القسم الأول

تحليل المتجهات

VECTOR ANALYSIS

الباب الأول

جبر المتجهات Vector Algebra

تعاريف أولية:

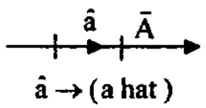
تعريف المتجه: هو كمية طبيعية تتحدد بالمقدار والاتجاه ويرمز له بالرمز $\bar{A}$ ، مثل : السرعة، القوة، كمية الحركة ،........

مقدار المتجه: هو قيمته العددية $\left|\bar{A}\right| = A$ ويقرأ مقياس $\bar{A}$ (mod).

متجه الوحدة (وحدة المتجهات):

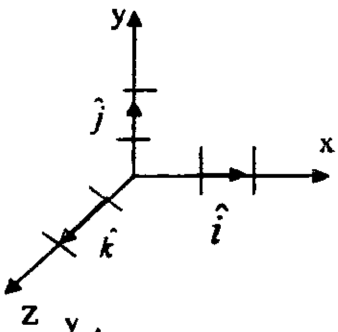
هو متجه مقداره الوحدة وله اتجاه معين $\left|\hat{a}\right| = 1$.

المتجه $\bar{A}$ يكتب بدلالة $\hat{a}$ بالصورة :



$$\bar{A} = A\,\hat{a} \rightarrow \hat{a} = \frac{\bar{A}}{A}$$

متجهات الوحدة الأساسية:



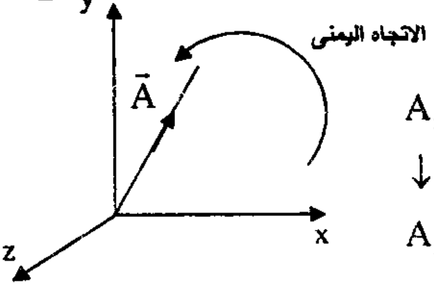
في الفراغ الاقليدي (x.y.z) ، تكون متجهات الوحدة :

$\hat{i}$ في اتجاه x، $\hat{j}$ في اتجاه y ، $\hat{k}$ في اتجاه z

هي متجهات الوحدة الأساسية ، حيث :

$$\left|\hat{i}\right| = 1 \quad , \quad \left|\hat{j}\right| = 1 \quad , \quad \left|\hat{k}\right| = 1$$

مركبات متجه:



أي متجه $\bar{A}$ له ٣ مركبات

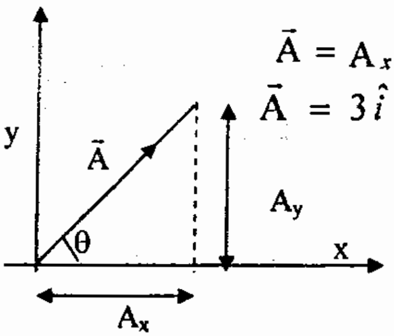
$$\begin{array}{ccccc} A_z & ، & A_y & ، & A_x \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_3 & ، & A_2 & ، & A_1 \end{array}$$

وهي كميات قياسية (أعداد) .

أي متجه يكتب بدلالة مركباته بالصورة:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

مقدار واتجاه المتجه:



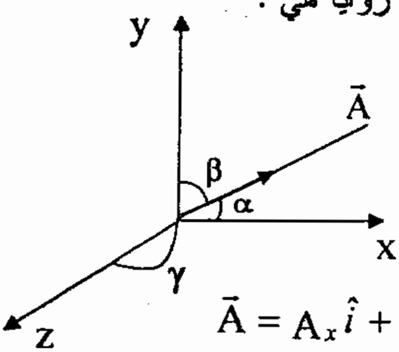
(i) في المستوى: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} = (A_x, A_y)$

فمثلاً : $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} = (3,2)$

المقدار: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

الاتجاه: $\tan\theta = \dfrac{A_y}{A_x}$

(ii) في الفراغ: المتجه $\vec{A}$ يصنع في الفراغ ٣ زوايا هي :



α (مع محور x)

β (مع محور y)

γ (مع محور z).

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} = (A_x, A_y, A_z)$$

فمثلاً : $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} = (3,2,-4)$

المقدار: $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

الاتجاه: يحدد بالزوايا الثلاث α, β, γ ، حيث :

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}, \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

وتسمى $\cos\gamma$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\alpha$ جيوب تمام الاتجاه ويرمز لها أيضا بالرموز l, m, n .

حيث: $l = \cos\alpha \quad , \quad m = \cos\beta \quad , \quad m = \cos\gamma$

أمثلة محلولة

مثال (١): إذا كان l, m, n هي جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\bar{A}$ فأثبت أن:

(i) $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$.

(ii) متجه الوحدة $\hat{a}$ في اتجاه $\bar{A}$ يعطى بالعلاقة:

$$\hat{a} = l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$$

الحل:

أولاً: من تعريف l, m, n:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$= \frac{A_x^2}{A^2} + \frac{A_y^2}{A^2} + \frac{A_z^2}{A^2}$$

$$= \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{A^2} = \frac{A^2}{A^2} = 1 \longrightarrow \text{(i)}$$

ثانيا : من تعريف متجه الوحدة:

$$\hat{a} = \frac{\bar{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{A} = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

$$= \cos\alpha\ \hat{i} + \cos\beta\ \hat{j} + \cos\gamma\ \hat{k}$$

$$= l\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k} \longrightarrow \text{(ii)}$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): أوجد متجه الوحدة $\hat{c}$ في اتجاه محصلة المتجهين:

$\bar{b} = (1,2,3)$ ، $\bar{a} = (2,4,-5)$ ، وتحقق من أن: $\left|\hat{c}\right| = 1$.

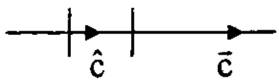
الحل: بكتابة $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ بالصورة الإتجاهية :

$$\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} \text{ ، } \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

محصلتهما (أي مجموعهما ألاتجاهي):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

متجه الوحدة في اتجاه $\vec{c}$:



$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}}$$

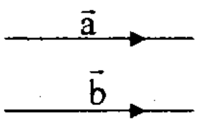
$$= \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{9+36+4}} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}\hat{i} + \frac{6}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$$

وللتحقق من أن: $|\hat{c}| = 1$

$$|\hat{c}| = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{-2}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 36 + 4}{49}} = \sqrt{\frac{49}{49}} = 1$$

المتجهات المتوازية:



يقال أن $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ متوازيان إذا كانت تربطهما علاقة خطية أي إذا كان $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ، حيث λ عدد قياسي.

$\lambda < 0$ $\vec{a} = -\lambda \vec{b}$ $\vec{a}, \vec{b}$ في اتجاهين متعاكسين $\vec{b} \longrightarrow$ $\vec{a} \longleftarrow$	$\lambda > 0$ $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ $\vec{a}, \vec{b}$ في نفس الاتجاه $\vec{b} \longrightarrow$ $\vec{a} \longrightarrow$

مثال: إذا كان لدينا المتجهات الثلاثة:

$$\vec{a} = (15 , -6 , 24)$$
$$\vec{b} = (5 , -2 , 8)$$
$$\vec{c} = (-\frac{15}{2} , 3 , -12)$$

فأثبت أن المتجهات الثلاثة متوازية، وأن $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ لهما نفس الاتجاه ، بينما $\vec{c}$ ، $\vec{a}$ في اتجاهين متضادين .

الحل: نكتب المتجهات الثلاثة في الصورة الاتجاهية:

$$\vec{a} = 15\,\hat{i} - 6\,\hat{j} + 24\,\hat{k}$$
$$\vec{b} = 5\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 8\,\hat{k}$$
$$\vec{c} = -\frac{15}{2}\,\hat{i} + 3\,\hat{j} - 12\,\hat{k}$$

واضح أن هناك علاقات بين المتجهات الثلاثة:

(i) علاقة بين $\vec{a},\vec{b}$:

$$\vec{a} = 3(5\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}) = 3\vec{b} = \lambda\vec{b}$$

وهذا يعني أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{b}$ وفي نفس الاتجاه $(\lambda \rangle 0)$.

(ii) علاقة بين $\vec{a},\vec{c}$:

$$\vec{a} = -2(-\frac{15}{2}\hat{i} + 3\hat{j} - 12\hat{k}) = -2\vec{c} = \lambda\vec{c}$$

وهذا يعني أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{c}$ وفي عكس الاتجاه $(\lambda > 0)$.

وحيث أن $\vec{a}$ يوازي $\vec{b}$ ، $\vec{a}$ يوازي $\vec{c}$ فإن المتجهات الثلاثة تكون متوازية .

نظرية (١):

أثبت أنه إذا كان المتجهان $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ غير متوازيين فان العلاقة: $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$ تستلزم أن يكون $x = 0 , y = 0$.

الإثبات:

معنى أن $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ غير متوازيين هو:

$$\vec{a} \neq \lambda \vec{b}$$

في العلاقة المعطاة : $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$ حيث $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ غير متوازيين .

المطلوب: إثبات أن:

$$x = 0 , y = 0$$

ولإثبات ذلك : نفرض عكس المطلوب: أي نفرض أن $x \neq 0$

$$\therefore x\bar{a} = -y\bar{b} \rightarrow \bar{a} = -\frac{y}{x}\bar{b} = \lambda\bar{b}$$

وهذا يعني أن $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ متوازيان ، وهو عكس المعطى في رأس المسألة ، وإذن: الفرض الذي فرضناه يكون خطأ ويكون الصح هو عكسه أي أن $x = 0$ ومن ذلك $y\vec{b} = 0 \leftarrow y = 0$.

وهو المطلوب.

نظرية (٢):

إذا كان $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ متجهان غير متوازيين، وكان :

$$x_1 \bar{a} + y_1 \bar{b} = x_2 \bar{a} + y_2 \bar{b}$$

فإن :

$$x_1 = x_2 \quad , \quad y_1 = y_2$$

الإثبات:

حيث أن :

$$x_1\bar{a}+y_1\bar{b}=x_2\bar{a}+y_2\bar{b}$$
$$\therefore (x_1-x_2)\bar{a}+(y_1-y_2)\bar{b}=0$$
$$(x\bar{a}+y\bar{b})=0$$

ومن النظرية (١):

فإن $y=0$, $x=0$ (لأن $\bar{b}$ ، $\bar{a}$ غير متوازيين)

$$x_1-x_2=0 \quad ، \quad y_1-y_2$$
$$x_1=x_2 \quad ، \quad y_1=y_2$$

وهو المطلوب .

الارتباط الخطي والاستقلال الخطي للمتجهات:

أولاً: الارتباط الخطي:

يقال أن مجموعة المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ مرتبطة خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية $a,b,c,....$ ليست كلها أصفار ، وبحيث أن العلاقة: $a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}+.....=0$ تكون محققة.

ثانياً: الاستقلال الخطي:

يقال أن مجموعة المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ مستقلة (أو غير مرتبطة) خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية $a,b,c,....$ كلها أصفار أي $a=b=c=\cdots=0$ مع تحقق العلاقة: $a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}=0$.

مثال (١):

أثبت أن مجموعة المتجهات :

$$\vec{r}_1=(0,1,-2)\text{،}\quad \vec{r}_2=(1,-1,1)\text{،}\quad \vec{r}_3=(1,2,1)$$

تشكل مجموعة مستقلة خطياً.

الحل:

نكتب المتجهات بالصورة الاتجاهية:

$$\vec{r}_1=\hat{j}-2\hat{k}\quad,\quad \vec{r}_2=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\quad,\quad \vec{r}_3=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$$

هذه المتجهات تكون مستقلة خطياً، إذا وجدت مجموعة أعداد قياسية k_1, k_2, k_3 كلها تساوي أصفار، مع وجود العلاقة:

$$k_1\vec{r}_1+k_2\vec{r}_2+k_3\vec{r}_3=0 \qquad \rightarrow(1)$$

بالتعويض عن $\vec{r}_1\ ,\ \vec{r}_2\ ,\ \vec{r}_3$ في (١) نحصل على:

$$k_1(\hat{j}-2\hat{k})+k_2(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})k_3(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=0$$

$$\therefore (k_2+k_3)\hat{i}+(k_1-k_2+2k_3)\hat{j}+(-2k_1+k_2+k_3)\hat{k}=0$$

ولكن من النظرية (١) إذا كان:

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=0$$

وكانت $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ غير متوازية فان: $x=0\,,\,y=0\,,\,z=0$ ولما كانت $\hat{i}\,,\,\hat{j}\,,\,\hat{k}$ هي متجهات غير متوازية، فان:

$$k_2+k_3=0 \qquad \to (2)$$

$$k_1-k_2+2k_3=0 \qquad \to (3)$$

$$-2k_1+k_2+k_3=0 \qquad \to (4)$$

بحل هذه المعادلات نوجد $k_1\,,\,k_2\,,\,k_3$ كالآتي:

من (٢):

$$k_2=-k_3 \qquad \to (5)$$

بالتعويض في (٣):

$$k_1+k_3+2k_3=0$$

$$k_1+3k_3=0 \to k_1=-3k_3 \qquad \to (6)$$

بالتعويض من (٥) في (٤):

$$-2k_1-k_3+k_3=0$$

$$\therefore -2k_1=0 \to k_1=0 \;\therefore -2k_1=0 \to k_1=0$$

ومن (٦) :

$$-3k_3=0 \to k_3=0$$

ومن (٥):

$$k_2=0$$

$$\therefore k_1=k_2=k_3=0$$

∴ مجموعة المتجهات المعطاة تكون مستقلة خطياً.

<u>مثال (٢)</u>: أثبت أن مجموعة المتجهات :

$$\vec{A} = (2,1,-3) \quad , \quad \vec{B} = (1,0,-4) \quad , \quad \vec{C} = (4,3,-1)$$

تكون مترابطة خطياً .

<u>الحـل</u>: بكتابة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ في صورة إتجاهية:

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} \quad , \quad \hat{B} = \hat{i} - 4\hat{k} \ , \ \vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$$

المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ تكون مترابطة خطياً ، إذا كان هناك مجموعة أعداد قياسية a,b,c ليست كلها أصفاراً بحيث أن:

$$a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

بتطبيق العلاقة (١) على المتجهات المعطاه:

$$\therefore a\left(2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}\right) + b\left(\hat{i} - 4\hat{k}\right) + c\left(4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}\right) = 0$$

$$\therefore (2a + b + 4c)\hat{i} + (a + 3c)\hat{j} + (-3a - 4b - c)\hat{k} = 0$$

وحيث أن $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ غير متوازية ، فمن نظرية (١):

$$2a + b + 4c = 0 \quad , a + 3c = 0 \quad , \ 3a + 4b + c = 0$$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نجد أن :

$$a = -3 \ , \ b = 2 \quad , \ c = 1$$

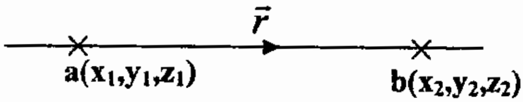
أي أن مجموعة الأعداد a,b,c ليست كلها أصفاراً وبالتالي فإن المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ المعطاه تكون مرتبطة خطياً .

وهو المطلوب .

تطبيقات هندسية

١- إيجاد المتجه الواصل بين نقطتين في الفراغ:

المتجه $\vec{r}$ يصل بين النقطتين a, b



$$\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

وتكون المسافة بين النقطتين a, b هي:

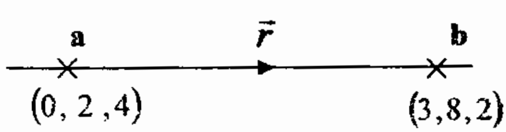
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال عددي:

أوجد المتجه الواصل بين النقطتين a, b اللتين إحداثياتهما هما: $b = (3,8,2)$, $a = (0,2,4)$ وكذلك مقدار المسافة بينهما.

الحل:

المتجه $\vec{r} = \vec{ab}$



حيث:

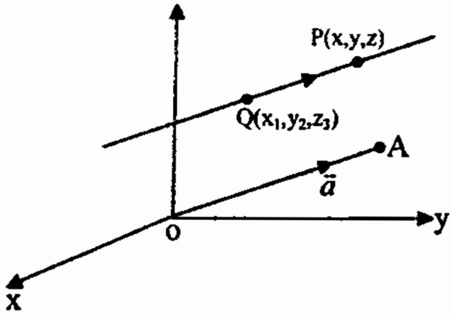
$$\vec{r} = (3-0)\hat{i} + (8-2)\hat{j} + (2-4)\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

المسافة بين a, b هي:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

٢- **المعادلات البارامترية لمستقيم يمر بالنقطة** $Q(x_1, y_1, z_1)$

ويوازي المتجه $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$:



نأخذ نقطة $p(x, y, z)$ على المستقيم

فحيث أن المستقيم مواز للمتجه $\vec{a}$ فإن :

$\overline{QP} = \lambda\ \overline{OA}$ حيث λ عدد قياسي .

وفي صورة إتجاهية :

$$(x - x_1)\,\hat{i} + (y - y_1)\,\hat{j} + (z - z_1)\,\hat{k} = \lambda\,(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$$

بمساواة معاملات $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$:

$$x - x_1 = \lambda\ a_1 \longrightarrow x = x_1 + \lambda\ a_1 \qquad \_\_\_\_\_\ (1)$$

$$y - y_1 = \lambda\ a_2 \longrightarrow y = y_1 + \lambda\ a_2 \qquad \_\_\_\_\_\ (2)$$

$$z - z_1 = \lambda\ a_3 \longrightarrow z = z_1 + \lambda\ a_3 \qquad \_\_\_\_\_\ (3)$$

المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) هي المعادلات البارامترية المطلوبة .

مثال عددي:

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $Q(5,-2,4)$ ويوازي المتجه $\vec{a}(3,12,-4)$.

