2}{c^2}\frac{1}{r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{2iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{2}{r^3}e^{iw(t-r/c)}\vec{a} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t}=\frac{iw}{r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}\rightarrow\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}=\frac{i^2w^2}{r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}=-\frac{w^2}{r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}\_(3)$$

من (1):

$$\frac{2}{r}(\frac{\partial \vec{F}}{\partial t})=-\frac{2iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}-\frac{2}{r^3}e^{iw(t-r/c)}\vec{a} \qquad \_\_\_(4)$$

ومن (3):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}=-\frac{w^2}{rc^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a} \qquad \_\_\_(5)$$

من (5), (4), (3) نجد أن:

$$\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \vec{F}}{\partial r}=-\frac{w^2}{c^2 r}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}+\frac{2iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}$$

$$+\frac{2}{r^3}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}-\frac{2iw}{cr^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}-\frac{2}{r^3}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}$$

$$=-\frac{w^2}{rc^2}e^{iw(t-r/c)}\vec{a}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u>

(أ) إذا كان $\phi=x^2z+e^{y/x}$ ، $\psi=2z^2y-xy^2$ ، فأوجد $\vec{\nabla}(\phi+\psi)$, $\vec{\nabla}(\phi\psi)$ عند النقطة $(1,0,-2)$

(ب) إذا كان $\vec{A}=2x^2\hat{i}-3yz\hat{j}+xz^2\hat{k}$ ، $\phi=2z-x^3y$ ، فأوجد $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$, $\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi$ عند النقطة $(1,-1,1)$

<u>الحل</u>: <u>الجزء الأول(أ):</u> نستخدم العلاقتين:

$$\vec{\nabla}(\phi+\psi)=\vec{\nabla}\phi+\vec{\nabla}\psi \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{\nabla}(\phi\psi)=\phi\,\vec{\nabla}\psi+\psi\,\vec{\nabla}\phi \qquad \_\_\_(2)$$

وحيث أن: $\phi = x^2 z + e^{y/x}$

$$\therefore \vec{\nabla}\phi = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(x^2 z + e^{y/x})$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 z + e^{y/x}) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 z + e^{y/x}) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 z + e^{y/x})$$

$$= \hat{i}[2xz + e^{y/x} \cdot (-\frac{y}{x^2})] + \hat{j}[e^{y/x} \cdot (\frac{1}{x})] + \hat{k}[x^2] \qquad \_\_\_(3)$$

وعند النقطة $(1,0,-2)$ فبالتعويض عن $x=1, y=0, z=-2$ في (3):

$$\vec{\nabla}\phi = i[2(1)(-1) + e^0 \cdot (-\frac{0}{1})] + \hat{j}[e^0 \times (\frac{1}{1})]$$
$$+ \hat{k}(1^2) = -4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k} \qquad \_\_\_(4)$$

أيضاً فإن:

$$\psi = 2z^2 y - xy^2$$

$$\therefore \vec{\nabla}\psi = (i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(2z^2 y - xy^2)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2z^2 y - xy^2) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2z^2 y - xy^2) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2z^2 y - xy^2)$$

$$= \hat{i}[-y^2] + \hat{j}[2z^2 - 2xy] + \hat{k}[4zy] \qquad \_\_\_(5)$$

وعند النقطة $(1,0,-2)$ فبالتعويض في (5):

$$\vec{\nabla}\psi = \hat{i}[0] + \hat{j}[2(-2)^2] + \hat{k}[0] = 8\hat{j} \qquad \_\_\_(6)$$

وبالتعويض عن قيم $\vec{\nabla}\phi, \vec{\nabla}\psi$ من (6), (4) في (2), (1) نحصل على:

(i) $\vec{\nabla}(\phi + \psi) = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi = (-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 8\hat{j} = -4\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}$

(ii) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$

$$= (x^2 z + e^{y/x})(8\hat{j}) + 2z^2 y - y^2 x)(-4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