الحل: المعادلات البارامترية هي :

$$x = x_1 + \lambda\ a_1\ ,\quad y = y_1 + \lambda\ a_2\ ,\quad z = z_1 + \lambda\ a_3$$

أي :

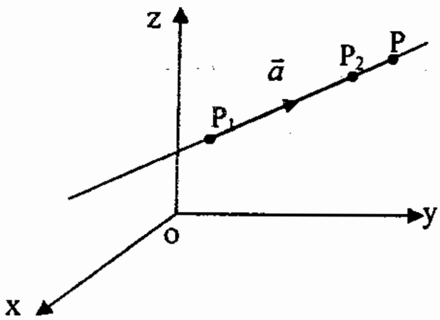
$$x = 5 + 3\lambda\ ,\quad y = -2 + 12\lambda\ ,\quad z = 4 - 4\lambda$$

ملحوظة : يمكن كتابة هذه المعادلات بالصورة الآتية :

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{12} = -\frac{z-4}{4}$$

٣- **المعادلات البارامترية لمستقيم يمر بنقطتين إختياريتين** p_1 , p_2 :

نفرض النقطتين $p_2(x_2,y_2,z_2)$, $p_1(x_1,y_1,z_1)$ ولتكن $p(x,y,z)$ نقطة ما على المستقيم



$$\therefore \overrightarrow{p_1p} = \lambda\, \overrightarrow{p_1p_2}$$

وفي صورة إتجاهية :

$$(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}$$
$$=\lambda\left[(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}\right]$$

بمقارنة معاملات $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$:

$$\therefore x-x_1=\lambda(x_2-x_1) \longrightarrow x=x_2+\lambda(x_2-x_1) \quad \_\_\_(1)$$
$$y-y_1=\lambda(y_2-y_1) \longrightarrow y=y_2+\lambda(y_2-y_1) \quad \_\_\_(2)$$
$$z-z_1=\lambda(z_2-z_1) \longrightarrow z=z_2+\lambda(z_2-z_1) \quad \_\_\_(3)$$

المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) هي المعادلات البارامترية للمستقيم .

مثال عددي: أوجد المعادلات البارمترية للمستقيم المار بالنقطتين:

$p_1(3,1,-2)$, $p_2(-2,7,-4)$

الحـل: نوجد المتجه :

$$\overline{p_1p_2}=(-2-3)\hat{i}+(7-1)\hat{j}+(-4+2)\hat{k}=-5\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}$$

وبأخذ p (x,y,z) نقطة ما على المستقيم فتكون المعادلات المطلوبة هي :

$$x=x_1+\lambda(x_2-x_1) \longrightarrow x=3+\lambda(-5)=3-5\lambda$$
$$x=y_1+\lambda(y_2-y_1) \longrightarrow y=1+\lambda(6)=1+6\lambda$$
$$z=z_1+\lambda(z_2-z_1) \longrightarrow z=-2+\lambda(-2)=-2-2\lambda$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات بالصورة :

$$-\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{6}=-\frac{z-2}{2} \rightarrow \frac{x-3}{5}=-\frac{y-1}{6}=\frac{z-2}{2}$$

٤- معادلة المستقيم الذي يمر بنقطتين معلوم متجهي موضعيهما:

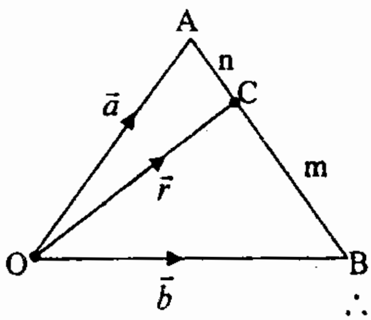
لإيجاد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A,B اللذان متجها موضعهما $\vec{a},\vec{b}$ وذلك بالصورة :

$$\vec{r}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}$$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع أي نقطة على المستقيم ، m,n عددان قياسيان .

الإثبات: يعرف متجه الموضع لأي نقطة بأنه المتجه الواصل من نقطة الأصل إلى النقطة ، فبأخذ المستقيم المار بالنقطتين A,B اللذان متجهاً موضعهما $\vec{a},\vec{b}$ بالنسبة لنقطة الأصل O ، وأخذ المتجه $\vec{r}$ هو متجه موضع أي نقطة C على المستقيم .

فمن المثلث OCA :



$$\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$$

$$\therefore \overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}=\vec{r}-\vec{a} \qquad \_\_\_(1)$$

ومن المثلث OAB :

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=\vec{b}-\vec{a} \qquad \_\_\_(2)$$

ولكن : $\overline{OB}=\vec{r}+\overline{CB}$

$$\therefore \overline{CB}=\overline{OB}-\vec{r}=\vec{b}-\vec{r} \qquad \_\_\_(3)$$

$\overline{AC},\overline{CB}$ تقع على المستقيم AB فيكون لدينا علاقة خطية تربطهما ، وهذه العلاقة يمكن كتابتها بالصورة :

$$m\overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{CB} \qquad \_\_\_\_(4) \quad \to \frac{AC}{CB} = \frac{n}{m}$$

حيث m,n عددان قياسيان .

بالتعويض من (١) ، (٣) في (٤) :

$$\therefore m(\vec{r} - \vec{a}) = n(\vec{b} - \vec{r})$$

$$\therefore (m+n)\vec{r} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

$$\therefore \vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n} \qquad \_\_\_\_(I)$$

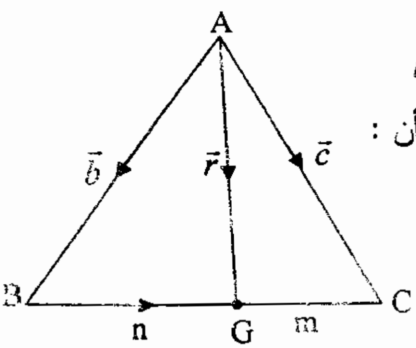
ويمكن كتابة هذه العلاقة بالصورة :

$$m\vec{a} + n\vec{b} = (m+n)\,\vec{r} \qquad \_\_\_\_(II)$$

وهو المطلوب .

مثال: إذا كانت نقطة G الواقعة على قاعدة المثلث ABC تقسم تلك القاعدة بحيث أن : m BG = n GC ، فأثبت أن :

$$m(BG)^2 + n(CG)^2 + (m+n)(AG)^2 = m(AB)^2 + n(AC)^2$$



الحل: نأخذ A كنقطة أصل ، وبفرض أن $\vec{b},\vec{c}$ هما متجها موضع B,C على التوالي ؛ وحيث أن :

m BG = n GC فإن :

$$\frac{BG}{GC} = \frac{n}{m} \longrightarrow BG : GC = n : m$$

ومن العلاقة (I) : إذا كانت $\vec{r}$ هي متجه موضع نقطة G فإن :

$$\frac{+n\vec{c}}{m+n} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

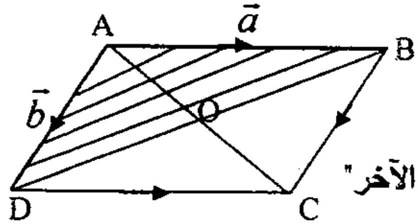
ولنأخذ الطرف الأيسر من العلاقة المطلوب إثباتها :

$$L.H.S. = m(BG)^2 + n(CG)^2 + (m+n)(AG)^2$$
$$= m\left(\overrightarrow{BG}\right)^2 + n\left(\overrightarrow{CG}\right)^2 + (m+n)\left(\overrightarrow{AG}\right)^2$$
$$= m\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right)^2 + n\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG}\right)^2 + (m+n)\left(\overrightarrow{AG}\right)^2$$
$$= m\left(-\vec{b} + \vec{r}\right)^2 + n\left(-\vec{c} + \vec{r}\right)^2 + (m+n)\left(\vec{r}\right)^2$$
$$= m\left[-\vec{b} + \frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 + n\left[-\vec{c} + \frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2 + (m+n)\left[\frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2$$
$$= m\left[\frac{-\vec{b}\,(m+n) + \left(m\vec{b} + n\vec{c}\right)}{m+n}\right]^2 + n\left[\frac{-\vec{c}\,(m+n) + \left(m\vec{b} + n\vec{c}\right)}{m+n}\right]^2 + (m+n)\left[\frac{m\vec{b} + n\vec{c}}{m+n}\right]^2$$
$$= \frac{1}{(m+n)^2}\left[m\,n^2\left(\vec{c} - \vec{b}\right)^2 + n\,m^2\left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2 + (m+n)\left(m\vec{b} + n\vec{c}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{(m+n)^2}\left[m\,n(m+n)\left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2 + (m+n)\left(m\vec{b} + n\vec{c}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{m+n}\left[m\,n\left\{\vec{b}^{\,2} - 2\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) + \vec{c}^{\,2}\right\} + m^2\vec{b}^{\,2} + 2m\,n\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right) + n^2\vec{c}^{\,2}\right]$$
$$= \frac{1}{m+n}\left[m(m+n)\vec{b}^{\,2} + n(m+n)\vec{c}^{\,2}\right]$$
$$= m\vec{b}^{\,2} + n\vec{c}^{\,2} = m(b)^2 + n(c)^2$$
$$= m(AB)^2 + n(AC)^2 = R.H.S.$$

وهو المطلوب .

٥- تطبيقات المتجهات في الهندسة الإقليدية:

يمكن استخدام المتجهات في إثبات بعض النظريات في الهندسة الاقليدية كما في الأمثلة الآتية:



مثال (١):

باستخدام المتجهات أثبت أن:

" قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر"

الإثبات:

نفرض أن القطرين AC, DB يتقاطعان عند O ، وأن:

$$\overline{AB}=\vec{a},\overline{AD}=\vec{b}$$

القطر AC:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \qquad \rightarrow(1)$$

القطر DB:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$$

$$\therefore \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b} \qquad \rightarrow(2)$$

حيث : $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}$

أيضا:إذا كانت μ, λ أعداد قياسية فإن:

$$\overline{AO}=\lambda(\overline{AC})=\lambda(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overline{DO}=\mu(\overline{DB})=\mu(\vec{a}-\vec{b})$$

ومن Δ AOD نجد أن :

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}$$

$$\therefore \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\vec{b}+\mu(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\therefore (\lambda-\mu)\vec{a}=(1-\mu-\lambda)\vec{b}$$

ولكن $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ متجهان غير متوازيان، فان:

$$\lambda-\mu=0$$
$$1-\mu-\lambda=0$$

بحل المعادلتين:

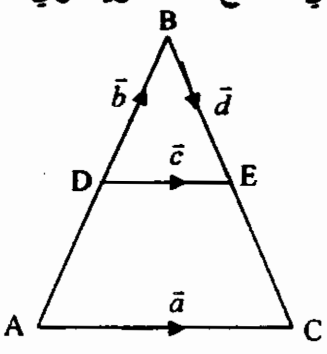
$$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$$
$$\therefore \overline{AO}=\lambda(\overline{AC})=\frac{1}{2}\overline{AC}$$
$$\overline{DO}=\mu(\overline{DB})=\frac{1}{2}\overline{DB}$$

أي أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر ، وهو المطلوب.

مثال(٢):

باستخدام المتجهات اثبت أن:

" المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه"



الإثبات:

في المثلث ABC المستقيم DE يصل بين منتصفي الضلعين AB,BC وبأخذ :

$$\overline{AC}=\vec{a},\overline{AB}=\vec{b},\overline{DE}=\vec{C},\overline{BC}=\vec{d}$$

نكون العلاقات الاتجاهية الآتية:

من الشكل :

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$
$$\therefore \vec{a}=\vec{b}+\vec{d} \qquad \rightarrow (1)$$

أيضاً:

$$\overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE}$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) \quad \to (2)$$

حيث :

$$\overline{DB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\vec{d}$$

من (١) و(٢) نحصل على:

$$\vec{C} = \frac{1}{2}\vec{a} \quad \to (3)$$

$$|\vec{c}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AC \quad \to (4)$$

ومن (٣) $\leftarrow$ $\vec{C} = \lambda\vec{a}$

$$\therefore \vec{c} // \vec{a} \quad \to (5)$$

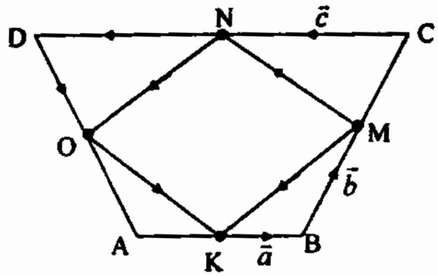
من(٤) و(٥) ينتج أن:

المستقيم DE الواصل بين منتصفي الضلعين AB, BC في المثلث ABCيوازي الضلع الثالث AC ويساوي نصفه في الطول ، وهو المطلوب .

<u>مثال (٣):</u> بإستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية :

" إذا وصلت منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعي بمستقيمات فإن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي الأضلاع " .

الإثبات:



إذا كان لدينا المتجهات الأربع

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ تشكل مضلعاً مقفلاً فإن :

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=0$ _____(1)

وبفرض أن ABCD هو الشكل الرباعي المعطي ، وأن K,M,N,O هـي منتصفات أضلاعه المتتالية ، فبتوصيل هذه المنتصفات بالمستقيمات المبينة بالشكل ، وكتابة :

$\overline{AB}=\vec{a}\ ,\ \overline{BC}=\vec{b}\ ,\ \overline{CD}=\vec{c}\ ,\ \overline{DA}=\vec{d}$

أيضاً فإن :

$\overline{KB}=\frac{1}{2}\vec{A}\quad ,\quad \overline{BM}=\frac{1}{2}\vec{b}$

ومن هندسة الشكل نجد أن :

$\overline{KM}=\overline{KB}+\overline{BM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ _____(2)

$\overline{MN}=\overline{MC}+\overline{CN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ _____(3)

$\overline{NO}=\overline{ND}+\overline{DO}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ _____(4)

$\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AK}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{a})$ _____(5)

ومن (١) :

$(\vec{a}+\vec{b})=-(\vec{c}+\vec{d})$ _____(6)

$(\vec{b}+\vec{c})=-(\vec{a}+\vec{d})$ _____(7)

بالتعويض من (٦) ، (٧) في (٢) ، (٣) وأستخدام (٤) ، (٥) :

$$\therefore \overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=-\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{ON} \quad \_\_\_\_(8)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=-\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{d}\right)=-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{KO} \quad \_\_\_\_(9)$$

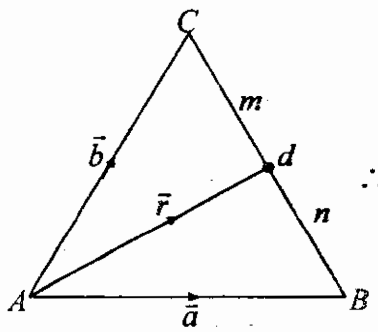
من (٨) ، (٩) نجد أن: MN = KO (ويوازيه) ، KM = ON (ويوازيه)

وهذا يعني أن الشكل KMON هو متوازي أضلاع ، وهو المطلوب .

أمثلة منوعة

قبل البدء في حل هذه الأمثلة نورد ما يلي:

من العلاقة (I) في البند السابق وهي:



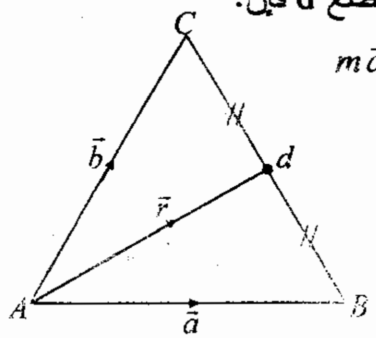
$$\vec{r}=\frac{m\vec{a}+n\vec{b}}{m+n}$$

$$\therefore m\vec{a}+n\vec{b}=(m+n)\,\vec{r}$$

وهذا يعني أنه إذا كانت d تقسم CB

بنسبة $m:n$ $\left(\frac{dC}{Bd}=\frac{m}{n}\right)$

وكانت $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ وكانت $\vec{r}$ متجه موضع d فإن:



$$m\vec{a}+n\vec{b}=(m+n)\,\vec{r}$$

وكحالة خاصة:

إذا كانت d في منتصف CB فإن $m=n$

$$\therefore m\vec{a}+n\vec{b}=(n+n)\,\vec{r}$$

$$\therefore \vec{a}+\vec{b}=2\,\vec{r} \rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{Ad}$$

ونستخدم هذه العلاقة كثيراً في حل المسائل ويتضح ذلك في بعض الأمثلة التالية.

مثال(١): بإستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية:

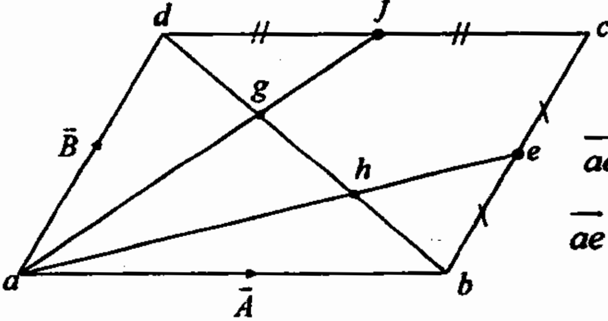
" المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقـــابلين يقسمان القطر إلى ثلاثة أقسام متساوية " .

الحل:

نفرض أن abcd متوازي أضلاع فيه e,f منتصفا الـــضلعين cd , bc ولـــيكن
$\overline{ab} = \vec{A}\ , \overline{ad} = \vec{B}$

والمطلوب إثبات أن: $\overline{dg} = \frac{1}{3}\overline{db}\ ,\ \overline{hb} = \frac{1}{3}\overline{db}$

أي أن $dg = gh = hb$



من المثلث abe :

$\overline{ae} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$ ______ (1)

المتجه $\overline{ah}$ في إتجاه المتجه $\overline{ae}$

ولذلك فإن:

$\overline{ah} = \lambda\ \overline{ae} = \lambda\ (\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B})$ ______ (2)

حيث λ عدد قياسي .

بالمثل: فإن:

$\overline{ab} = \vec{A} - \vec{B}$ ______ (3)

$\overline{hb} = \mu\ \overline{db} = \mu\ (\vec{A} - \vec{B})$ ______ (4)

حيث μ عدد قياسي.

من المثلث abh:

$$\vec{A}=\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{ah}+\overrightarrow{hb}=\lambda(\vec{A}+\frac{1}{2}\vec{B})+\mu(\vec{A}-\vec{B})$$

$$\therefore(\lambda+\mu-1)\vec{A}+(\frac{\lambda}{2}-\mu)\ \vec{B}=0 \qquad \_\_\_\_\_ (5)$$

وحيث أن $\vec{A}\,,\vec{B}$ متجهان غير متوازيين فإن:

$$\lambda+\mu-1=0 \qquad \_\_\_\_\_ (6)$$

$$\frac{\lambda}{2}-\mu=0 \qquad \_\_\_\_\_ (7)$$

من (7):

$$\lambda=2\mu \qquad \_\_\_\_\_ (8)$$

بالتعويض في (6) :

$$2\mu+\mu-1=0 \ \rightarrow\ \mu=\frac{1}{3} \qquad \_\_\_\_\_ (9)$$

وبالتعويض في (8):

$$\therefore\lambda=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\overline{hb}=\mu\,\overline{db}=\frac{1}{3}\overline{db} \qquad \_\_\_\_ (10)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\overline{dg}=\frac{1}{3}\,\overline{db} \qquad \_\_\_\_ (11)$$

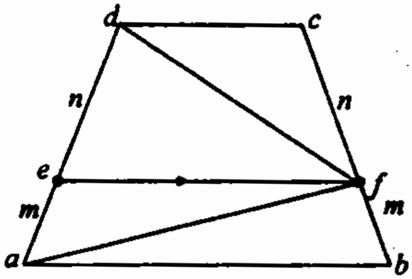
ومن (11) ، (10) نجد أن:

$$hb=dg=gh$$

أي أن المستقيمان الواصلان من رأس متوازي الأضلاع إلى منتصف الضلعين المقابلين يقسمان القطر إلى ٣ أقسام متساوية. وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> abcd شكل رباعي فيه e,f نقطتان على bc , ad على الترتيب بحيث أن: $\frac{ae}{ed}=\frac{bf}{fc}=\frac{m}{n}$ ، أثبت أن: $n\overline{ab}+m\overline{dc}=(n+m)\overline{ef}$.

الحل:



في الشكل الرباعي abcd نصل df , af

في المثلث afd:

$n\overrightarrow{af} + m\overrightarrow{df} = (n+m)\overrightarrow{ef}$ _____ (1)

[نظرية]

في المثلث abf:

$\overrightarrow{af} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bf}$ _____ (2)

في المثلث dcf:

$\overrightarrow{df} = \overrightarrow{dc} + \overrightarrow{cf}$ _____ (3)

بالتعويض من (3) , (2) في (1):

$n\overrightarrow{ab} + n\overrightarrow{bf} + m\overrightarrow{dc} + m\overrightarrow{cf} = (n+m)\overrightarrow{ef}$ _____ (4)

ولكن:

$$\frac{bf}{fc} = \frac{m}{n}$$

$\therefore n\overrightarrow{bf} = m\overrightarrow{fc} = -m\overrightarrow{cf}$

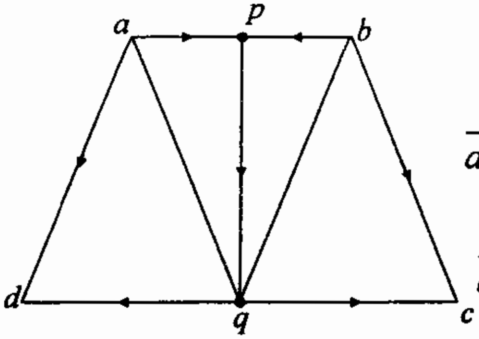
$\therefore n\overrightarrow{bf} + m\overrightarrow{cf} = 0$ _____ (5)

بالتعويض من (5) في (4):

$\therefore n\overrightarrow{ab} + m\overrightarrow{dc} = (n+m)\overrightarrow{ef}$

وهو المطلوب.

مثال(٣): abcd شكل رباعي فيه النقطة p منتصف الضلع ab والنقطة q منتصف الضلع cd ، أثبت أن: $\overrightarrow{ad} + \overrightarrow{bc} = 2\overrightarrow{pq}$



<u>الحل:</u>

في الشكل apqd :

(1) ______ $\overline{ad} = \overline{ap} + \overline{pq} + \overline{qd}$

في الشكل pdcq:

(2) ______ $\overline{bc} = \overline{bp} + \overline{pq} + \overline{qc}$

وحيث أن p تقع في منتصف ab فإن:

(3) ______ $\overline{ap} = -\overline{bp}$

وحيث أن q تقع في منتصف cd فإن:

(4) ______ $\overline{qd} = -\overline{qc}$

بجمع (2) ، (1) واستخدام (4) ، (3) نجد أن:

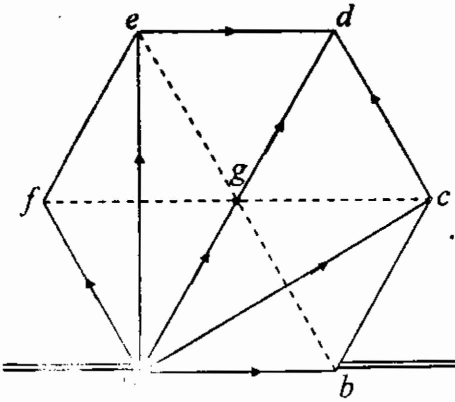
$$\overline{ad} + \overline{bc} = \overline{ap} + \overline{bp} + 2\,\overline{pq} + \overline{qd} + \overline{qc}$$
$$= -\overline{bp} + \overline{bp} + 2\,\overline{pq} - \overline{qc} + \overline{qc} = 2\,\overline{pq}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> abcdef شكل سداسي منتظم مركزه g أثبت أن:

(i) $\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ae} + \overline{af} = 3\,\overline{ad}$

(ii) $\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ae} + \overline{af} = 4\,\overline{ag}$



<u>الحل:</u>

في المثلث ade: $\overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ed}$

ولكن : $\overline{ed} = \overline{ab}$ (من خواص المسدس)

(1) ______ $\therefore\ \overline{ad} = \overline{ae} + \overline{ab}$

في المثلث acd: $\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{cd}$

ولكن: $\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{af}$ (من خواص المسدس).

(2) ____ $\therefore \overrightarrow{ad}=\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{af}$

بجمع (2) , (1) :

$$2\overrightarrow{ad}=\overrightarrow{ae}+\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{af}$$

وبإضافة $\overrightarrow{ad}$ للطرفين نحصل على:

(i) ____ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{ae}+\overrightarrow{af}=3\overrightarrow{ad}$

<u>ثانياً</u>: نصل cf , be فيتقابلان في g (مركز المسدس).

في المثلث abe:

(3) ____ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ae}=2\overrightarrow{ag}$ [حيث $eg=gb$]

في المثلث acf:

(4) ____ $\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{af}=2\overrightarrow{ag}$ [حيث $fg=gc$]

بجمع (4) , (3) نجد أن:

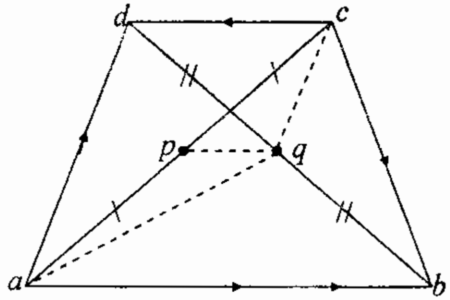
(ii) ____ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{ae}+\overrightarrow{af}=4\overrightarrow{ag}$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٥):</u> abcd شكل رباعي فيه p,q منتصفا ac,bd على الترتيب ، أثبت أن :

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=4\,\overrightarrow{pq}$$

<u>الحل:</u>



نصل aq,cq:

(1) ____ $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}=2\overrightarrow{aq}$

في المثلث cbd:

(2) ____ $\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2\overrightarrow{cq}$

بجمع (2),(1) نحصل على:

$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2(\overrightarrow{aq}+\overrightarrow{cq})$$ ______ (3)

ومن المثلث acq:

$$\overrightarrow{aq}+\overrightarrow{cq}=2\overrightarrow{pq}$$ ______ (4)

وبالتعويض من (4) في (3):

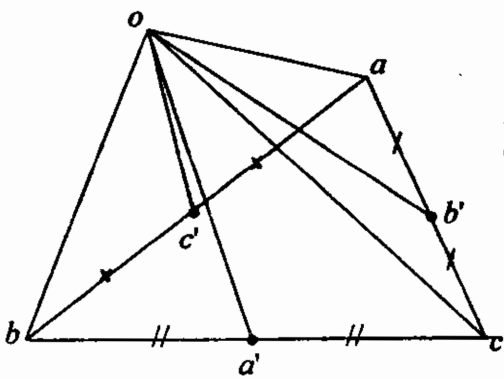
$$\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}+\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{cd}=2(2\overrightarrow{pq})=4\overrightarrow{pq}$$

وهو المطلوب.

مثال(٦): إذا كانت a',b',c' هي منتصفات أضلاع المثلث abc وكانت o نقطة إختيارية خارج المثلث ، أثبت أن: $\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'}$

الحل:

نصل a,b,c وكذلك a',b',c' بالنقطة o .



في المثلث oab:

$$\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}=2\overrightarrow{oc'}$$ ______ (1)

في المثلث obc:

$$\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=2\overrightarrow{oa'}$$ ______ (2)

في المثلث oca:

$$\overrightarrow{oc}+\overrightarrow{oa}=2\overrightarrow{ob'}$$ ______ (3)

بجمع (1),(2),(3):

$$2(\overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc})=2(\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'})$$

$$\therefore \overrightarrow{oa}+\overrightarrow{ob}+\overrightarrow{oc}=\overrightarrow{oa'}+\overrightarrow{ob'}+\overrightarrow{oc'}$$

وهو المطلوب.

ضرب المتجهات:

(١) **ضرب كميه قياسية في متجه:** إذا كانت λ كمية قياسية فإن حاصل الضرب $\left(\lambda \vec{A}\right)$ هو : متجه طوله λ مره قدر $\vec{A}$ وفي اتجاه $\vec{A}$.

(٢) **ضرب متجه في متجه:** يوجد لدينا حالتان :

[١] حاصل الضرب كمية قياسية

$\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$

(حاصل ضرب قياسي)

[٢] حاصل الضرب كمية متجهه

$\left(\vec{A} \wedge \hat{B}\right)$

(حاصل ضرب اتجاهي)

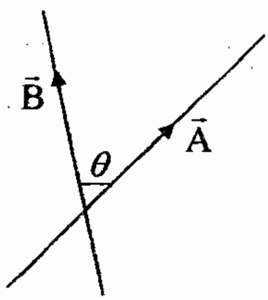
أولا: حاصل الضرب القياسي :

تعريف: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A\,B \cos 0$

واضحا من التعريف أن: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

أيضا: الزاوية θ بين المتجهين:

من العلاقة السابقة: $\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$



شرط تعامد متجهين: $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

ضرب متجه في نفسه قياسيا:

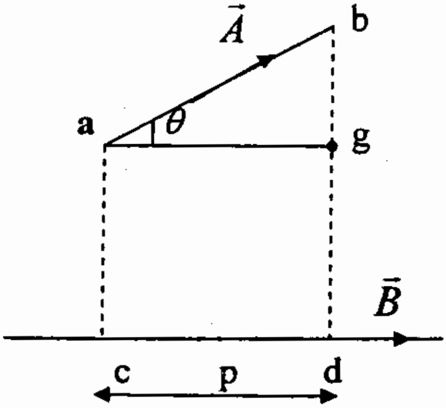
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AA\cos 0 = A^2$$

$$\therefore \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

حاصل الضرب $\vec{A}\cdot\vec{B}$ بدلالة المركبات:

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}=(A_x,A_y,A_z)$$
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}=(B_x,B_y,B_z)$$
$$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

مسقط متجه على متجه آخر:



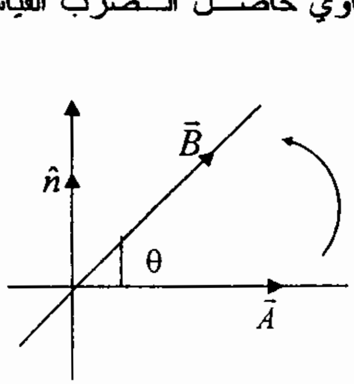
مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هو:

$$p=cd=ag=ab\cos\theta$$
$$=\left|\vec{A}\right|\cos\theta=\left|\vec{A}\right|\left(\frac{\vec{A}\cdot B}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}\right)$$
$$\therefore P=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}=\vec{A}\cdot\hat{b}$$

حيث: $\hat{b}=\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}$ هو متجه وحده في اتجاه $\vec{B}$.

أي أن مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$ يساوي حاصل الضرب القياسي للمتجه $\vec{A}$ في متجه الوحدة في اتجاه $\vec{B}$.

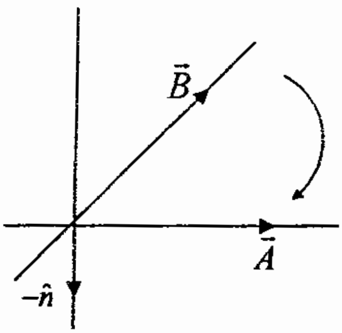
ثانياً :حاصل الضرب الاتجاهي :



الاتجاه اليميني ضد عقارب الساعة

تعريف:

$\vec{A}\wedge\vec{B}=(AB\sin\theta)\hat{n}$ حيث $\hat{n}$ هو متجه وحده في اتجاه المتجه $\vec{A}\wedge\vec{B}$ الذي هو الاتجاه العمودي على كل من $\vec{A},\vec{B}$.



الاتجاه اليساري مع عقارب الساعة

أيضاً :

$$\vec{B}\wedge\vec{A}=(AB\sin\theta)(-\hat{n})$$
$$=-AB\sin\theta\,\hat{n}=-\vec{A}\wedge\vec{A}$$
$$\therefore \vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$$

__الزاوية بين المتجهين:__

من العلاقة:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=AB\sin\theta\;\hat{n}$$

فإن مقدار $(\vec{A}\wedge\vec{B})$ هو:

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}|=|AB\sin\theta\;\hat{n}|=AB\sin\theta$$

$$|\hat{n}|=1$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{|\vec{A}\wedge\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

__شرط توازي متجهين:__

$$\theta=0\quad,\pi$$
$$\sin\theta=0\rightarrow\vec{A}\wedge\vec{B}=0$$

__ضرب متجه في نفسه اتجاهيا:__

$$\vec{A}\wedge\vec{A}=(AA\sin 0)\hat{n}=0$$
$$\therefore\ \vec{A}\wedge\vec{A}=0$$

__حاصل الضرب $\vec{A}\wedge\vec{B}$ بدلالة المركبات__ :

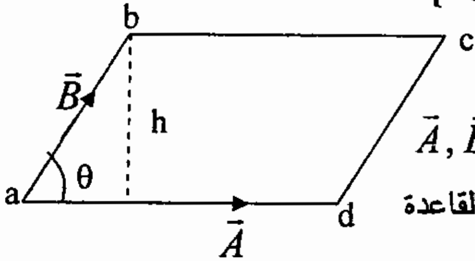
يكتب في صورة المحدد الآتي :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

المعنى الهندسي لحاصل الضرب $\vec{A}\wedge\vec{B}$:

يمكن إثبات أن المقدار $\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{A},\vec{B}$ ضلعان متجاوران.

[ويعرف هذا بالمعنى الهندسي لـ $\vec{A}\wedge\vec{B}$]



الإثبات:

نرسم متوازي الأضلاع abcd الذي فيه $\vec{A},\vec{B}$ ضلعان متجاوران. ونسقط العمود h على القاعدة ad فيكون هو الارتفاع

$$h = ab\sin\theta = \left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

مساحة متوازي الأضلاع: الارتفاع × طول القاعدة = S

$$\therefore S = \left|\vec{A}\right|\times\left|\vec{B}\right|\sin\theta = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta = \left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|$$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة

مثال(١):

أثبت أن المتجه $\vec{a}$ يكون عموديا على المتجه $\vec{b}$ إذا كان:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

الحل : حيث أن :

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

بتربيع الطرفين:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2$$

$$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\therefore a^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+b^2=a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+b^2$$

$$\therefore a^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2=a^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$$

$$\therefore 4(\vec{a}\cdot\vec{b})=0 \rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b})=0$$

وهذا يعني أن $\vec{a},\vec{b}$ يكونان متعامدين . وهو المطلوب.

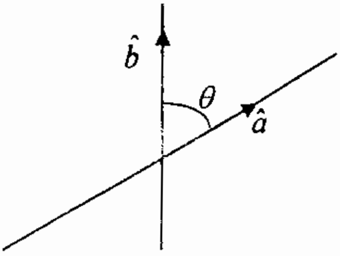
مثال(٢):

إذا كان $\hat{a},\hat{b}$ متجهي وحدة ، وكانت θ هي الزاوية بينهما، فاثبت أن:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

الحل:

$$\begin{aligned}|\hat{a}-\hat{b}|^2 &= (\hat{a}-\hat{b})\cdot(\hat{a}-\hat{b})\\ &= \hat{a}\cdot\hat{a}-\hat{a}\cdot\hat{b}-\hat{b}\cdot\hat{a}+\hat{b}\cdot\hat{b}\\ &= a^2-2(\hat{a}\cdot\hat{b})+b^2 = 2-2(\hat{a}\cdot\hat{b})\\ &= 2[1-(\hat{a}\cdot\hat{b})] = 2[1-\cos\theta]\\ &= 2[2\sin^2\frac{\theta}{2}] = 4\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$



$$\therefore |\hat{a}-\hat{b}| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

حيث : $\hat{a}\cdot\hat{b}=|\hat{a}|\,|\hat{b}|\cos\theta=\cos\theta$

$|\hat{a}|=1,\ |\hat{b}|=1,\ a^2=1,\ b^2=1,\ \hat{a}\cdot\hat{b}=\hat{b}\cdot\hat{a}$

وهو المطلوب.

مثال (٣):

أثبت العلاقات الآتية:

(i) $|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=a^2b^2$

(ii) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-b^2$

(iii) $(\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}-\vec{b})=2(\vec{b}\wedge\vec{a})$

(iv) $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4(\vec{a}\cdot\vec{b})$

الحل:

(i)
$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|^2+|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=(ab\sin\theta)^2+(ab\cos\theta)^2$$
$$=a^2b^2\sin^2\theta+a^2b^2\cos^2\theta$$
$$=a^2b^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=a^2b^2$$

وتعرف هذه العلاقة بمتطابقة لاجرانج.