وعند النقطة $(1,0,-2)$ فإن:

$$\vec{\nabla}(\phi\psi)=(-1)(8\hat{j})+(0)(-4\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=-8\hat{j}$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني:

$$\phi=2z-x^3y$$

$$\vec{\nabla}\phi=(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(2z-x^3y)$$

$$=\hat{i}(-3x^2y)+\hat{j}(-x^2)+\hat{k}(2)$$

وعند النقطة $(1,-1,1)$ فإن:

$$\vec{\nabla}\phi=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$$

أيضاً فإن:

$$\vec{A}=2x^2\hat{i}-3yz\hat{j}+xz^2\hat{k}$$

وعند النقطة $(1,-1,1)$ فإن

$$\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi=(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=(6)+(-3)+(2)=5$$

$$\vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}(6+1)-\hat{j}(4-3)+\hat{k}(-2-9)$$

$$=7\hat{i}-\hat{j}-11\hat{k}$$

وهو المطلوب.

مثال(٥): إذا كان:

$$\vec{A}=yz^2\hat{i}-3xz^2\hat{j}+2xyz\hat{k}\ ,\ \vec{B}=3x\hat{i}+4z\hat{j}-xy\hat{k}\ ,\ \phi=xyz$$

فأوجد:

(i) $\vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\phi)$ (ii) $(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\wedge\vec{B}$

(ii) $\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\phi)$ (iv) $(\vec{A}\wedge\vec{\nabla})\phi$

الحل: **أولاً**: لإيجاد $\vec{A}\wedge(\vec{\nabla}\phi)$:

$$\phi = xyz$$

$$\vec{\nabla}\phi = (\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})(xyz) = yz\hat{i}+zx\hat{j}+xy\hat{k}$$

$$\therefore \vec{A}\wedge\vec{\nabla}\phi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

$$=(-3x^2yz^2-2x^2yz^2)\hat{i}+(2xy^2z^2-xy^2z^2)\hat{j}$$

$$+(xyz^3+3xyz^3)\hat{k}$$

$$=-5x^2yz^2\hat{i}+xy^2z^2\hat{j}+4xyz^3\hat{k}$$

ثانياً: لإيجاد $(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\wedge\vec{B}$:

$$\vec{A}\wedge\vec{\nabla} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(2xyz)-\frac{\partial}{\partial z}(-3xz^2)]$$

$$+[\frac{\partial}{\partial z}(yz^2)-\frac{\partial}{\partial x}(2xyz)]\hat{i}+[\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2)-\frac{\partial}{\partial y}(yz^2)]\hat{k}$$

$$=(2xz+6xz)\hat{i}+(2yz-2yz)\hat{j}+(-3z^2-z^2)\hat{k}$$

$$=(8xz)\hat{i}+(0)\hat{j}(4z^2)\hat{k}$$

وحيث أن $\vec{B}=3x\hat{i}+4z\hat{j}-xy\hat{k}$ فإن:

$$\therefore (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8xz & 0 & -4z^2 \\ 3x & 4z & -xy \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(16z^3)+\hat{j}(-12xz^2+8x^2yz)+\hat{k}(32xz^2)$$

$$=16z^3\hat{i}+(8x^2yz-12xz^2)\hat{j}+32xz^2\hat{k}$$

ثالثاً: لإيجاد $\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$

حيث أن:

$$\vec{B}=3x\hat{i}+4z\hat{j}-xy\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=(8xz)\hat{i}+(0)\hat{j}-(4z^2)\hat{k}$$

فإن:

$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})=(3x)(8xz)+4z(0)+(-xy)(-4z^2)$$

$$=24x^2z+4xyz^2$$

رابعاً: لإيجاد $(\vec{A}\wedge\vec{\nabla})\phi$

$$(\vec{A}\wedge\vec{\nabla})=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ yz^2 & -3xz^2 & 2xyz \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(-3xz^2\frac{\partial}{\partial z}-2zy\frac{\partial}{\partial y})+\hat{j}(2xyz\frac{\partial}{\partial x}-yz^2\frac{\partial}{\partial z})$$

$$+\hat{k}(yz^2\frac{\partial}{\partial y}+3xz^2\frac{\partial}{\partial x})$$

وحيث أن $\phi=xyz$ فإن:

$$(\vec{A}\wedge\bar{\nabla})\phi=[\hat{i}(-3xz^2\frac{\partial}{\partial z}-2xyz\frac{\partial}{\partial y})+\hat{j}(2xyz\frac{\partial}{\partial x}-yz^2\frac{\partial}{\partial z})$$
$$+\hat{k}(yz^2\frac{\partial}{\partial y}+3xz^2\frac{\partial}{\partial x})](xyz)$$
$$=\hat{i}[-3xz^2(xy)-2xyz(xz)]+\hat{j}[2xyz(yz)-yz^2(xy)]$$
$$+\hat{k}[yz^2(xz)+3xz^2(yz)]$$
$$=\hat{i}[-3x^2yz^2-2x^2yz^2]+\hat{j}[2xy^2z^2-xy^2z^2]$$
$$+\hat{k}[xyz^3\hat{i}+3xyz^3]$$
$$=-5x^2yz^2\hat{i}+xy^2z^2\hat{j}+4xyz^3\hat{k}$$

مثال(٦): (أ) إذا كان $\hat{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}$ ، $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{i}+z\hat{k}$

فأثبت أن: $curl[(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{A}]=0$

(ب) إذا كانت $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+3\hat{k}$ وكان $\bar{a}$ متجه ثابت، فأثبت أن

$$curl[\frac{\bar{a}\wedge\vec{r}}{r^3}]=\frac{3\vec{r}}{r^5}(\bar{a}\cdot\vec{r})-\frac{\bar{a}}{r^3}$$

الحل: الجزء الأول:

$$(\vec{A}\cdot\vec{r})=(A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k})\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})=A_1x+A_2y+A_3z$$
$$(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{A}=(A_1x+A_2y+A_3z)(A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k})$$
$$=A_1(A_1x+A_2y+A_3z)\hat{i}+A_2(A_1x+A_2y+A_3z)\hat{j}$$
$$+A_3(A_1x+A_2y+A_3z)\hat{k}$$
$$\therefore curl[(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{A}]=\bar{\nabla}\wedge[(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{A}]$$
$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1(A_1x+A_2y+A_3z) & A_2(A_1x+A_2y+A_3z) & A_3(A_1x+A_2y+A_3z)\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}[A_3\,(A_1x+A_2y+A_3z)-\frac{\partial}{\partial z}[A_2\,(A_1x+A_2y+A_3z)]\right\}$$

$$-\hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[A_3\,(A_1x+A_2y+A_3z)-\frac{\partial}{\partial z}[A_1\,(A_1x+A_2y+A_3z)]\right\}$$

$$+\hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[A_2\,(A_1x+A_2y+A_3z)-\frac{\partial}{\partial y}[A_1\,(A_1x+A_2y+A_3z)]\right\}$$

$$=\hat{i}\left\{A_3\,A_2-A_2A_3\right\}-\hat{j}\left\{A_3\,A_1-A_1A_3\right\}+\hat{k}\left\{A_2A_1-A_1A_2\right\}=0$$

وهو المطلوب.