(ii)
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=a^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-b^2=a^2-b^2$$

(iii)
$$(\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\wedge\vec{a}-\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{b}\wedge\vec{a}-\vec{b}\wedge\vec{b}$$
$$=-\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{b}\wedge\vec{a}$$
$$=\vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{b}\wedge\vec{a}$$
$$=2(\vec{b}\wedge\vec{a})$$

$$\vec{a}\wedge\vec{a}=0$$
$$\vec{b}\wedge\vec{b}=0$$

$$(iv)\ \ |\vec{a}+\vec{b}|^2=(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2+(a_z+b_z)^2$$
$$=a_x^2+2a_xb_x+b_x^2+a_y^2+2a_yb_y+b_y^2+a_z^2$$
$$+2a_zb_z+b_z^2 \qquad \_\_\_\_\_(1)$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2$$
$$=a_x^2-2a_xb_x+b_x^2+a_y^2-2a_yb_y+b_y^2+a_z^2$$
$$-2a_zb_z+b_z^2 \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

من (١) ، (٢) بالطرح نحصل على :

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4a_xb_x+4a_yb_y+4a_zb_z$$
$$=4(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)=4(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

وهو المطلوب.

مثال(٤):

أوجد مسقط كل من المتجهين: $\vec{A}=(2,1.1)\ ,\vec{B}(1,3,5)$

على الآخر، ثم أوجد الزاوية المحصورة بينهما .

الحـــل:

$$\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k} \qquad , \quad \vec{B}=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

مسقط $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هو: $w_1=\vec{A}\cdot\hat{b}$

$$\hat{b}=\frac{\vec{B}}{B}=\frac{\hat{i}+3\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{1^2+3^2+5^2}}=\frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{35}}$$

$$\therefore w_1=(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot\left(\frac{\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}}{\sqrt{35}}\right)=\frac{2+3+5}{\sqrt{35}}=\frac{10}{\sqrt{35}}$$

وبالمثل: مسقط $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو :

$$w_2 = \vec{B} \cdot \hat{a}$$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore w_2 = (\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot \left(\frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2+3+5}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

<u>ولإيجاد الزاوية المحصورة بين</u> $\vec{B}$ و $\vec{A}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{\vec{A}}{A} \cdot \frac{\vec{B}}{B} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

$$\therefore \cos\theta = \left(\frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\frac{\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{35}}\right)$$

$$= \frac{2 + 3 + 5}{\sqrt{210}} = \frac{10}{\sqrt{210}}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (٥):</u>

باستخدام المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين، أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط الآتية:

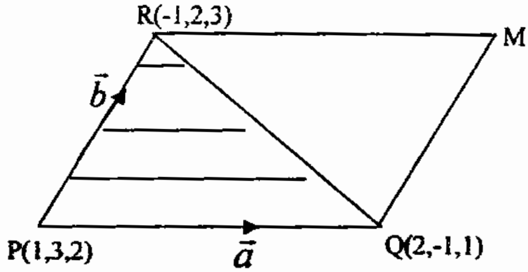
$P(1,3,2)$, $Q(2,-1,1)$, $R(-1,2,3)$

<u>الحـــل:</u>

من المعنى الهندسي لحاصل الضرب الاتجاهي :

إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع فان $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ يمثل مساحة متوازي الأضلاع.

المثلث PRQ هو نصف متوازي الأضلاع PRQM



فإذا كان: $\overline{PQ} = \vec{a}$ ، $\overline{PR} = \vec{b}$ ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع فان مساحته هي: $|\vec{a} \wedge \vec{b}|$ ، وتكون مساحة المثلث PRQ هي :

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \wedge \vec{b}|$$

والآن: نوجد $\vec{a}, \vec{b}$ كمتجهين :

$$\vec{a} = (2-1)\hat{i} + (-1-3)\hat{j} + (1-2)\hat{k} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{b} = (-1-1)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-2)\hat{k} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-9)^2} = \sqrt{107}$$

وتصبح مساحة المثلث المطلوبة :

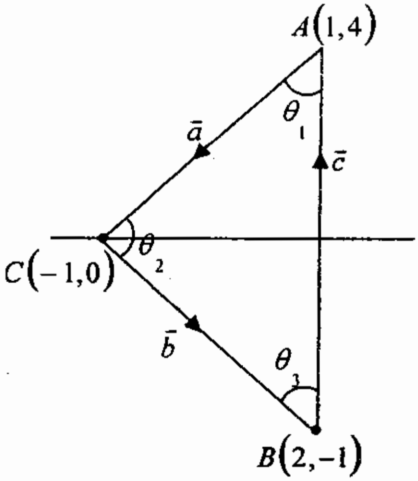
$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \wedge \vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{107}$$

وهو المطلوب.

مثال (٦): بإستخدام المتجهات أوجد جيوب تمام الزاوايا الداخلية للمثلث الذي رؤوسه هي:

$$A(1,4)\ ,\ B(2,-1)\ ,\ C(-1,0)$$

الحـــل :



نفرض أن المتجهات الممثلة لأضلاع المثلث هي :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AC}\ ,\quad \vec{b} = \overrightarrow{CB}\quad ,\ \vec{c} = \overrightarrow{BA}$$

حيث :

$$\vec{a} = (-1-1)\hat{i} + (0-4)\hat{j} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\hat{b} = [2-(-1)]\hat{i} + [-1-0]\hat{j} = 3\hat{i} - \hat{j}$$

$$\vec{c} = [1-2]\hat{i} + [4-(-1)]\hat{j} = -\hat{i} + 5\hat{j}$$

$$\therefore |\vec{a}|\sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\quad ,\quad |\vec{b}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

وتكون جيوب تمام الزاوايا الداخلية للمثلث هي:

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\ |\vec{c}|} = \frac{(-2)\ (-1)+(-4)(5)}{\left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{26}\right)} = \frac{2-20}{2\sqrt{130}} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{(-2)\ (3)+(-4)(-1)}{\left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}\right)} = \frac{-6+4}{2\sqrt{50}} = \frac{-1}{\sqrt{50}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\ |\vec{c}|} = \frac{(3)\ (-1)+(-1)(5)}{\left(\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{26}\right)} = \frac{-3-5}{\sqrt{260}} = \frac{-8}{\sqrt{4\times 65}} = \frac{-4}{\sqrt{65}}$$

وهو المطلوب .

مثال (٧):

(أ) إذا كان $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ فأثبت أن : $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{c}\wedge\vec{a}$

(ب) إذا كان $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ وكانت : $|\vec{a}|=3\ ,\ |\vec{b}|=5\ ,\ |\vec{c}|=7$

فأثبت أن الزاوية θ بين $\vec{a},\vec{b}$ تساوي $\pi/3$.

الحـل :

(أ) حيث أن : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ فإن :

$$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

وبالضرب إتجاهياً في $\vec{a}$:

$$\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=-\vec{a}\wedge\vec{c}$$

$$\therefore \vec{a}\wedge\vec{a}+\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{a}\wedge\vec{c}$$

$$\therefore \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{a} \qquad \_\_\_\_\_\_(2)$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{a}\wedge\vec{a}=0\\ \vec{a}\wedge\vec{c}=-\vec{c}\wedge\vec{a}\end{array}\right.$$

أيضاً : من (١) بالضرب إتجاهياً في $\vec{b}$:

$$\vec{b}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=-\vec{b}\wedge\vec{c}$$

$$\therefore \vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{b}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{c}$$

$$\therefore -\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{c}$$

$$\left|\begin{array}{l}\vec{b}\wedge\vec{b}=0\\ \vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}\end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{c} \qquad \_\_\_\_\_\_(3)$$

من (٢) ، (٣) نجد أن :

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{c}\wedge\vec{a}$$

(ب) من (١) بالتربيع :

$$(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c})^2$$

$$\therefore a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + b^2 = c^2$$

$$\therefore a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = c^2$$

$$\therefore 2ab\cos\theta = c^2 - a^2 - b^2 \qquad \therefore \cos\theta = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

وبالتعويض عن $a = 3 , b = 5 , c = 7$:

$$\therefore \cos\theta = \frac{(7)^2 - (3)^2 - (5)^2}{2\times 3\times 5} = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٨):</u>

(أ) أثبت متطابقة كوشي – شوارز الآتية :

$$\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right|\,\left|\vec{B}\right|$$

(ب) إذا كان حاصل الضرب القياسي بين متجهين $\vec{A},\vec{B}$ مقداراً سالباً ففي أي ربع تقع الزاوية θ بين المتجهين .

(ج) أوجد الزاوية بين المتجه $\vec{A} = \left(-\sqrt{6},1,-1\right)$ وبين الإتجاه الموجب لمحور x .

<u>الحل :</u>

(أ) حيث أن :

$$\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\,\left|\vec{B}\right|\,\left|\cos\theta\right|$$

وحيث أن : $\left|\cos\theta\right| \le 1$ فإن :

$$\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right|\,\left|\vec{B}\right|$$

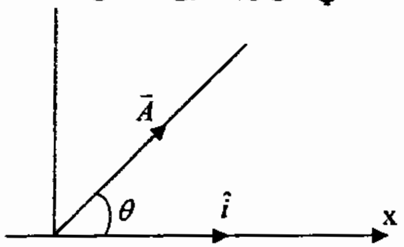
وهو المطلوب .

(ب) حيث أن حاصل الضرب $\vec{A}\cdot\vec{B}$ مقداراً سالباً فإن :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\,\left|\vec{B}\right|\cos\theta\langle 0$$

وحيث أن $\left|\vec{A}\right|\rangle 0,\left|\vec{B}\right|\rangle 0$ [مقادير موجبة] فإن: $\vec{A}\cdot\vec{B}$ يكـون سـالباً إذا كانت $\cos\theta<0$ وجيب تمام الزاوية θ يكون سالباً في الربع الثاني ، وهــذا يعني أن الزاوية θ تقع بين $\pi/2$ و π .

(ج) الزاوية بين $\vec{A}$ والإتجاه الموجب لمحور x هي الزاوية بين $\vec{A}$ ومتجـه الوحدة $\hat{i}$ ، حيث :



$$\vec{A}\cdot\hat{i}=\left|\vec{A}\right|\left|\hat{i}\right|\cos\theta=A\cos\theta$$

$$\therefore\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\hat{i}}{A}\qquad\text{\_\_\_\_\_}(1)$$

ولكن : $\vec{A}=-\sqrt{6}\,\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

فبالضرب قياسياً في $\hat{i}$ وإعتبار أن :

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1\ ,\ \ \hat{i}\cdot\hat{j}=0\ \ ,\ \ \hat{i}\cdot\hat{k}=0$$

$$\therefore\vec{A}\cdot\hat{i}=-\sqrt{6}\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right)+\left(\hat{i}\cdot\hat{j}\right)-\left(\hat{i}\cdot\hat{k}\right)=-\sqrt{6}$$

أيضاً : مقدار $\vec{A}$ هو :

$$A=\left|\vec{A}\right|=\sqrt{6+1+1}=\sqrt{8}$$

بالتعويض في (١) :

$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{8}}=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنها نجد أن الزاوية θ تعطي من : $\theta=150^{\circ}$.

وهو المطلوب .

مثال (٩):

أوجد المركبات الكرتيزية للمتجه $\vec{C}$ العمودي على المتجهين :

$\vec{A} = (2,-1,-4) \quad , \quad \vec{B} = (3,-1,-1)$

الحل:

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k} \qquad , \qquad \vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

فإذا كانت C_x, C_y, C_z هي المركبات الكرتيزية للمتجه $\vec{C}$ أي أن :

$\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$

وكانت $\vec{C}$ عمودية على كل من $\vec{A}, \vec{B}$ فإن :

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0 = (C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k})$$

$$\therefore 2C_x - C_y - 4C_z = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 0 = (C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

$$\therefore 3C_x - C_y - C_z = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

بضرب (١) × ٣ ، (٢) ×٢ والطرح:

$$C_y = -10C_z \longrightarrow \therefore C_z = \frac{-C_y}{10} \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

بالتعويض في (١):

$$C_x = -3C_z \longrightarrow \therefore C_z = \frac{-C_x}{3} \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

من (٣) ، (٤) نجد أن :

$$\frac{C_x}{-3} = \frac{C_y}{-10} = \frac{C_z}{1} = \lambda$$ (مثلاً):

$$\therefore C_x = -3\lambda \quad , \quad C_y = -10\lambda \quad , \quad C_z = \lambda$$

وتكون النسبة بين C_x , C_y , C_z هي:

$$C_x : C_y : C_z = -3 : -10 : 1$$

ولإيجاد القيم الفعلية لكل من C_x , C_y , C_z نختار قيمة معينة لـ λ بحيث تحقق العلاقتين(١)، (٢) .

فإذا أخذنا $\lambda = 1$ فإن : $C_z = 1 \quad , \quad C_y = -10 \quad , \quad \therefore C_x = -3$

ومن (١) نجد أن (بالتعويض عن $\lambda = 1$):

$$-6 + 10 - 4 = 0$$

ومن (١) نجد أن (بالتعويض عن $\lambda = 1$):

$$-9 + 10 - 1 = 0$$
$$\therefore \vec{C} = -3\hat{i} - 10\hat{j} - \hat{k}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (١٠) :</u>

أثبت المتطابقات الآتية :

$$(i) \qquad \left|\vec{A} + \vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$$

$$(ii) \qquad \left|\vec{A} - \vec{B}\right| \ge \left|\vec{A}\right| - \left|\vec{B}\right|$$

$$(iii) \qquad \left|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| + \left|\vec{C}\right|$$

<u>الحـــل:</u>

<u>لإثبات (i):</u>

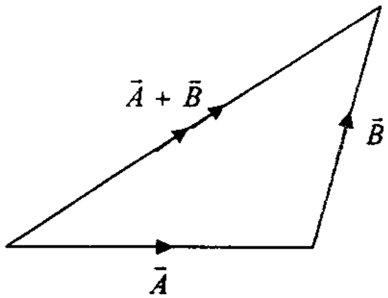
<u>هندسياً</u>: " حيث أن مجموع أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من الضلع الثالث "

$$\therefore \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| \ge \left|\vec{A} + \vec{B}\right|$$

ومنها :

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right|+\left|\vec{B}\right|$$

ولذلك تسمى هذه العلاقة بالمتباينة المثلثية .



جبرياً:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 = \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right)$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+2\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

$$= \left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2+2\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right|$$

ولكن : من متباينة كوشي – شوارز :

$$\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right|\ \left|\vec{B}\right|$$

$$\therefore \left|\vec{A}+\vec{B}\right|^2 \le \left|\vec{A}\right|^2+\left|\vec{B}\right|^2+2\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \le \left(\left|\vec{A}\right|+\left|\vec{B}\right|\right)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين :

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right|+\left|\vec{B}\right| \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

لإثبات (ii) :

$$\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{A}-\vec{B}+\vec{B}\right|$$

$$= \left|\vec{D}+\vec{B}\right| \qquad , \qquad \vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

وبإستخدام (١) :

$$\left|\vec{A}\right| \le \left|\vec{D}\right|+\left|\vec{B}\right| \qquad \therefore \left|\vec{D}\right| \ge \left|\vec{A}\right|-\left|\vec{B}\right|$$

$$\therefore \left|\vec{A}-\vec{B}\right| \ge \left|\vec{A}\right|-\left|\vec{B}\right| \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

ولإثبات (iii) : بوضع $\vec{B}+\vec{C}=\vec{D}$ وإستخدام العلاقة (١) :

$$\left|\vec{A}+\vec{D}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{D}\right|$$

ولكن :

$$\left|\vec{D}\right| = \left|\vec{B}+\vec{C}\right| \le \left|\vec{B}\right| + \left|\vec{C}\right|$$

$$\therefore \left|\vec{A}+\vec{D}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| + \left|\vec{C}\right| \qquad \text{______}(2)$$

بالتعويض عن $\vec{D}$:

$$\left|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| + \left|\vec{C}\right| \qquad \text{______}(3)$$

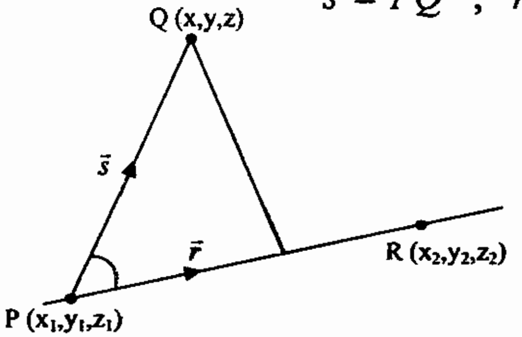
وهو المطلوب .

تطبيقات هندسية:

١- **طول العمود النازل من نقطة على مستقيم مار بنقطتين معلومتين:**

لإثبات أن طول العمود النازل من النقطة $Q\ (x,y,z)$ علـــى المـــستقيم المـــار بالنقطتين $R\ (x_2,y_2,z_2)$, $P\ (x_1,y_1,z_1)$ هو : $L=\dfrac{|\vec{s}\wedge\vec{r}|}{|\vec{r}|}$

حيث : $\vec{r}=\overline{PR}$, $\vec{s}=\overline{PQ}$



نعتبر المتجهات $\vec{r},\vec{s}$ ، حيث :

$$\vec{r}=(x_2-x_1)\hat{i}+(y_2-y_1)\hat{j}+(z_2-z_1)\hat{k}$$

$$\vec{s}=(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}$$

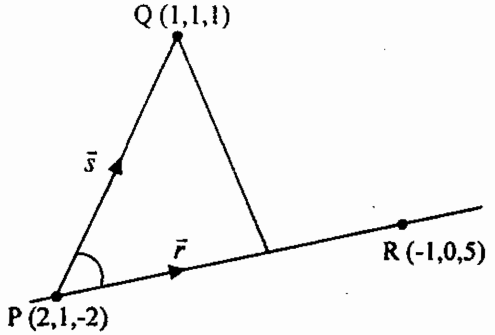
طول العمود النازل من Q على المستقيم المار بالنقطتين P , R هو :

$$L=PQ\sin\theta=|\vec{s}|\sin\theta=\frac{|\vec{s}|\,|\vec{r}|\sin\theta}{|\vec{r}|}=\frac{|\vec{s}\wedge\vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

وهو المطلوب .