<u>الجزء الثاني</u>: $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+3\hat{k}$

$$curl\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}=\vec{\nabla}\wedge(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3})=(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z})\wedge(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3})$$

$$=\hat{i}\wedge\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3})+\hat{j}\wedge\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3})+\hat{k}\wedge\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}) \qquad \_\_\_(1)$$

ولكن:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3})=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{r^3}(\vec{a}\wedge\vec{r})]$$

$$=\frac{1}{r^3}(\vec{a}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial x})+(-\frac{3}{r^4}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x})(\vec{a}\wedge\vec{r})$$

$$=\frac{1}{r^3}(\vec{a}\wedge\hat{i})-\frac{3}{r^4}(\frac{x}{r})(\vec{a}\wedge\vec{r})$$

وذلك لأن

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\hat{i}$$

$$r^2=x^2+y^2+z^2\rightarrow\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}(\vec{a}\wedge\hat{i})-\frac{3x}{r^5}(\vec{a}\wedge\vec{r}) \qquad \_\_\_(2)$$

وبالضرب إتجاهياً في $\hat{i}$:

$$\hat{i}\wedge\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}\hat{i}\wedge(\vec{a}\wedge\hat{i})-\frac{3x}{r^5}\hat{i}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{r})$$

$$=\frac{1}{r^3}[(\hat{i}\cdot\hat{i})\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}]-\frac{3x}{r^5}[(\hat{i}\cdot\vec{r})\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\vec{r}]$$

$$=\frac{1}{r^3}[\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}]-\frac{3x}{r^5}[x\vec{a}-(\hat{i}\cdot\vec{a})\vec{r}]$$

$$=\frac{\vec{a}}{r^3}-\frac{(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\vec{a}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\hat{i}x\cdot\vec{a}) \qquad \_\_\_(3)$$

وبالمثل فإن

$$\hat{j}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{\vec{a}}{r^3}-\frac{(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}\vec{a}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\hat{j}y\cdot\vec{a}) \qquad \_\_\_(4)$$

$$\hat{k}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)=\frac{\vec{a}}{r^3}-\frac{(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\vec{a}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\hat{k}z\cdot\vec{a}) \qquad \_\_\_(5)$$

بجمع (3), (4), (5):

$$\therefore \hat{i}\wedge\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)+\hat{j}\wedge\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)+\hat{k}\wedge\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$=\frac{3\vec{a}}{r^3}-\frac{1}{r^3}[(\hat{i}\cdot\vec{a})\vec{i}+(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}+(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}]$$

$$-\frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)\vec{a}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{3\vec{a}}{r^3}-\frac{1}{r^3}[a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}]-\frac{3}{r^5}r^2\vec{a}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{3\vec{a}}{r^3}-\frac{\vec{a}}{r^3}-\frac{3\vec{a}}{r^3}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{a})=-\frac{\vec{a}}{r^3}+\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{a})$$

[وذلك لأن: $\hat{k}\cdot\vec{a}=a_3$, $\hat{j}\cdot\vec{a}=a_2$, $\hat{i}\cdot\vec{a}=a_1$ حيث $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

وأيضاً لأن: $[(\hat{i}\cdot\vec{a})\hat{i}+(\hat{j}\cdot\vec{a})\hat{j}+(\hat{k}\cdot\vec{a})\hat{k}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}=\vec{a}$

$$\therefore curl[\frac{\vec{a}\wedge\vec{r}}{r^3}]=\frac{3\vec{r}}{r^5}(\vec{a}\cdot\vec{r})-\frac{\vec{a}}{r^3}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٧):</u> (أ) إذا كان

$$\vec{A}=A_1\hat{i}+A_2\hat{j}+A_3\hat{k}\quad,\vec{B}=B_1\hat{i}+B_2\hat{j}+B_3\hat{k},\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

وكان $grad(\vec{A}\cdot\vec{B})=0$ فأثبت أن

$$grad[(\vec{r}\wedge\vec{A})\cdot(\vec{r}\wedge\vec{B})=(\vec{A}\wedge\vec{r})\wedge\vec{B}+(\vec{B}\wedge\vec{r})\wedge\vec{A}$$

(ب) إذا كان ϕ,ψ دالتان قياسيتان فأثبت أن:

$$curl(\phi\, grad\psi)=(grad\phi)\wedge(grad\psi)=-curl(\psi\, grad\phi)$$

(ج) أثبت أنه لأي متجه $\vec{V}$ فإن: $(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}=\frac{1}{2}\vec{\nabla}(V^2)-\vec{V}\wedge curl\vec{V}$

<u>الحل:</u> <u>الجزء الأول</u>: باستخدام قانون حاصل الضرب الرباعي القياسي:

$$(\vec{r}\wedge\vec{A})\cdot(\vec{r}\wedge\vec{B})=r^2(\vec{A}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{r})(\vec{B}\cdot\vec{r})$$

$$\therefore grad[(\vec{r}\wedge\vec{A})\cdot(\vec{r}\wedge\vec{B})]=grad[r^2(\vec{A}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{r})(\vec{B}\cdot\vec{r})]$$

$$=grad[r^2(\vec{A}\cdot\vec{B})]-grad[(\vec{A}\cdot\vec{r})(\vec{B}\cdot\vec{r})]$$

$$=r^2 grad(\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{A}\cdot\vec{B})\,grad\,r^2-(\vec{A}\cdot\vec{r})grad(\vec{B}\cdot\vec{r})$$

$$-(\vec{B}\cdot\vec{r})grad(\vec{A}\cdot\vec{r})$$

$$=(\vec{A}\cdot\vec{B})(2\vec{r})-(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{r})\vec{A}$$

$$=(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{r}-(\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{r}-(\vec{B}\cdot\vec{r})\vec{A}$$

$$=-[\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{r})]-[\vec{B}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{r})]$$

$$=(\vec{A}\wedge\vec{r})\vec{B}+(\vec{B}\wedge\vec{r})\wedge\vec{A}$$

$$grad(\vec{A}\cdot\vec{r})=\vec{A}$$

$$grad(\vec{B}\cdot\vec{r})=\vec{B}$$

$$grad\,r^2=2\vec{r}$$

$$grad(\vec{A}\cdot\vec{B})=0$$

الجزء الثاني: نفرض أن $\vec{A} = grad\psi$

$$\therefore curl(\phi\, grad\psi) = curl(\phi \vec{A})$$

$$= \phi\, curl\vec{A} - \vec{A} \wedge grad\phi$$

$$= \phi\, curl(grad\psi) - grad\psi \wedge grad\phi$$

$$= 0 - grad\psi \wedge grad\phi$$

حيث $curl\ \ grad\psi = 0$

$$curl(\phi\, grad\psi) = (grad\phi) \wedge grad\psi \qquad \_\_\_(1)$$

أيضاً $curl(\psi\, grad\phi) = curl(\psi \vec{B})$، حيث $\vec{B} = grad\phi$

$$curl\,\psi\ \ grad\phi = curl(\psi \vec{B}) = \psi\, curl\vec{B} - \vec{B} \wedge grad\psi$$

$$= \psi\, curl(grad\phi) - grad\phi \wedge grad\psi$$

$$= -(grad\phi) \wedge (grad\psi) \qquad \_\_\_(2)$$

من (2) ,(1) نجد أن:

$$curl\,(\phi\, grad\psi) = -curl(\psi\, grad\phi)$$

وهو المطلوب.

الجزء(ج): حيث أن:

$$grad(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A} \wedge curl\vec{B} + \vec{B} \wedge curl\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

فبوضع $\vec{A} = \vec{B} = \vec{V}$

$$\therefore grad(V^2) = \vec{V} \wedge curl\vec{V} + V \wedge curl\vec{V} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} + (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\therefore \vec{\nabla}(V^2) = 2\vec{V} \wedge curl\vec{V} + 2(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V}$$

$$\therefore (\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(V^2) - \vec{V} \wedge curl\vec{V}$$

وهو المطلوب.

مثال(٨): (أ) أثبت أن المتجه: $\vec{u}=(x+3y)\hat{i}+(y-2z)\hat{j}+(x+az)\hat{k}$
يشكل متجهاً لولبيا إذا كان $a=-2$.

(ب) إذا كان $\vec{A},\vec{B}$ متجهان لا دورانيان، فأثبت أن حاصل ضربهما الاتجـاهي $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ يشكل متجهاً لولبيا.