مثال عددي : أوجد طول العمود النازل من النقطة $(1,1,1)\ Q$ على المستقيم المار بالنقطتين $R\ (-1,0,5)$ و $P\ (2,1,-2)$.

الحـــل :



$$\vec{r} = \overline{PR} = -3\,\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$$

$$\vec{s} = \overline{PQ} = -\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$\therefore \vec{s} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

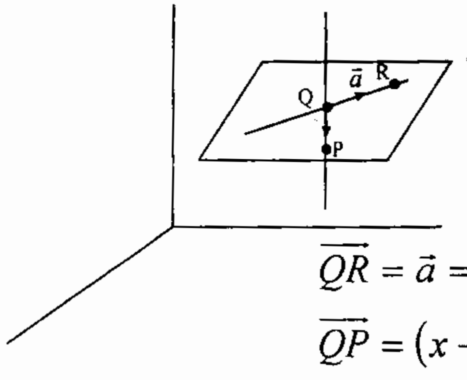
$$= 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore L = \frac{|\vec{s} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{59}}$$

وهو المطلوب .

٢- معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $Q\ (x_1, y_1, z_1)$ بمعلومية المتجه العمودي عليه $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

نأخذ نقطـــة $P\ (x,y,z)$ علـــى أمتـــداد النقطـــة $Q\ (x_1,y_1,z_1)$ ونأخـــذ نقطـــة $R(x_2,y_2,z_2)$ بحيث أن $\overline{QR}$ يكون المتجه $\vec{a}$ العمودي على المستوى.



فمن شرط التعامد :

$$\overline{QR} \cdot \overline{QP} = 0 \qquad \_\_\_\_\_ (1)$$

فإذا كان :

$$\overrightarrow{QR} = \vec{a} = a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

فبالتعويض في (١) نحصل على معادلة المستوى المـــار بالنقطـــة $Q(x_1,y_1,z_1)$ بمعلومية إحداثيات أي نقطة فيه $P(x,y,z)$ والمتجه العمودي $\vec{a}$.

$$a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (I)$$

مثال عددي:

أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $Q\ (5,-2,4)$ بمعلومية المتجـــه العمـــودي عليه والذي مركباته $\vec{a}=(1,2,3)$.

الحـــل :

نأخذ نقطة $P(x,y,z)$ على إمتداد Q فتكون معادلة المستوى [العلاقة (I)] :

$$a_1(x-x_1)+a_2(y-y_1)+a_3(z-z_1)=0$$

$$\therefore 1\cdot(x-5)+2(y-2)+3(z-4)=0$$

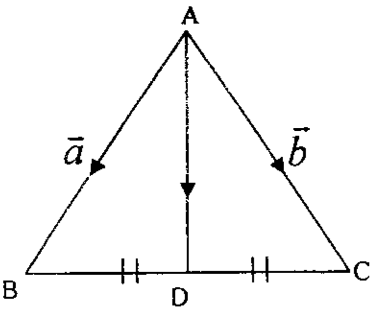
$$\therefore x+2y+3z=13$$

وهي معادلة المستوى المطلوبة .

٣- استخدام الضرب القياسي في إثبات بعض النظريات في الهندسة الاقليدية

مثال (١): باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي

أثبت أن : المستقيم المنصف لقاعدة المثلث المتساوي الساقين يكون عمودياً على القاعدة.



الإثبات:

المثلث ABC فيه $AB = AC$

المستقيم AD ينصف القاعدة BC

المطلوب: إثبات أن $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC}$

أي أن: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ولإثبات ذلك:

نأخذ: $\overline{AC}=\vec{b}$ ، $\overline{AB}=\vec{a}$ بحيث أن: $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ أي أن: $a=b$

من الرسم:

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=\vec{a}+\frac{1}{2}\overline{BC} \qquad \rightarrow (1)$$

أيضا:

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

$$\therefore \overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=\vec{b}-\vec{a} \qquad \rightarrow (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١):

$$\overline{AD}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \qquad \rightarrow (3)$$

بضرب (٣)، (٢) قياسيا نحصل على:

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a})=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

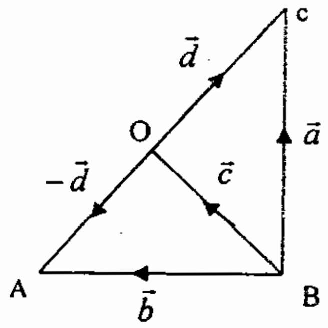
ولكن $a=b$

$$\therefore \overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$$

وهو المطلوب.

مثال (٢): باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي، أثبت أن:

المستقيم الواصل من رأس القائمة إلى منتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف الوتر.



الحـــل:

نأخذ المثلث ABC قائم الزاوية في B

المطلوب:

إثبات أن المستقيم BO الواصل

من B إلى O (منتصف الوتر AC)

يساوي نصف الوتر أي : BO = OC

الإثبات:

نأخذ: $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ ، $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ ، $\overrightarrow{BO}=\vec{c}$ وليكن $\overrightarrow{OC}=\vec{d}$ $\leftarrow$ $\therefore \overrightarrow{OA}=-\vec{d}$

من الشكل:

$$\vec{a}=\vec{c}+\vec{d} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\vec{b}=\vec{c}-\vec{d} \qquad \rightarrow (2)$$

وحيث أن المثلث قائم الزاوية في B فإن:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \rightarrow (3)$$

بالتعويض من (٢) ، (١) في (٣) نحصل على:

$$(\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{c}-\vec{d})=0$$

$$c^2-\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{d}\cdot\vec{c}-d^2=0$$

$$\therefore \quad c^2-d^2=0$$

$$\therefore \quad c^2=d^2 \rightarrow |\vec{c}|=|\vec{d}|$$

$$\therefore BO=OC$$

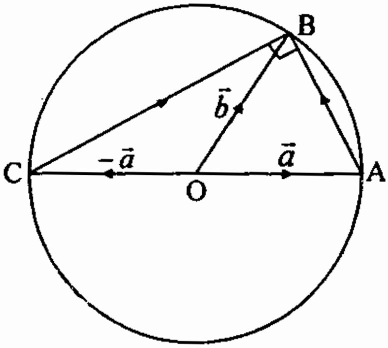
وهو المطلوب.

مثال (٣): باستخدام المتجهات، اثبت النظرية الهندسية الآتية:

"الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة".

الإثبات: نأخذ B أي نقطة على المحيط والمطلوب إثبات أن :

لزاوية المحيطية $A\hat{B}C$ هي زاوية قائمة ولإثبات ذلك : نفرض أن:



$$\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\vec{a} , \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

ومن خواص الدائرة: نصف القطر: $r = a = b$

ومن الرسم : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \qquad \rightarrow (1)$$

أيضاً:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\therefore \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{b} - (-\vec{a}) = \vec{b} + \vec{a} \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب (٢)، (١) قياسيا:

$$(\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{CB}) = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$$

$$= b^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 = b^2 - a^2$$

ولكن $a = b$:

$$\therefore (\overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{CB}) = 0$$

أي أن CB , AB يكونان متعامدين، أي أن الزاوية بينهما تكون قائمة .

وهو المطلوب.

تطبيق حواصل الضرب للمتجهات في حساب المثلثات:

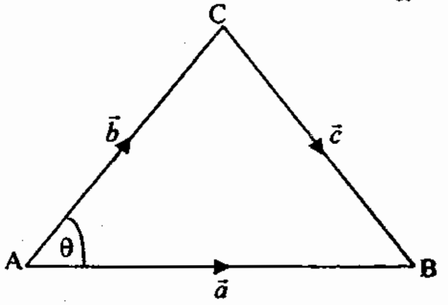
تطبق حواصل الضرب للمتجهات في حساب المثلثات المستوية كما يتضح من الأمثلة الآتية :

مثال (١):

أثبت قانون جيب التمام للمثلث المستوى بالصورة :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

حيث : $a = |\vec{a}| \ , \quad b = |\vec{b}| \ , \ c = |\vec{c}|$



الحــل :

نرسم المثلث ABC وفيه:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \ , \ \overrightarrow{AC} = \vec{b} \ , \ \overrightarrow{CB} = \vec{c}$

ولتكن θ هي الزاوية بين $\vec{a}, \vec{b}$.

من الشكل : $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$$\therefore \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} (1)$$

بضرب $\vec{c}$ في نفسه قياسياً [بإستخدام (١)]:

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}$$

$$\therefore c^2 = a^2 - 2ab\cos\theta + b^2$$

$$\therefore \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{b} = b^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$$

$$\vec{c}\cdot\vec{c} = c^2$$

وهو قانون جيب التمام في حساب المثلثات المستوية .

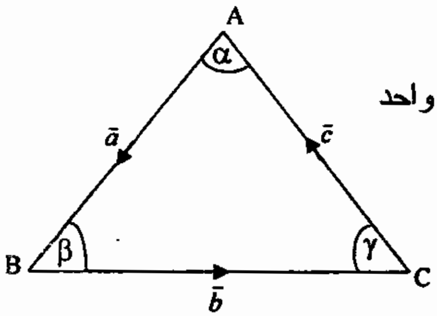
مثال (٢) : أثبت قانون الجيب للمثلث المستوى بالصورة [قانون لامي]:

$$\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{\sin\beta}{c}=\frac{\sin\gamma}{a}$$

حيث:

$$a=|\vec{a}|=AB \quad , \quad b=|\vec{b}|=BC \quad , \quad c=|\vec{c}|=CA$$

الحـل:



إذا كانت المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ في إتجاه دوري واحد

[بدأنا بنقطة A وإنتهينا بها]

$$\therefore\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

من (١) بالضرب إتجاهياً في $\vec{a}$:

$$\vec{a}\wedge\vec{a}+\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}=0$$

$$\therefore \vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{a} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$$\hat{a}\wedge\vec{a}=0$$

$$\vec{a}\wedge\vec{c}=-\vec{c}\wedge\vec{a}$$

من (١) أيضاً بالضرب إتجاهاً في $\vec{c}$:

$$\vec{c}\wedge\vec{a}+\vec{c}\wedge\vec{b}+\vec{c}\wedge\vec{c}=0$$

$$\therefore \vec{c}\wedge\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{c} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

$$\vec{c}\wedge\vec{c}=0$$

$$\vec{c}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{c}$$

من (٢) ، (٣) :

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{b}\wedge\vec{c}=\vec{c}\wedge\vec{a} \qquad \_\_\_\_\_(4)$$

بأخذ المقياس :

$$|\vec{a}\wedge\vec{b}|=|\vec{b}\wedge\vec{c}|=|\vec{c}\wedge\vec{a}|$$

$$\therefore\ ab\sin\beta=bc\sin\gamma=ca\sin\alpha$$

بالقسمة على abc :

$$\frac{\sin\beta}{c}=\frac{\sin\gamma}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{\sin\beta}{c}=\frac{\sin\gamma}{a}}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣):</u> بإستخدام حواصل الضرب القياسية والإتجاهية لمتجهين ، أوجد قوانين جيب وجيب تمام مجموع والفرق بين زاويتين بالصورة :

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta\pm\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta\mp\cos\alpha\ \sin\beta$$

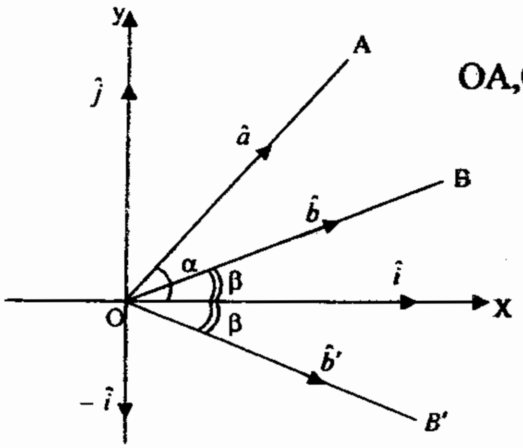
<u>الحـــل :</u>

$\hat{a},\hat{b}$ متجهاً وحدة في إتجاهي OA,OB

$\hat{b}'$ متجه وحدة في إتجاه `OB

الذي يصنع نفس الزاوية β

مع OX في الإتجاه المعاكس



$$\therefore\ \hat{a}=\cos\alpha\,\hat{i}+\sin\alpha\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_\_(1)$$

$$\hat{b}=\cos\beta\,\hat{i}+\sin\beta\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

$$\hat{b}'=\cos\beta\,\hat{i}-\sin\beta\,\hat{j} \qquad \_\_\_\_\_(3)$$

وإذا كان $\hat{k}$ هو متجه الوحدة العمودي على مستوى $\hat{i},\hat{j}$ فإن :

$$\hat{b}'\wedge\hat{a}=1\cdot1\cdot\sin(\alpha+\beta)\hat{k} \qquad \_\_\_\_(4)$$

بالتعويض من (١) ، (٣) :

$$\sin(\alpha+\beta)\hat{k}=\left(\cos\beta\,\hat{i}-\sin\beta\,\hat{j}\right)\wedge\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\sin\alpha\,\hat{j}\right)$$

$$=\left(\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta\right)\hat{k}$$

$$\therefore\ \boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta}$$

أيضاً :

$$\hat{b}\wedge\hat{a}=1\cdot1\cdot\sin(\alpha-\beta)\hat{k}\qquad\_\_\_\_(5)$$

بالتعويض من (١) ، (٢) :

$$\sin(\alpha-\beta)\hat{k}=\left(\cos\beta\,\hat{i}+\sin\beta\,\hat{j}\right)\wedge\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\sin\alpha\,\hat{j}\right)$$

$$=\left(\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta\right)\hat{k}$$

$$\therefore\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

أيضاً :

$$\hat{b}'\cdot\hat{a}=1\cdot1\cdot\cos(\alpha+\beta)\qquad\_\_\_\_\_\_(6)$$

بالتعويض من (١) ، (٣) :

$$\cos(\alpha+\beta)=\left(\cos\beta\,\hat{i}-\sin\beta\,\hat{j}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\sin\alpha\,\hat{j}\right)$$

$$=\left(\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta\right)$$

$$\therefore\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

أيضاً :

$$\hat{b}\cdot\hat{a}=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

بالتعويض من (١) ، (٢) :

$$\cos(\alpha-\beta)=\left(\cos\beta\,\hat{i}+\sin\beta\,\hat{j}\right)\cdot\left(\cos\alpha\,\hat{i}+\sin\alpha\,\hat{j}\right)$$

$$=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\therefore\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta}$$

حواصل الضرب الثلاثية:

إذا كان لدينا ثلاثة متجهات $\vec{A}\ ,\ \vec{B}\ ,\ \vec{C}$ فيكون لدينا نوعان من حواصل الضرب الثلاثية:

حاصل الضرب الثلاثي القياسي

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$$

تعريف:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix}A_X & A_Y & A_Z\\ B_X & B_Y & B_Z\\ C_X & C_Y & C_Z\end{vmatrix}$$

حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$$

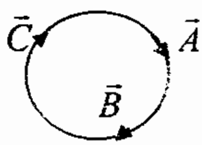
تعريف:

$$\begin{aligned}\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})&=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}\\ &=\lambda\vec{B}-\mu\vec{C}\end{aligned}$$

أمثلة :

مثال (١): أثبت الخاصية الدورية لحاصل الضرب الثلاثي القياسي وهي :

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$



ومن ذلك استنتج خاصية تبادل موضعي ∧ ، · في حاصل الضرب الثلاثي القياسي ، أي:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$$

الحل:

أولاً: من تعريف حاصل الضرب الثلاثي القياسي واستخدام خواص المحددات:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix} A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \\ C_x & C_Y & B_Z \end{vmatrix} \longrightarrow (1)$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ C_X & C_Y & C_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} B_X & B_Y & B_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \\ C_X & C_Y & C_Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \\ C_X & C_Y & C_Z \end{vmatrix} \longrightarrow (2)$$

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=\begin{vmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} A_X & A_Y & A_Z \\ C_X & C_Y & C_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_X & A_Y & A_Z \\ B_X & B_Y & B_Z \\ C_X & C_Y & C_Z \end{vmatrix} \longrightarrow (3)$$

من (١) و(٢) و(٣) ينتج المطلوب:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

<u>ثانيا:</u> لإثبات خاصية تبادل موضعي $\wedge$,$\cdot$ من الخاصية الدورية لحاصل الضرب القياسي:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u>

أثبت الخاصية الدورية لحاصل الضرب الاتجاهي الثلاثي وهي:

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})+\vec{B}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})+\vec{C}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})=0$$

<u>الحل:</u>

من تعريف حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي فإن الطرف الأيسر يساوي:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \\ &+ (\vec{B}\cdot\vec{A})\vec{C}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A} \\ &+ (\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}=0 \end{aligned}$$

وذلك لان:

$$\begin{aligned} \vec{A}\cdot\vec{C} &= \vec{C}\cdot\vec{A} \\ \vec{A}\cdot\vec{B} &= \vec{B}\cdot\vec{A} \\ \vec{B}\cdot\vec{C} &= \vec{C}\cdot\vec{B} \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٣):</u>

أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})^2$$

الحل:

نعتبر الجزء: $(\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})$

ونضع: $(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{D}$

$$\therefore \vec{D}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{D}\cdot\vec{A})\vec{C}-(\vec{D}\cdot\vec{C})\,\vec{A}=(\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{A})\,\vec{C}-(\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{C})\,\vec{A}$$

ولكن:

$$\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}$$
$$\vec{B}\wedge\vec{C}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot\vec{C}\wedge\vec{C}=0$$
$$\therefore \vec{D}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C}$$
$$\therefore (\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C}\quad\rightarrow (1)$$

بضرب(١) قياسيا في $(\vec{A}\wedge\vec{B})$:

$$\therefore (\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{A})$$
$$=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{C}]=(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot[\lambda\vec{C}]$$
$$=\lambda(\vec{A}\wedge\vec{B}\cdot\vec{C})=\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})$$
$$=(\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})^2$$

وهو المطلوب.

مثال (٤):

(أ) أثبت أن الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ واقعة في نفس المستوى هو أن يكون :

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$$

(ب) أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهات الثلاثة :

$$\vec{A}=(1,1,1)\quad,\quad\vec{B}=(2,0,-4)\quad,\quad\vec{C}=(1,\lambda,3)$$

تقع في مستوى واحد .