(ج) أثبت أن $(r^n\,\vec{r})$ يشكل متجهاً لا دورانياً لأي قيمة من قيم n ولكنه يكـون متجهاً لولبيا فقط عندما $n=-3$ (أستخدم العلاقة $grad(r^n)=nr^{n-2}\vec{r}$).

الحل: **الجزء(أ):** يكون المتجه $\vec{u}$ لولبياً إذا كان $div\,\vec{u}=0$،

$$\therefore div\,\vec{u}=0=\frac{\partial}{\partial x}(x+3y)+\frac{\partial}{\partial x}(y-2z)+\frac{\partial}{\partial z}(x+az)$$
$$=1+1+a=2+a \qquad \rightarrow a=-2$$

الجزء(ب): حيث أن $\vec{A},\vec{B}$ لا دورانيان:

$$\therefore curl\,\vec{A}=0\ ,\ curl\,\vec{B}=0$$

ولكي يكون حاصل ضربهما الاتجاهي $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ متجهاً لولبيا يجـب أن يكـون $div(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$ أي $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$

ومن العلاقة:

$$div(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot curl\,\vec{A}-\vec{A}\cdot curl\,\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=0-0=0$$

وهو المطلوب.

الجزء(ج): من العلاقة:

$$curl(\phi\vec{A})=\phi\,curl\,\vec{A}-\vec{A}\wedge grad\,\phi$$
$$\therefore curl(r^n\vec{r})=r^n\,curl\,\vec{r}-\vec{r}\wedge grad\,r^n \qquad \_\_\_(1)$$

وحيث أن: $curl\,\vec{r}=0$ ، $grad\,r^n=nr^{n-2}\,\vec{r}$

فمن (1) نجد أن:

$$curl\, r^n \vec{r} = -\vec{r} \wedge grad\, r^n = -\vec{r} \wedge [nr^{n-2} \vec{r}] = -nr^{n-2} (\vec{r} \wedge \vec{r}) = 0$$

ومن هذا نجد أن المتجه $r^n \vec{r}$ هو متجه لا دوراني لأي قيمة من قيم n.

والآن: من العلاقة

$$div(\phi \vec{A}) = \phi\, div\, \vec{A} + \vec{A} \cdot grad\, \phi$$

$$\therefore div(r^n \vec{r}) = r^n\, div \vec{r} + \vec{r} \cdot grad\, r^n$$

$$= r^n (3) + \vec{r} \cdot (nr^{n-2} \vec{r}) = 3r^n + nr^{n-2} (r^2)$$

$$= 3r^n + nr^n = (3+n) r^n$$

وهذا يساوي صفراً (إذا كان المتجه $r^n \vec{r}$ لولبياً) بشرط أن $3+n=0$ أي $n=-3$

ومن هذا نجد أن المتجه $r^n \vec{r}$ يكون لولبياً فقط إذا كانت $n=-3$.

مثال(٩): باستخدام العلاقة $grad\, r^n = nr^{n-2} \vec{r}$ حيث

$$r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

أثبت أن: $div\, grad\, r^n = n(n+1) r^{n-2}$ ومن ذلك حقق العلاقة:

$$curl\; grad\; r^n = 0$$

الحل: حيث أن: $grad\, r^n = nr^{n-2} \vec{r}$

$$\therefore div\; grad\, r^n = \vec{\nabla} \cdot (n r^{n-2} \vec{r}) = n \vec{\nabla} \cdot (r^{n-2} \vec{r})$$

$$= n[r^{n-2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} (r^{n-2})]$$

$$= n[r^{n-2} (3) + \vec{r} \cdot (n-2) r^{n-4} \vec{r}]$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2) r^{n-4} (r^2)$$

$$= 3nr^{n-2} + n(n-2) r^{n-2}$$

$$= n(3+n-2) r^{n-2} = n(n+1) r^{n-2}$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: لإثبات أن $curl\, grad\, r^n = 0$