<u>الحـــل:</u>

(أ) <u>لإيجاد الشرط اللازم :</u>

نفرض أن المتجهات تقع في نفس المستوى والمطلوب إثبات صحة العلاقة $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$.

فمن تعريف حاصل الضرب الإتجاهي أن المتجه $\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ يكون عمودياً على المستوى الذي يحتوي المتجهين $\vec{B},\vec{C}$ ، وحيث أن المتجه $\vec{A}$ يقـــع في نفس المستوى فإن المتجه $\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ يكون عمودياً عليه أيضاً ، ومـــن شرط التعامد فإن : $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$.

<u>ولإيجاد الشرط الكافي :</u>

بالعكس نفرض أن $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$ والمطلوب إثبات أن $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ تقع فـــي نفس المستوى فحيث أن العلاقة المفروضة تعنـــي أن المتجهـــين $\vec{A},\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ متعامدان ، ولكن المتجه $\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ هو متجه عمودي علـــى المـــستوى الـــذي يحتوي المتجهين $\vec{B},\vec{C}$ والذي يقع فيه المتجه $\vec{A}$ ، وهذا يعني أن المتجهـــات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ تقع في نفس المستوى .

<u>حل الجزء (ب):</u>

الشرط اللازم والكافي لكي تقع المتجهات الثلاثة المعطاه في نفس المـــستوى هو : $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=0$ أي :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (1)(0+4\lambda)-(1)(6+4)+(1)(2\lambda-0)=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=5/3$$

وهو المطلوب .

حواصل الضرب الرباعية:

إذا كان لدينا ٤ متجهات $\vec{A}\,,\vec{B}\,,\vec{C}\,,\vec{D}$ فيكون لدينا نوعان من حواصل الضرب:

حاصل ضرب رباعي قياسي

$$(\vec{A}\wedge B)\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})$$

حاصل ضرب رباعي اتجاهي

$$(\vec{A}\wedge B)\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})$$

تعريف حاصل الضرب الرباعي القياسي:

يعرف بالعلاقة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})$$

الإثبات: نفرض أن:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{G}$$

$$\begin{aligned}(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})&=\vec{G}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{D})\\&=(\vec{G}\wedge\vec{C})\cdot\vec{D}=[(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}]\cdot\vec{D}\\&=-[\vec{C}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})]\cdot\vec{D}\\&=-[(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}]\cdot\vec{D}\\&=[(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}]\cdot\vec{D}\\&=(\vec{C}\cdot\vec{A})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{C}\cdot\vec{B})(\vec{A}\cdot\vec{D})\\&=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{B}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{D})\end{aligned}$$

وهو المطلوب.

تعريف حاصل الضرب الرباعي الاتجاهي:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{D}]\vec{C}-[(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}]\vec{D}$$
$$=\lambda\vec{C}-\mu\vec{D}$$

الإثبات: نفرض أن:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{G}$$
$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=\vec{G}\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=(\vec{G}\cdot\vec{D})\vec{C}-(\vec{G}\cdot\vec{C})\vec{D}$$
$$=[(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{D}]\vec{C}-[(\vec{A}\wedge\vec{B})\cdot\vec{C}]\vec{D}$$

أمثلة:

مثال(١): باستخدام قانون حاصل الضرب القياسي الرباعي:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

أثبت صحة الخاصية الدورية الآتية لحاصل الضرب القياسي الرباعي:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d})+(\vec{b}\wedge\vec{c})\cdot(\vec{a}\wedge\vec{d})+(\vec{c}\wedge\vec{a})\cdot(b\wedge d)=0$$

الحل:

$$L.H.S=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$
$$+(\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{c}\cdot\vec{d})-(\vec{c}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{d})+(\vec{c}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})=0$$

حيث أن:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

مثال (٢): أثبت صحة العلاقة الآتية:

$$\vec{A}\cdot[\vec{B}\wedge\{\vec{C}\wedge(\vec{D}\wedge\vec{A})\}]=(\vec{A}\cdot\vec{C})[\vec{B}\cdot(\vec{D}\wedge\vec{A})]$$

الإثبات:

$$
\begin{aligned}
L.H.S &= \vec{A}\cdot[B\wedge\{\vec{C}\wedge(\vec{D}\wedge\vec{A})\}]\\
&= \vec{A}\cdot[\vec{B}\wedge\{(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{D}-(\vec{C}\cdot\vec{D})\vec{A}\}]\\
&= \vec{A}\cdot[B\wedge\{\lambda\vec{D}-\mu\vec{A}\}]\\
&= \vec{A}\cdot[\lambda(\vec{B}\wedge\vec{D})-\mu(\vec{B}\wedge\vec{A})]\\
&= \lambda[\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{D})]-\mu[\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{A})
\end{aligned}
$$

ولكن:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{D})=\vec{B}\cdot(\vec{D}\wedge\vec{A})$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{A})=\vec{B}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{A})=0$$

حيث: $\vec{A}\wedge\vec{A}=0$

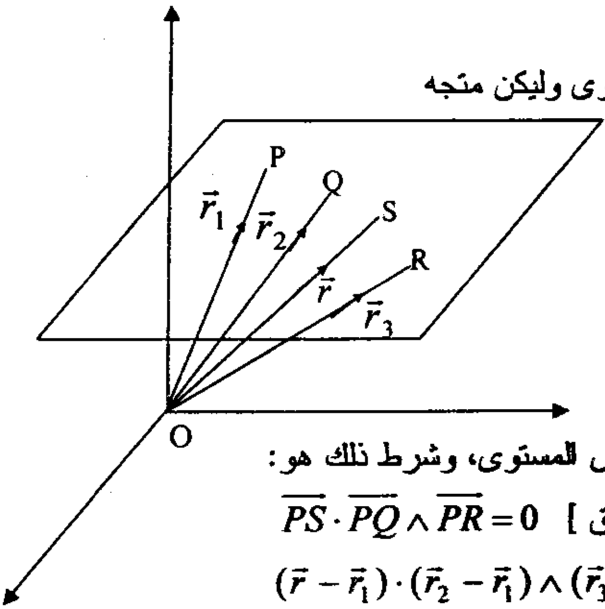
$$
\begin{aligned}
\therefore L.H.S &= \lambda[\vec{B}\cdot(\vec{D}\wedge\vec{A})]\\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})[\vec{B}\cdot(\vec{D}\wedge\vec{A})]
\end{aligned}
$$

وهو المطلوب.

تطبيقات هندسية ومثلثية :

تطبيق (١): معادلة المستوى الذي يمر بثلاث نقاط معلومة متجهات مواضعها:

نفرض أن $\vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3$ هي متجهات مواضع النقاط الثلاث P,Q,R التي يمر بها المستوى .



نأخذ S أي نقطة عامة في المستوى وليكن متجه موضعها $\vec{r}$ نعتبر المتجهات:

$$\overrightarrow{PS} = \vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{A}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{B}$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{C}$$

هذه المتجهات الثلاثة تقع في نفس المستوى، وشرط ذلك هو:

$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = 0$ [مثال سابق]

أي : $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$

وهي معادلة المستوى المطلوبة، ويمكن كتابتها بالصورة : $\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = 0$

مثال عددي:

أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقاط الثلاثة:

P(2,-1,1) , Q(3,2,-1) , R(-1,3,2)

الحل: إذا كانت $\vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3$ هي متجهات مواضع P,Q,R على الترتيب،

فإن: $\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{r}_3 = -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

معادلة المستوى المطلوبة هي:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \wedge (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

حيث $\vec{r}$ هو متجه موضع أي نقطة S على المستوى :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x-2)\hat{i} + (y+1)\hat{j} + (z-1)\hat{k} = \vec{A}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3-2)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-1-1)\hat{k}$$

$$= \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} = \vec{B}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (-1-2)\hat{i} + (3+1)\hat{j} + (2-1)\hat{k}$$

$$= -3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} = \vec{C}$$

وتصبح معادلة المستوى:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \wedge \vec{C} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

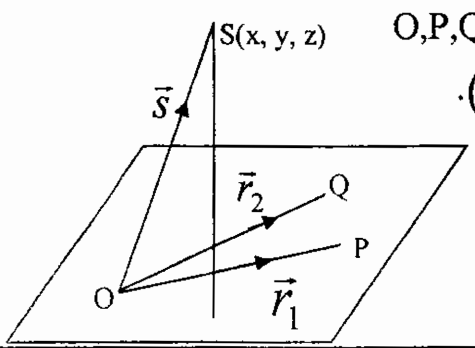
$$\therefore \ (x-2)(11) + (y+1)(5) + (z-1)(13) = 0$$

$$\therefore \ 11x + 5y + 13z = 30$$

وهي معادلة المستوى المطلوبة.

<u>تطبيق(٢): طول العمود النازل من نقطة ما على مستوى</u>

نفرض أن المستوى يمر بالنقاط الثلاث O,P,Q
وبأخذ O كنقطة أصل (أو نقطة مرجعية).
$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ هما متجها موضع P,Q
بالنسبة إلى O.



لإيجاد طول العمود النازل من نقطة S على المستوى:

ليكن $\vec{s}$ هو متجه موضع S بالنسبة إلى O فيكون العمودي على المستوى هو العمودي على كل من $\vec{r}_1 , \vec{r}_2$ أي العمودي على $(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$.

متجه الوحدة في اتجاه العمودي على المستوى :

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|}$$

طول العمود(l) هو مركبة $\vec{s}$ في اتجاه $\hat{n}$ أي :

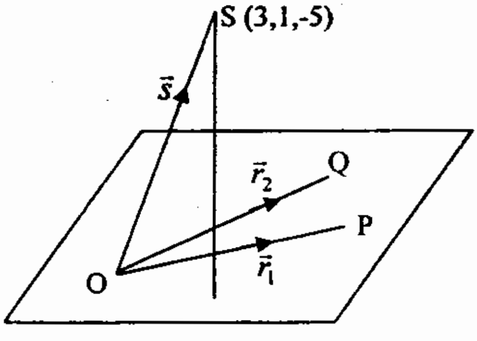
$$l = \vec{s} \cdot \hat{n} = \frac{\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|} \qquad \to (1)$$

مثال عددي: مستوى يمر بالنقاط الثلاثة:

O(1,1,1) , P(-1,2,3) , Q(4,5,13)

أوجد طول العمود النازل من النقطة S(3, 1, -5) على المستوى .

الحل:



طول العمود هو :

$$l = \frac{\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)}{\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2\right|} \qquad \to (1)$$

$$\vec{s} = 2\hat{i} - 6\hat{k}, \vec{r}_1 = -2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} \ , \vec{r}_2 = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}$$

$$\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 30\hat{j} - 12\hat{k}$$

$$|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2| = \sqrt{(4)^2 + (30)^2 + (-12)^2} = \sqrt{1060}$$

أيضاً:

$$\vec{s} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 74$$

بالتعويض في (١) :

$$l = \frac{74}{\sqrt{1060}} = 2.27$$

وهو طول العمود المطلوب.

تطبيق (٣): إثبات العلاقة المثلثية:

$$\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$

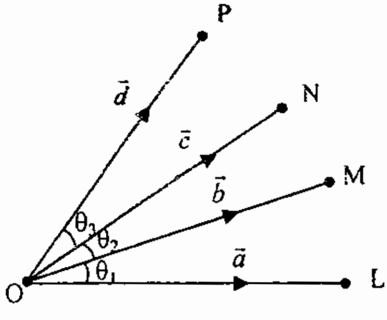
المثال : بإستخدام الخاصية الدورية لحاصل الضرب الرباعي وصورتها :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{d}) + (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot (\vec{b} \wedge \vec{d}) = 0$$

أثبت العلاقة المثلثية الآتية :

$$\sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$$

الحل:



نأخذ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ أربع متجهات في المستوى (متجهات مستوية) .

ونفرض أن $\hat{e}$ هي متجه وحدة عمودي على هذا المستوى .

ونفرض أن الزوايا بين الإتجاهات $\vec{a}, \vec{b}; \vec{b}, \vec{c}; \vec{c}, \vec{d}$ هي : $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ على التوالي .

$$\therefore \vec{a} \wedge \vec{b} = ab\sin\theta_1\,\hat{e}\,,\ \vec{b} \wedge \vec{c} = bc\sin\theta_2\hat{e},\ \vec{c} \wedge \vec{d} = cd\sin\theta_3\hat{e}$$

وبالتعويض في الخاصية الدورية لحاصل الضرب الرباعي القياسي :

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) + \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a} \wedge \vec{d}\right) + \left(\vec{c} \wedge \vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b} \wedge \vec{d}\right) = 0$$

نحصل على :

$$\begin{aligned}(ab\sin\theta_1\hat{e})\cdot(cd\sin\theta_3\hat{e}) &+ (bc\sin\theta_2\hat{e})\cdot[ad\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\hat{e}]\\ &+ [-ac\sin(\theta_1+\theta_2)\hat{e}]\cdot[-bd\sin(\theta_2+\theta_3)\hat{e}] = 0\end{aligned}$$

وبالقسمة على abcd وإعتبار أن $\hat{e}\cdot\hat{e} = 1$:

$$\begin{aligned}\sin\theta_1\ \sin\theta_3 &+ \sin\theta_2\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\\ &-\sin(\theta_1+\theta_2)\sin(\theta_2+\theta_3) = 0\end{aligned}$$

ويوضع : $\theta_1 = \beta\,,\ \theta_2 = \alpha\ ,\ \theta_3 = -\beta$

نحصل على :

$$-\sin^2\beta + \sin^2\alpha - \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 0$$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$$

وهو المطلوب الأول.

وحيث أن :

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(\alpha+\beta)\ \sin(\alpha-\beta) &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) - \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta)\\ &= \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)\end{aligned}$$

وهو المطلوب الثاني.

المعادلات الاتجاهية

تحتوى المعادلات الاتجاهيه عادة على متجه مجهول وليكن $\vec{x}$ وحل المعادلة الاتجاهية هو إيجاد هذا المتجه .

وتشمل المعادلات الاتجاهيه على حواصل ضرب قياسية أو اتجاهيه لهذا المتجه مع متجهات أخرى معلومة ، وتستخدم خواص حواصل الضرب الثلاثية عادة للحصول على المتجه $\vec{x}$ منفردا ، ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

__مثال(١):__ أوجد المتجه $\vec{x}$ الذي يحقق المعادلتين:

$$\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{b} \;\rightarrow(1) \qquad , \qquad \vec{a}\cdot\vec{x}=b \;\rightarrow(2)$$

حيث : $\vec{a}\cdot\vec{b}=o$

__الحل:__ بضرب (١) قياسيا في $\vec{a}$ نحصل على:

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad \therefore o=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

وهذا يحقق الشرط المعطى.

وبضرب (١) اتجاهيا في $\vec{a}$ نحصل على:

$$\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{x})=\vec{a}\wedge\vec{b}$$

$$\therefore(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{x}=\vec{a}\wedge\vec{b} \qquad \therefore b\vec{a}-a^2\vec{x}=\vec{a}\wedge\vec{b}$$

(بالتعويض عن $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ من (٢))

$$\therefore a^2\vec{x}=b\vec{a}-\vec{a}\wedge\vec{b} \quad \therefore\vec{x}=\frac{1}{a^2}\left[b\vec{a}-\vec{a}\wedge\vec{b}\right]$$

وهو المطلوب .

__مثال(٢):__ حل المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{x}\wedge\vec{a}+\vec{x}=\vec{a} \qquad \rightarrow(1)$$

<u>الحــل:</u>

بضرب (١) قياسيا في $\vec{a}$: $\therefore o+\vec{a}\cdot\vec{x}=a^2$ $\quad \vec{a}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{a})+\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{x}=a^2 \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب طرفي (١) اتجاهيا في $\vec{a}$ نحصل على :

$$\vec{a}\wedge(\vec{x}\wedge\vec{a})+\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{a}\wedge\vec{a} \quad , \quad \therefore (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{x}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a}+\vec{a}\wedge\vec{x}=0$$

$$\therefore a^2\,\vec{x}-a^2\,\vec{a}+(\vec{x}-\vec{a})=0$$

وتلك حيث أن: $\vec{a}\cdot\vec{x}=a^2$ (من (٢))، $\vec{a}\wedge\vec{x}=\vec{x}-\vec{a}$ (من (١)) وأيضا حيث أن:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2 \quad , \quad \vec{a}\wedge\vec{a}=0 \quad , \quad \therefore \vec{x}(a^2+1)=\vec{a}(a^2+1)$$

ومن هذا يتضح أن : $\vec{x}=\vec{a}$. وهو حل المعادلة المطلوب .

<u>مثال(٣)</u>: حل المعادلة الاتجاهية :

$$\vec{b}(\vec{x}\cdot\vec{a})-\alpha\vec{x}=\vec{c} \qquad \rightarrow (1)$$

حيث α عدد قياسي ، $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq\alpha$

<u>الحــل:</u> بضرب طرفي (١) في $\vec{a}$ قياسيا نحصل على:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{x}\cdot\vec{a})-\alpha(\vec{a}\cdot\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\therefore [(\vec{a}\cdot\vec{b})-\alpha](\vec{a}\cdot\vec{x})=(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{x}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{(\vec{a}\cdot\vec{b})-\alpha} \qquad \rightarrow (2)$$

وبالتعويض في (١) عن $(\vec{a}\cdot\vec{x})$ من (٢) نحصل على:

$$\frac{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})}{(\vec{a}\cdot\vec{b})-\alpha}-\alpha\vec{x}=\vec{c} \qquad \therefore \vec{x}=\frac{1}{\alpha}[\frac{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}}{(\vec{a}\cdot\vec{b})-\alpha}-\vec{c}]$$

وهو المطلوب .

مثال(٤): حل المعادلتين الإتجاهيتين : $\vec{x}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b}$ ، $\vec{x}\cdot\vec{c}=0$

حيث: $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$.

الحـــل: حيث أن:

$$\vec{x}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b} \quad \rightarrow(1) \quad ، \quad \vec{x}\cdot\vec{c}=0 \quad \rightarrow(2)$$

فبوضع (١) في الصورة:

$$(\vec{x}-\vec{a})\wedge\vec{b}=0$$

وهذا يعني أن المتجهين: $(\vec{x}-\vec{a})\,,\,\vec{b}$ متوازيان أي أن:

$$(\vec{x}-\vec{a})=\lambda\vec{b}$$

حيث λ عدد قياسي. ومن ذلك نجد أن:

$$\vec{x}=\vec{a}+\lambda\vec{b} \qquad \rightarrow(3)$$

وبالتعويض عن قيمة $\vec{x}$ من (٣) في (٢) نحصل على :

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore \quad \vec{a}\cdot\vec{c}=-\lambda(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$\therefore \quad \lambda=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

حيث $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$ وبوضع قيمة λ في (٣) نحصل على :

$$\vec{x}=\vec{a}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}\vec{b}$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(٥):</u> إذا أعطيت المتجهات $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ فأوجد حل المعادلة الاتجاهيه:

$$\vec{x}\wedge\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{d}$$

حيث: $\vec{a}\cdot\vec{c}\neq 0 \quad , \quad \vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$.

<u>الحـل:</u>

بضرب طرفي المعادلة المعطاة قياسيا في $\vec{a}$:

$$\therefore \vec{a}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{a})+(\vec{x}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{d}$$

$$\therefore (\vec{x}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{d} \qquad \therefore \vec{x}\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\vec{a}\cdot\vec{c}} \qquad \rightarrow (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة المعطاة اتجاهيا في $\vec{b}$:

$$\therefore \vec{b}\wedge(\vec{x}\wedge\vec{a})+(\vec{x}\cdot\vec{b})(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}\wedge\vec{d}$$

$$\therefore (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{x}-(\vec{b}\cdot\vec{x})\vec{a}+(\vec{x}\cdot\vec{b})(\vec{b}\wedge\vec{c})=\vec{b}\wedge\vec{d}$$

$$\therefore (\vec{x}\cdot\vec{b})[(\vec{b}\wedge\vec{c})-\vec{a}]+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{x}=\vec{b}\wedge\vec{d}$$

وبالتعويض $(\vec{x}\cdot\vec{b})$ من (١) نحصل على الآتي:

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\vec{a}\cdot\vec{c}}\left[\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)-\vec{a}\right]+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{x}=\vec{b}\wedge\vec{d}$$

$$\therefore \vec{x}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{b}\wedge\vec{d}-\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\vec{a}\cdot\vec{c}}\left[\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)-\vec{a}\right]$$

$$\therefore \vec{x}=\frac{1}{\vec{a}\cdot\vec{b}}\left[\left(\vec{b}\wedge\vec{d}\right)-\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{\vec{a}\cdot\vec{c}}\left(\vec{b}\wedge\vec{c}-\vec{a}\right)\right]$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٦):</u> حل المعادلتين الاتجاهيتين الآتيتين في المتجهين المجهولين $\vec{x},\vec{y}$:

$\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{b} \quad , \quad \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{a}$ ، حيث: $\vec{a}\cdot\vec{b}=o$.

الحـل : المعادلتين المعطيتين هما :

$$\alpha \vec{x}+\beta \vec{y}=\vec{a} \qquad \rightarrow (1)$$

$$\vec{x}\wedge \vec{y}=\vec{b} \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب (١) اتجاهيا في $\vec{x}$:

$$\therefore\ \vec{x}\wedge(\alpha \vec{x}+\beta \vec{y})=\vec{x}\wedge \vec{a}$$

$$\therefore\ \beta(\vec{x}\wedge \vec{y})=\vec{x}\wedge \vec{a} \qquad \rightarrow (3)$$

حيث: $\alpha(\vec{x}\wedge\vec{x})=o$.

ومن (3) , (2) نحصل على:

$$\therefore\ \vec{x}\wedge \vec{a}=\beta \vec{b} \qquad \rightarrow (4)$$

بضرب (4) إتجاهيًا في $\vec{a}$:

$$\bar{\alpha}\wedge(\bar{x}\wedge \bar{a})=\beta(\bar{a}\wedge \bar{b})$$

$$\therefore (\bar{a}\cdot \bar{a})\bar{x}-(\bar{a}\cdot \bar{x})\bar{a}=\beta(\bar{a}\wedge \bar{b})$$

$$\therefore a^2\,\bar{x}=(\bar{a}\cdot \bar{x})\bar{a}+\beta(\bar{a}\wedge \vec{b})$$

$$\therefore\ \vec{x}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{a^2}\vec{a}+\frac{\beta}{a^2}(\vec{a}\wedge\vec{b})=\lambda \vec{a}+\frac{\beta}{a^2}(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

وهو الحل العام بالنسبة للمتجه $\vec{x}$ ، حيث λ بارا متر قياسي = $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{x}}{a^2}$.

وبنفس الخطوات يمكن إيجاد الحل العام بالنسبة للمتجه $\vec{y}$ بالصورة :

$$\vec{y}=\mu\vec{a}-\frac{\alpha}{a^2}(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

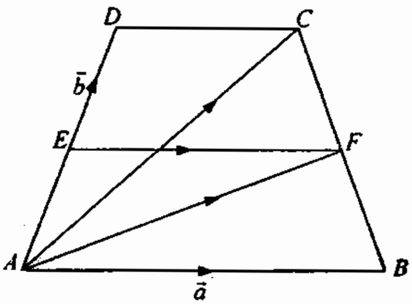
حيث μ بارامتر قياسي يعطي من: $\mu=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{y}}{a^2}$

وهو المطلوب.

أمثلة محلولة عامة على جبر المتجهات

مثال(١): بإستخدام المتجهات أثبت أن:

" المستقيم الواصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه منحرف يوازي الضلعين المتوازيين وطوله يساوي نصف مجموع طوليهما"



الحل: نفرض أن E,F هما منتصفا الضلعين غير المتوازين AD,BC في شبه المنحرف $ABCD$ وباعتبار أن A هي نقطة أصل ويأخذ $\overrightarrow{AB}=\bar{a}\ ,\ \overrightarrow{AD}=\bar{b}$ ، فحيث أن $DC\,//\,AB$ فإن:

$$DC=\lambda AB \qquad \text{\_\_\_\_\_(1)}$$

حيث λ ثابت، وهذا يعني أن

$$\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB} \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

ومن هندسة الشكل:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}=\bar{b}+\lambda\bar{a} \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

وحيث أن E,F هما منتصفا الضلعين AD,BC فإن

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\bar{b}\ ,\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\bar{b}+\lambda\bar{a}+\bar{a})=\frac{1}{2}(1+\lambda)\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{EF}=A\overrightarrow{F}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\bar{b}+\frac{1}{2}(1+\lambda)\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}$$

$$=\frac{1}{2}(1+\lambda)\bar{a}=\frac{1}{2}(1+\lambda)\overrightarrow{AB} \qquad \text{\_\_\_\_\_(4)}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{EF}$$

وحيث أن $\overline{DC}//\overline{AB}$ فإن المستقيمات الثلاثة AB, EF, DC تكــون متوازيـــة وهو المطلوب الأول.

<u>ولإيجاد طول</u> $\overline{EF}$: نأخذ مقياس الطرفين للمعادلة (4):

$$\therefore \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\ \frac{1}{2}(1+\lambda)\overrightarrow{AB}\ \right|$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(1+\lambda)AB = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}\lambda AB$$

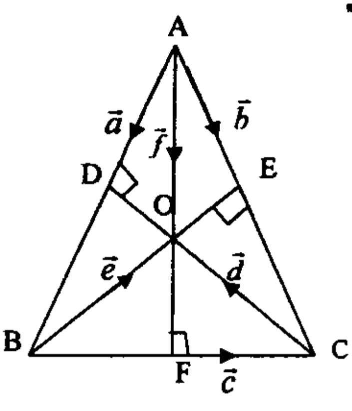
ومن (1) $DC = \lambda AB$ فإن:

$$EF = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

وهو المطلوب ثانياً.

<u>مثال(٢):</u> باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة"



<u>الحل:</u> ارتفاعات المثلث هي الأعمدة النازلة من الرأس إلى الضلع المقابل .

في ΔABC : نأخذ

$$\overline{AB} = \vec{a},\quad \overline{AC} = \vec{b},\quad \overline{BC} = \vec{c}$$

ونأخذ الارتفاعين BE, CD يتلاقيان في نقطة O

فإذا أثبتنا أن المستقيم AF المار بنفس النقطة O يمثل الارتفــاع الثالــث للمثلث أي العمود النازل من الرأس A إلى الضلع المقابل BC عنــد نقطــة F نكون قد أثبتنا النظرية.

رياضيا: حيث أن BE, CD يلتقيان في O ومن خواص الارتفاعات:

$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \rightarrow \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \qquad \rightarrow (1)$

$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{b} = 0 \qquad \rightarrow (2)$

المطلوب: إثبات أن $\leftarrow$ $A\vec{F} \cdot B\vec{C} = 0$ أي $\vec{f} \cdot \vec{c} = 0$

الإثبات: من الشكل:

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} \rightarrow \vec{a} = \vec{f} - \vec{e} \qquad \rightarrow (3)$

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} \rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CO} \rightarrow \vec{b} = \vec{f} - \vec{d} \qquad \rightarrow (4)$

بالتعويض في(٢) و(١):

$\vec{d} \cdot (\vec{f} - \vec{e}) = 0 \rightarrow \vec{d} \cdot \vec{f} - \vec{d} \cdot \vec{e} = 0 \qquad \rightarrow (5)$

$\vec{e} \cdot (\vec{f} - \vec{d}) = 0 \rightarrow \vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{e} \cdot \vec{d} = 0 \qquad \rightarrow (6)$

من (٦)(٥) بالطرح:

$\vec{e} \cdot \vec{f} - \vec{d}.\vec{f} = 0 \rightarrow \vec{f} \cdot (\vec{e} - \vec{d}) = 0 \qquad \rightarrow (7)$

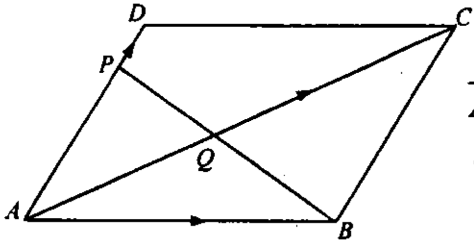
ولكن من الشكل: $\vec{e} = \vec{c} + \vec{d} \rightarrow \vec{c} = \vec{e} - \vec{d}$

وتصبح (٧) : $\vec{f} \cdot \vec{c} = 0$

وهو المطلوب.

مثال(٣): $ABCD$ متوازي أضلاع فيه نقطة P تقع على الضلع AD بحيث أن $AD = \lambda AP$ ، فإذا كان الخط PB يقطع القطر AC في نقطة Q فأثبت أن

$$AC = (1+\lambda)\, aQ$$



<u>الحل:</u> من هندسة الشكل نجد أن:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=0$$

$$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=0 \qquad \_\_\_(1)$$

ومن الشكل يتضح أن $\overrightarrow{AQ}$ يقع على استقامة $\overrightarrow{AC}$

$$\therefore \overrightarrow{AQ}=\mu\overrightarrow{AC} \qquad \_\_\_(2)$$

حيث μ كمية قياسية، وحيث أن $AD=\lambda AP$ فإن:

$$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AP} \qquad \_\_\_(3)$$

وبالتعويض من (3) ,(2) في (1):

$$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AP}-\frac{1}{\mu}\overrightarrow{AQ}=0 \qquad \_\_\_(4)$$

ومن الشكل نجد أن النقاط الثلاثة P,Q,B تقع على استقامة واحدة وأن المستقيمات $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$ غير متوازية فمن (4) يجب أن يكون المجموع الجبري للمعاملات يساوي صفراً.

$$\therefore 1+\lambda-\frac{1}{\mu}=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{\mu}=1+\lambda \;\rightarrow \mu=\frac{1}{1+\lambda} \qquad \_\_\_\_(5)$$

وبالتعويض في (2):

$$\therefore \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AC} \;\rightarrow\; \overrightarrow{AC}=(1+\lambda)\,\overrightarrow{AQ}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال(٤):</u> إذا كانت المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ متجهات متعامدة مثنى مثنى وذات مقادير متساوية فأثبت أن المتجه الممثل لمجموع المتجهات الثلاثة أي المتجه $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$ يميل بالتساوي على كل من المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

<u>الحل:</u> من رأس المسألة فإن المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ متعامدة مثنى مثنى وذات مقـــادير متساوية أي أن:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}=\vec{C}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{C}\cdot\vec{A}=0 \qquad \_\_\_(1)$$

$$|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{C}| \qquad \_\_\_(2)$$

ولإيجاد طول المتجه $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$:

$$\therefore \left|(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\right|^2=(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$$

$$=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{C}\cdot\vec{A}+\vec{C}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{C}$$

وباستخدام (1):

$$\therefore \left|(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\right|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{C}=A^2+B^2+C^2=3A^2=3\left|\vec{A}\right|^2$$

$$\therefore \left|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right|=\sqrt{3}\,\left|\vec{A}\right| \qquad \_\_\_(3)$$

وبفرض أن α,β,γ هي الزوايـــا المحـــصورة بـــين المتجـــه $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$ والمتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ على الترتيب فإن:

$$\cos\alpha=\frac{(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\cdot\vec{A}}{\left|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right|\left|\vec{A}\right|}=\frac{(\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{A}+\vec{C}\cdot\vec{A})}{(\sqrt{3}\left|\vec{A}\right|)(\left|\vec{A}\right|)}=\frac{\left|\vec{A}\right|^2}{\sqrt{3}\left|\vec{A}\right|^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن: $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ومن ذلك نرى أن $\alpha=\beta=\gamma$

وهذا يثبت أن المتجه $(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})$ يعمل زوايا متساوية مع المتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ على التوالي وهو المطلوب.

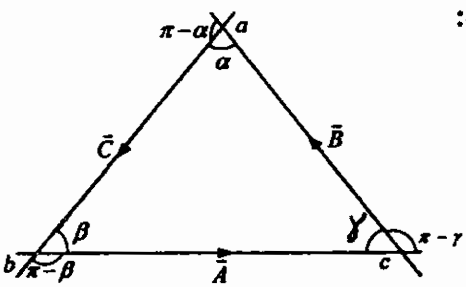
مثال(٥): في أي مثلث abc وباستخدام المتجهات، أثبت العلاقات الآتية

(i) $A=B\cos\gamma+C\cos\beta$

(ii) $A^2-B^2=CA\cos\beta-CB\cos\alpha$

(iii) $A^2+B^2+C^2=2(AB\cos\gamma+BC\cos\alpha+CA\cos\beta)$

حيث: $A=\left|\vec{A}\right|=\left|\overline{bc}\right|,\ B=\left|\vec{B}\right|=\left|\overline{ca}\right|, C=\left|\vec{C}\right|=\left|\overline{ab}\right|$



الحل: **أولاً:** من الشكل يمكن إثبات العلاقة:

$$\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{ab}=0$$

$$\therefore \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0 \qquad \_\_\_\_ (1)$$

ومن (1) فإن:

$$-\vec{A}=\vec{B}+\vec{C} \qquad \_\_\_\_ (2)$$

وبضرب (2) قياسياً في $\vec{A}$:

$$(\vec{A})\cdot(-\vec{A})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

$$\therefore -\left|\vec{A}\right|^2=AB\cos(\pi-\gamma)+AC\cos(\pi-\beta)=-AB\cos\gamma-AC\cos\beta$$

$$\therefore A^2=AB\cos\gamma+AC\cos\beta$$

وبالقسمة على A:

$$\therefore A=B\cos\gamma+C\cos\beta \qquad \_\_\_\_ (3)$$

وهو المطلوب أولاً.

ثانياً: حيث أن:

$$\vec{C}\cdot\vec{A}=CA\cos(\pi-\beta)=-CA\cos\beta \qquad \_\_\_\_ (4)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos(\pi-\gamma)=-AB\cos\gamma \qquad \_\_\_\_ (5)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C}=BC\cos(\pi-\alpha)=-BC\cos\alpha \qquad \_\_\_\_ (6)$$

$$\therefore \vec{B}\cdot\vec{C}-\vec{C}\cdot\vec{A}=-BC\cos\alpha+CA\cos\beta \qquad \_\_\_(7)$$

$$\therefore \vec{C}\cdot(\vec{B}-\vec{A})=CA\cos\beta-BC\cos\alpha \qquad \_\_\_(8)$$

ولكن

$$-(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{B}-\vec{A})=-(B^2-A^2) \qquad \_\_\_(9)$$

ومن (1):

$$-(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{B}-\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{B}-\vec{A}) \qquad \_\_\_(10)$$

فمن (8), (9), (10):

$$-(B^2-A^2)=\vec{C}\cdot(\vec{B}-\vec{A})=CA\cos\beta-BC\cos\alpha$$

$$\therefore A^2-B^2=CA\cos\beta-CB\cos\alpha \qquad \_\_\_(11)$$

وهو المطلوب ثانياً.

ثالثاً: لإثبات أن $A^2+B^2+C^2=2(AB\cos\gamma+BC\cos\alpha+CA\cos\beta)$

نأخذ الطرف الأيمن:

$$\text{الطرف الأيمن}=2(AB\cos\gamma+BC\cos\alpha+CA\cos\beta)$$

$$=-[2\vec{A}\cdot\vec{B}+2\vec{B}\cdot\vec{C}+2\vec{C}\cdot\vec{A}]$$

$$=-[(\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{C})+(\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{A})+(\vec{B}\cdot\vec{C}+\vec{C}\cdot\vec{A})]$$

$$=-[\vec{B}\cdot(\vec{A}+\vec{C})+\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})+\vec{C}\cdot(\vec{A}+\vec{B})] \qquad \_\_\_(12)$$

ومن العلاقة (1): $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ فإن:

$$\vec{A}+\vec{C}=-\vec{B}\ ,\ \vec{B}+\vec{C}=-\vec{A}\ ,\ \vec{A}+\vec{B}=-\vec{C}$$

فبالتعويض في (12):

$$2(AB\cos\gamma+BC\cos\alpha+CA\cos\beta)=-[-\vec{B}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{A}-\vec{C}\cdot\vec{C}]$$

$$=B^2+A^2+C^2=A^2+B^2+C^2=\text{الطرف الأيسر}$$

وهو المطلوب ثالثاً.