$$curl\, grad\, r^n = \vec{\nabla}\wedge(nr^{n-2}\bar{r})$$
$$= \vec{\nabla}\wedge[nr^{n-2}x\hat{i}+nr^{n-2}y\hat{j}+nr^{n-2}3\hat{k}]$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ nr^{n-2}x & nr^{n-2}y & nr^{n-2}z \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}[\frac{\partial}{\partial y}(nr^{n-2}z)-\frac{\partial}{\partial z}(nr^{n-2}y)]+\cdots$$
$$= \hat{i}[n(n-2)r^{n-3}\frac{\partial r}{\partial y}\cdot(z)-n(n-2)r^{n-3}\frac{\partial r}{\partial z}\cdot(y)]+\cdots$$
$$= \hat{i}[n(n-2)r^{n-3}(\frac{y}{r})(z)-n(n-2)r^{n-3}(\frac{z}{r})(y)]+\cdots$$
$$= \hat{i}[0]+\hat{j}[0]+\hat{k}[0]=0$$

وهو المطلوب.

(حيث استخدمنا $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}\ ,\ \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$)

مثال(١٠): (أ) أثبت أن المتجه $\vec{E}=\frac{\bar{r}}{r^2}$ هو متجه لا دوراني، حيث

$$\bar{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

(ب) إذا كان $div\vec{E}=0\ ,\ div\vec{H}=0$ وكان:

$$curl\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ ,\ curl\,\vec{H}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

فأثبت أن المتجهين $E, \vec{H}=\bar{U}$ يحققان العلاقة: $\nabla^2\bar{U}=\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}$

الحل: الجزء الأول(أ): لإثبات أن $\vec{E}=\frac{\vec{r}}{r^2}$ بشكل متجهاً لا دورانياً يجب أن نثبت أن $curl\,\vec{E}=0$ أي $\vec{\nabla}\wedge(\frac{\vec{r}}{r^2})=0$

$$\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{r}}{r^2}=\vec{\nabla}\wedge\left(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]$$

$$+\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]$$

$$+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)\right]$$

$$=\hat{i}\left[\frac{-2zy}{x^2+y^2+z^2}+\frac{2zy}{x^2+y^2+z^2}\right]+\cdots$$

$$=\hat{i}[0]+\hat{j}[0]+\hat{k}[0]=0$$

وهو المطلوب.

الجزء الثاني(ب):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\ ,\ \ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\ ,\ \vec{\nabla}\wedge\vec{H}=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}\wedge(-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=-\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(1)$$

ولكن حيث أن:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})=\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\cdot\hat{A})-\nabla^2\vec{A} \qquad \_\_\_(2)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2 E=0-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E} \qquad \_\_\_(3)$$

من (3) ,(1) نجد أن: $-\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\nabla^2\vec{E}$

$$\therefore \nabla^2\vec{E}=\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(4)$$

أيضاً وبالمثل فإن:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\vec{\nabla}\wedge(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{E})=\frac{\partial}{\partial t}(-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})=-\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(5)$$

ومن العلاقة (2):

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{H})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{H})-\nabla^2\vec{H}=0-\nabla^2\vec{H}=-\nabla^2\vec{H} \qquad \_\_\_(6)$$

من (6) ,(5) نجد أن: $-\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla^2\vec{H}$

$$\therefore \nabla^2\vec{H}=\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad \_\_\_(7)$$

من العلاقتين (7) ,(4) وبوضع $\vec{U}=\vec{E},\vec{H}$ نجد أن:

$$\nabla^2\vec{U}=\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الثاني

[تفاضل الدوال الإتجاهية]

١- إذا كانت $\bar{F}(t) = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ هي دالة اتجاهية في المتغير t

أوجد $\left|\ddot{\bar{F}}\right|, \left|\dot{\bar{F}}\right|$ عند $t=0$ ، حيث......، $\dot{\bar{F}} = \dfrac{d\bar{F}}{dt}$

٢- إذا كانت $\bar{G}(t) = (2t-3)\bar{i} + \hat{j} - t\hat{k}$ ، $\bar{F}(t) = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ دالتان تصفان مجالين اتجاهين ، فأوجد $[\bar{F}+\bar{G}]', [\bar{F}\cdot\bar{G}]', [\bar{F}\wedge\bar{G}]'$ عند $t=1$

حيث الشرطة تدل على التفاضل بالنسبة إلى t.