مثال(٦):

(أ) إذا كان لدينا المتجهات الثلاثة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ وكان: $\vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{A}$, $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}$

فأثبت أن المتجهات الثلاثة تكون متعامدة مثنى مثنى وأن: $\left|\vec{B}\right|=1$, $\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{C}\right|$.

(ب) إذا كان لدينا المتجهات الأربع $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ وكان:

$\vec{A}\wedge\vec{C}=\vec{B}\wedge\vec{D}$, $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}\wedge\vec{D}$ فأثبت أن المتجهين: $(\vec{B}-\vec{C})$, $(\vec{A}-\vec{D})$

يكونان متوازيان.

الحل: أولاً: من المعطيات:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}\quad,\ \vec{B}\wedge\vec{C}=\vec{A}$$

$$\therefore\ \vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{C}=\vec{B}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})=0 \qquad \_\_\_(2)$$

$$\vec{B}\cdot\vec{A}=\vec{B}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{C})=0 \qquad \_\_\_(3)$$

ومن ذلك يتضح أن: $\vec{A}$ متعامد على $\vec{C}$ وأن $\vec{B}$ متعامد على $\vec{C}$ وأن $\vec{A}$ متعامد مع $\vec{B}$، أي أن المتجهات الثلاثة تكون متعامدة مثنى مثنى.

أيضاً فإن:

$$\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{B}\wedge\vec{C}\right|=\left|\vec{B}\right|\ \left|\vec{C}\right|\sin 90=\left|\vec{B}\right|\ \left|\vec{C}\right| \qquad \_\_\_(4)$$

$$\left|\vec{C}\right|=\left|\vec{A}\wedge\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\ \left|\vec{B}\right|\sin 90=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \qquad \_\_\_(5)$$

ومن (5) , (4) بالضرب:

$$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{C}\right|=\left|\vec{A}\right|\ \left|\vec{B}\right|^2\ \left|\vec{C}\right|$$

$$\therefore\left|\vec{B}\right|^2=1 \qquad \therefore\left|\vec{B}\right|=1 \qquad \_\_\_(6)$$

ومن (6) ,(4) نجد أن:

$$\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{C}\right|(1)=\left|\vec{C}\right| \qquad \_\_\_(7)$$

وهو المطلوب.

ثانياً: من رأس المسألة:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}\wedge\vec{B} \qquad \_\_\_(1)$$
$$\vec{A}\wedge\vec{C}=\vec{B}\wedge\vec{D} \qquad \_\_\_(2)$$

حاصل ضرب المتجهين $(\vec{A}-\vec{D}),(\vec{B}-\vec{C})$ إتجاهياً:

$$(\vec{A}-\vec{D})\wedge(\vec{B}-\vec{C})=(\vec{A}\wedge\vec{B})-(\vec{A}\wedge\vec{C})-(\vec{D}\wedge\vec{B})+(\vec{D}\wedge\vec{C})$$
$$=(\vec{A}\wedge\vec{B})-(\vec{A}\wedge\vec{C})+(\vec{B}\wedge\vec{D})-(\vec{C}\wedge\vec{D})=0$$

وبالتالي فإن المتجهين $(\vec{A}-\vec{D}),(\vec{B}-\vec{C})$ يكونان متوازيين (لأن حاصل ضربهما الإتجاهي يساوي صفراً).

مثال(٧): أثبت أن مركبة المتجه $\vec{D}=\vec{A}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})$ في اتجاه المتجه $\vec{B}$ لا يمكن أن تكون موجبه، ومن ثم أثبت أن $(\vec{A}\cdot\vec{B})^2\leq A^2B^2$.

الحل: بكتابة

$\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{C}$ _(1) فإن $\vec{D}=\vec{A}\wedge\vec{C}$، وتكون مركبة $\vec{D}$ في اتجاه $\vec{B}$ هي: $\vec{D}\cdot\vec{B}$

فباستخدام خواص حاصل الضرب الثلاثي القياسي:

$$\vec{D}\cdot\vec{B}=(\vec{A}\wedge\vec{C})\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{C})=-\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=-\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$
$$=-(\vec{A}\wedge\vec{B})(\vec{A}\wedge\vec{B})=-(\vec{A}\wedge\vec{B})^2 \qquad \_\_\_\_(2)$$

وحيث أن أي كمية مربعة تكون موجبة دائماً فإن $\vec{D}\cdot\vec{B}$ تكون سالبة أي أن:

$\vec{D}\cdot\vec{B}=\leq 0$ وهو المطلوب أولاً.

ولإثبات الجزء الثاني: بالتعويض عن قيمة $\vec{D}$:

$$\therefore \vec{B}\cdot[\vec{A}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B})]\leq 0$$

$$\therefore \vec{B}\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{A})\vec{B}]\leq 0$$

$$\therefore (\vec{A}\cdot\vec{B})(\vec{B}\cdot\vec{A})-(\vec{A}\cdot\vec{A})\,(\vec{B}\cdot\vec{B})\leq 0$$

$$\therefore (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 - A^2B^2 \leq 0$$

$$\therefore (\vec{A}\cdot\vec{B})^2 \leq A^2B^2$$

وهو المطلوب ثانياً.

مثال(٨): باستخدام خواص حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي للمتجهات الأربع $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ بالصورة:

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}\vec{C}\vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A} \qquad \_\_\_(1)$$

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\vec{D} \qquad \_\_\_(2)$$

حيث $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$,... تمثل حواصل الضرب الثلاثية القياسية

$$[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]=\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},\cdots$$

أثبت أن:

$$2(\vec{A}\wedge\vec{B})\,(\vec{C}\wedge\vec{D})=\begin{vmatrix} -\vec{A} & -\vec{B} & \vec{C} & \vec{D} \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

الحل: من (2) ,(1) بالجمع:

$$2(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}\vec{C}\vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A}+[\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\vec{D}$$

$$=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}\vec{B}-\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}\vec{A}+\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}\vec{C}$$

$$-\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}\vec{D}$$

بتغيير مواضع الصفوف والأعمدة واستخدام خواص المحددات نحصل على:

$$2(\vec{A}\wedge\vec{B})(\vec{C}\wedge\vec{D})=\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}\vec{B}-\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}\vec{A}$$

$$+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}\vec{C}-\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\vec{D}$$

$$=\begin{vmatrix} -\vec{A} & -\vec{B} & \vec{C} & \vec{D} \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

حيث:

$\vec{A}=(A_1 ,A_2 ,A_3)$, $\vec{B}=(B_1 ,B_2 ,B_3)$

$\vec{C}=(C_1 ,C_2 ,C_3)$, $\vec{D}=(D_1 ,D_2 ,D_3)$

<u>مثال(٩):</u> إذا كان لدينا المتجهات الأربع $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ وكان:

$$\vec{A}'=\frac{\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}\ ,\ \vec{B}'=\frac{\vec{C}\wedge\vec{A}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}\ ,\ \vec{C}'=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}$$

فأثبت أن $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ ترتبط مع بعضها ارتباطاً خطياً بالعلاقة:

$$\vec{D}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}$$

حيث $\alpha=\vec{D}\cdot\vec{A}',\beta=\vec{D}\cdot\vec{B}'\ ,\ \gamma=\vec{D}\cdot\vec{C}'$

وبشرط أن: $\vec{A}\cdot\vec{A}'=\vec{B}\cdot\vec{B}'=\vec{C}\cdot\vec{C}'=1$

<u>الحل</u>: من تعريف حاصل الضرب الرباعي الإتجاهي للمتجهات الأربع $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}\,\vec{C}\vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A} \qquad \_\_\_(1)$$

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge(\vec{C}\wedge\vec{D})=[\vec{A}\,\vec{B}\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]\vec{D} \qquad \_\_\_(2)$$

فبالطرح:

$$\therefore 0=[\vec{A}\,\vec{C}\vec{D}]\vec{B}-[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A}-[\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C}+[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]\vec{D}$$

$$\therefore[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]\vec{D}=[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]\vec{A}-[\vec{A}\,\vec{C}\vec{D}]\vec{B}+[\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C} \qquad \_\_\_(3)$$

ولكن:

$$[\vec{B}\vec{C}\vec{D}]=[\vec{D}\,\vec{B}\vec{C}]\ ,\ [\vec{A}\vec{B}\vec{D}]=[\vec{D}\vec{A}\,\vec{B}]$$

$$[\vec{A}\,\vec{C}\vec{D}]=[\vec{D}\vec{A}\vec{C}]=-[\vec{D}\vec{C}\vec{A}]$$

(من خواص حاصل الضرب القياسي الثلاثي)

بالتعويض في (3):

$$[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]\vec{D}=[\vec{D}\vec{B}\vec{C}]\vec{A}+[\vec{D}\vec{C}\,\vec{A}]\vec{B}+[\vec{D}\vec{A}\vec{B}]\vec{C}$$

$$\therefore\vec{D}=\frac{[\vec{D}\,\vec{B}\vec{C}]\vec{A}+[\vec{D}\vec{C}\,\vec{A}]\vec{B}+[\vec{D}\vec{A}\vec{B}]\vec{C}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]}$$

$$=\frac{(\vec{D}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C})\vec{A}+(\vec{D}\cdot\vec{C}\wedge\vec{A})\vec{B}+(\vec{D}\cdot\vec{A}\wedge\vec{B})\vec{C}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]}$$

$$=(\vec{D}\cdot\frac{\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]})\vec{A}+(\vec{D}\cdot\frac{\vec{C}\wedge\vec{A}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]})\vec{B}+(\vec{D}\cdot\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]})\vec{C}$$

$$=(\vec{D}\cdot\vec{A}')\vec{A}+(\vec{D}\cdot\vec{B}')\vec{B}+(\vec{D}\cdot\vec{C}')\vec{C}$$

$$=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}) \qquad \_\_\_\_(4)$$

حيث:

$$\vec{A}'=\frac{\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]},\ \vec{B}'=\frac{\vec{C}\wedge\vec{A}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]},\ \vec{C}'=\frac{\vec{A}\wedge\vec{B}}{[\vec{A}\,\vec{B}\vec{C}]}$$

$$\alpha=\vec{D}\cdot\vec{A}'\ ,\quad \beta=\vec{D}\cdot\vec{B}'\ ,\quad \gamma=\vec{D}\cdot\vec{C}'$$

أيضاً:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}'=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=\frac{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=1$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B}'=\frac{\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=\frac{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=1$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C}'=\frac{\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}\wedge\vec{C}}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=\frac{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}{[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]}=1$$

وهو المطلوب.

مثال(١٠): حل المعادلات الإتجاهية الآتية:

(i) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}\ ,\ \vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{b}\ ,\ \vec{x}\cdot\vec{a}=1$

(ii) $(\vec{x}\wedge\vec{a})+4\vec{a}=3\vec{x}$

الحل: أولاً: المطلوب إيجاد المتجهين $\vec{x},\vec{y}$ فمن المعطيات:

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a} \qquad \_\_\_(1)$$

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\vec{b} \qquad (2)$$

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=1 \qquad (3)$$

فمن (1):

$$\vec{y}=\vec{a}-\vec{x} \qquad (4)$$

بالتعويض من (4) في (2):

$$\vec{x}\wedge(\vec{a}-\vec{x})=\vec{b}$$

$$\therefore\ \vec{x}\wedge\vec{a}-\vec{x}\wedge\vec{x}=\vec{b} \qquad \therefore\ \vec{x}\wedge\vec{a}=\vec{b} \qquad (5)$$

حيث $\vec{x}\wedge\vec{x}=0$

وبضرب (5) اتجاهياً في $\vec{a}$ نحصل على:

$$\vec{a}\wedge(\vec{x}\wedge\vec{a})=\vec{a}\wedge\vec{b}$$

$$\therefore\ (\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{x}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{a}=\vec{a}\wedge\vec{b}$$

$$\therefore\ a^2\vec{x}-\vec{a}=\vec{a}\wedge\vec{b}$$

(حيث استخدمنا العلاقة (3): $\vec{a}\cdot\vec{x}=1$)

$$\therefore\ a^2\vec{x}=(\vec{a}\wedge\vec{b})+\vec{a}$$

$$\therefore\ \vec{x}^2=\frac{1}{a^2}[(\vec{a}\wedge\vec{b})+\vec{a}] \qquad (6)$$

ولإيجاد $\vec{y}$: بالتعويض عن $\vec{x}$ من (6) في (4) نحصل على:

$$\vec{y}=\vec{a}-\vec{x}=\vec{a}-\frac{1}{a^2}[(\vec{a}\wedge\vec{b})+\vec{a}] \qquad (7)$$

وهو المطلوب.

<u>ثانياً</u>: حيث أن:

$$(\vec{x}\wedge\vec{b})+4\vec{b}=3\vec{x} \qquad (8)$$

فبالضرب قياسياً في $(\vec{x}\wedge\vec{b})$ نحصل على:

$$(\vec{x}\wedge\vec{b})^2+4\vec{b}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{b})=3\vec{x}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{b}) \qquad (9)$$

وباستخدام خواص حاصل الضرب الثلاثي القياسي فإن

$$\vec{b}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{b})=\vec{x}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{b})=0$$

$$\vec{x}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{x}\wedge\vec{x})=0$$

وتصبح (9):

$$(\vec{x}\wedge\vec{b})^2=0$$

$$\vec{x}\wedge\vec{b}=0 \qquad \_\_\_\_(10)$$

من (10) يتضح أن المتجهين $\vec{x},\vec{b}$ يكونان متوازيان بمعنى أن:

$$\vec{x}=\lambda\,\vec{b} \qquad \_\_\_\_(11)$$

ولتعيين الثابت λ: نعوض عن قيمة $\vec{x}$ من (11) في (8):

$$\therefore(\lambda\,\vec{b}\wedge\vec{b})+4\vec{b}=3\lambda\,\vec{b}$$

$$\therefore 4\vec{b}=3\lambda\,\vec{b} \;\rightarrow\; \therefore 4=3\lambda \;\rightarrow\; \lambda=\frac{4}{3}$$

وبالتعويض عن قيمة λ في (11) نحصل على حل المعادلة (8) بالصورة:

$$\vec{x}=\frac{4}{3}\vec{b}$$

وهو المطلوب.

مسائل على الباب الأول

جبر المتجهات

(١)احسب أطوال واتجاهات المتجهين المستويين:

$\vec{a} = (2, 2), \vec{b} = (2, 2\sqrt{3})$

(٢) إذا كانت: $\vec{a} = (1,3), \vec{b} = (-2,4), \vec{c} = (-1,-5)$

ثلاث متجهات مستوية ، فأوجد كل من المتجهين الآتيين مقدارا واتجاها:

(i) $\vec{D} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(ii) $\vec{G} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$

(٣) ما هو المتجه الذي يجب إضافته إلى المتجهين:

$\vec{a} = (1,-2.2)\ ,\vec{b} = (2,1,-1)$

بحيث أن محصلتهم تكون متجه وحده في اتجاه محور y.

(٤) أثبت أن مجموعة المتجهات:

$\vec{r}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{r}_2 = 3\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}$

$\vec{r}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 2\vec{c}$

حيث $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات غير متوازية، تكون مرتبطة خطياً.

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين R, Q اللذان متجهي موضعيهما $\vec{a}, \vec{b}$

وذلك بالصورة: $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$

حيث $\vec{r}$ متجه موضع أي نقطة على المستقيم ، λ بارامتر.

(٦) إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ثلاث متجهات لا تقع في نفس المستوى فان العلاقة

$x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$

تستلزم أن يكون: $x_1 = x_2 \ ,\ y_1 = y_2 \ ,\ z_1 = z_2$

والمطلوب: إثبات هذه النظرية.

(٧) (أ) إذا كان $\vec{A}$ متجها ما فاثبت أنه يمكن كتابته بالصورة:

$$\vec{A}=(\vec{A}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{A}\cdot\hat{j})\hat{j}+(\vec{A}\cdot\hat{k})\hat{k}$$

(ب) أوجد قيمة λ التي تجعل المتجهين:

$\vec{a}=(4,-2,-2),\vec{b}=(2,\lambda,1)$ متعامدين.

(٨) أثبت أن المتجهات الثلاثة

$$\vec{a}=(3,-2,1)\ \ ,\ \ \vec{b}=(1,-3,5)\ ,\ \vec{c}=(2,1,-4)$$

تكون أضلاع مثلث قائم الزاوية.

(٩) أوجد مسقط كل من المتجهين: $\vec{B}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{A}=3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ على الآخر، وكذلك الزاوية المحصورة بينهما.

(١٠) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "محصلة المتجهات الممثلة بواسطة المستقيمات المتوسطة للمثلث تساوي صفراً ".

(١١) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "المستقيمات المتوسطة في مثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم هذه المستقيمات بنسبة ١:٢ من جهة القاعدة " .

(١٢) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "متوازيا الأضلاع المرسومان على نفس القاعدة وبين نفس الخطين المتوازيين يكونان متساويان في المساحة ".

(١٣) (أ) أثبت أن المتجه $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$ يكون عموديا على المستوى الذي يحتوي كل من $\vec{A},\vec{B}$.

(ب) أوجد متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين:

$$\vec{A}=(2,-6,-3)\ ,\ \ \vec{B}=(4,3,-1)$$

(١٤) باستخدام خواص حاصل الضرب القياسي أثبت النظرية الهندسية الآتية:

" أقطار المعين تكون متعامدة " .

(١٥) باستخدام المتجهات أثبت النظرية الهندسية الآتية: "مجموع مساحتي المربعين المنشأين على قطري متوازي الأضلاع تساوي مجموع مساحات المربعات المنشأة على أضلاعه ".

(١٦) باستخدام خواص حاصلي الضرب القياسي والاتجاهي، أثبت العلاقتين المثلثيتين الآتيتين:

$$(i)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$(ii)\ \sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

(١٧) (أ) أثبت أن حاصل الضرب القياسي الثلاثي $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})$ يمثل هندسيا بحجم متوازي المستطيلات الذي تمثل جوانبه بالمتجهات $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$.

(ب) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة تمثلها المتجهات:

$$\vec{A}=(5,-2,0)\ ,\ \vec{B}=(1,1,-1),\ \ \vec{C}=(3,0,2)$$

<u>ملحوظة:</u> الحلول الكاملة لهذه المسائل ملحقة بنهاية هذا القسم الأول من الكتاب (تحليل المتجهات) .