٣- (أ) إذا كانت $\bar{A}(t)$ دالة اتجاهية فاثبت أن:

$$\bar{A}\cdot\dot{\bar{A}} = A\dot{A} \qquad \text{حيث} \qquad \dot{\bar{A}} = \frac{d\bar{A}}{dt}$$

(ب) إذا كانت $\bar{A}(t)$ دالة اتجاهية ثابت المقدار ، فاثبت أن الدالتين $\bar{A}(t), \dot{\bar{A}}(t)$ تكونان متعامدتين.

٤- إذا كانت $\bar{r}(t) = \bar{a}\cos wt + \bar{b}\sin wt$ دالة اتجاهية حيث $\bar{a}, \bar{b}$ متجهان ثابتان، w ثابت أيضاً، فاثبت أن:

$$(i)\ \ \bar{r}\wedge\dot{\bar{r}} = w(\bar{a}\wedge\bar{b}) \qquad\qquad (ii)\ \ \ddot{\bar{r}} = -w^2\bar{r}$$

٥- إذا كان:

$$\bar{F} = \bar{F}(x,y) = (2x^2y - x^4)\hat{i} + (e^{xy} - y\sin x)\hat{j} + x^2\cos y\ \hat{k}$$

فاثبت أن:

$$\frac{\partial^2\bar{F}}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\bar{F}}{\partial y\partial x}$$

٦- (أ) إذا كانت $u = u(x, y, z), \vec{r} = (x, y, z)$ فاثبت أن:

$$du = (\vec{\nabla} u) \cdot (d\vec{r})$$

(ب) أثبت أن: $\nabla^2 (\frac{1}{r}) = 0$ حيث: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

٧- أثبت العلاقات الاتجاهية الآتية:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi$$

$$(ii) \quad \nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \psi \nabla^2 \phi$$

حيث ϕ, ψ دالتان قياسيتان .

٨- إذا كانت $\psi = xy - 3z^2$ ، $\phi = x^2 yz$ ، فأوجد:

$$(i) \quad \vec{\nabla}[(\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)] \quad , \quad (ii) \quad \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)]$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \wedge [(\vec{\nabla} \phi) \wedge (\vec{\nabla} \psi)]$$

٩- إذا كانت: $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ ، $\vec{r} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ ، متجه الوحدة في اتجاه $\vec{r}$: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ فاثبت العلاقات الآتية:

$$(i) \quad grad(r^n) = n r^{n-1} \hat{r} \quad , \quad (ii) \quad div(r^n \vec{r}) = (n+3) r^n$$

$$(iii) \quad curl(r^n \vec{r}) = 0$$

١٠- إذا كان $\hat{a}$ متجه وحدة وكانت $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ فاثبت أن:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot [(\hat{a} \cdot \vec{r}) \hat{a}] = 1 \quad , \quad (ii) \quad \vec{\nabla} \wedge [(\hat{a} \cdot \vec{r}) \hat{a}] = 0$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \cdot [(\hat{a} \wedge \vec{r}) \wedge \hat{a}] = 2 \quad , \quad (iv) \quad \vec{\nabla} \wedge [(\hat{a} \wedge \vec{r}) \wedge \hat{a}] = 0$$

<u>ملحوظة:</u>

الحلول الكاملة لهذه المسائل ملحقة بآخر القسم الأول من الكتاب [تحليل المتجهات].