الباب الثالث

التفاضل المتغاير Covariant Differentiation

(١) التفاضل المتغاير للمتجه A_μ بالنسبة لـ x^ν يعرف بالعلاقة :

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\alpha \qquad \rightarrow (1)$$

وهو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

(٢) التفاضل المتغاير للمتجه مضاد التغاير A^μ بالنسبة لـ x^ν يعرف بالعلاقة:

$$A^{\mu}_{,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A^\alpha \qquad \rightarrow (2)$$

وهو ممتد مختلط من المرتبة الثانية.

(٣) التفاضل المتغاير للممتد المتغاير $T_{\mu\nu}$ (ذو المرتبة الثانية) يعرف بالعلاقة :

$$\mathrm{T}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial \mathrm{T}_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} \mathrm{T}_{\alpha\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} \mathrm{T}_{\mu\alpha} \qquad \rightarrow (3)$$

(٤) التفاضل المتغاير للممتد مضاد التغاير (ذو المرتبة الثانية) $T^{\mu\nu}$ يعرف بالعلاقة:

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{,\sigma} = \frac{\partial \mathrm{T}^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma\alpha \end{Bmatrix} \mathrm{T}^{\alpha\nu} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \sigma\alpha \end{Bmatrix} \mathrm{T}^{\mu\alpha} \qquad \rightarrow (4)$$

(٥) التفاضل المتغاير للممتد المختلط من المرتبة الثانية T^ν_μ يعرف بالعلاقة:

$$\mathrm{T}^{\nu}_{\mu,\sigma} = \frac{\partial \mathrm{T}^{\nu}_{\mu}}{\partial x^\sigma} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} \mathrm{T}^{\nu}_{\alpha} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \sigma\alpha \end{Bmatrix} \mathrm{T}^{\alpha}_{\mu} \qquad \rightarrow (5)$$

أمثلة محلولة :

مثال (١)

أثبت أن التفاضل المتغاير للممتد A_μ ذي المرتبة الأولى هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل : المطلوب إثبات أن $A_{\mu,\nu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية ، ولإثبات ذلك :

حيث أن $d\chi^\mu$ هو متجه مضاد التغاير فإن $\dfrac{d\chi^\nu}{ds}$ هو أيضا متجه مضاد المتغاير (حيث أن ds كمية لا متغيرة)، وحيث أن A_μ هو متجه متغاير فإن:

$$A_\mu \frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv\cdot \qquad = \text{كمية لا متغيرة}$$ [مثال سابق]

أيضا : فإن معدل تغير هذه الكمية على أي منحنى هو كمية لا متغيرة :

$$\therefore \frac{d}{ds}\left(A_\mu \frac{d\chi^\mu}{ds}\right) = Inv\cdot$$

$$\therefore A_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{ds^2} + \left(\frac{dA_\mu}{ds}\right)\frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv\cdot$$

$$\therefore A_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{ds^2} + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{d\chi^\nu}{ds}\right)\frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv\cdot \qquad \rightarrow (1)$$

وبأخذ معدل التغير هذا على طول المنحنى الجيوديسي

$$\frac{d^2\chi^\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} = o$$

$$\frac{d^2\chi^\sigma}{ds^2} = -\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds}$$

وبالضرب في A_σ :

$$\therefore\ A_\sigma \frac{d^2\chi^\sigma}{ds^2} = -\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} A_\sigma$$

وحيث أن σ رمز دمية فيمكن كتابة $\mu = \sigma$ في الطرف الأيسر، ونحصل على:

$$\therefore\ A_\mu \frac{d^2\chi^\mu}{ds^2} = -\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\sigma \frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} \qquad \rightarrow (2)$$

بالتعويض من (٢) في (١):

$$-\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\sigma \frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} + \frac{\partial A_\mu}{\partial\chi^\nu}\frac{d\chi^\nu}{ds}\frac{d\chi^\mu}{ds} = Inv\ .$$

$$\therefore\ \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial\chi^\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\sigma\right]\frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} = Inv\ .$$

ولكن:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial\chi^\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\sigma \quad \therefore\ A_{\mu,\nu}\frac{d\chi^\mu}{ds}\frac{d\chi^\nu}{ds} = Inv\ .$$

ومن نظرية خرج القسمة:

فحيث أن: $\frac{d\chi^\nu}{ds}$ يمثل متجه مضاد التغاير (ممتد من المرتبة الأولى)وحيث أن الكمية اللا متغيرة (Inv) هي ممتد من المرتبة صفر فإن الكميـة $\left(A_{\mu,\nu}\frac{d\chi^\mu}{ds}\right)$

تمثل ممتدا ، وبتطبيق نظرية خارج القسمة مرة ثانية : حيث أن $\dfrac{d\chi^{\mu}}{ds}$ هو متجه مضاد التغاير (ممتد من المرتبة الأولى) فإن $A_{\mu,\nu}$ يجب أن يكون ممتدا ، وهو ممتد متغاير من المرتبة الثانية ، وهو المطلوب .

مثال (٢):

كيف تحصل على تعريف التفاضل المتغاير للمتجه مضاد التغاير

$$A^{\mu}_{,\nu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial \chi^{\nu}} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A^{\alpha} \qquad \rightarrow (1)$$

من تعريف التفاضل المتغاير للمتجه المتغاير:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial \chi^{\nu}} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_{\alpha} \qquad \rightarrow (2)$$

الحل:

من (٢) بأخذ: $A_{\mu} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha}$ حيث $g_{\mu\alpha}$ هو الممتد المتري

$$\therefore\ A_{\mu,\nu} = g_{\mu\alpha} A^{\alpha}_{,\nu}$$

$$= \frac{\partial (g_{\mu\alpha} A^{\alpha})}{\partial x^{\nu}} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{Bmatrix} (g_{\beta\alpha} A^{\alpha})$$

$$= A^{\alpha} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \mu\nu \end{Bmatrix} g_{\beta\alpha} A^{\alpha}$$

$$= A^{\alpha} \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - [\mu\nu, \alpha] A^{\alpha}$$

$$= A^{\alpha} ([\alpha\nu, \mu] + [\mu\nu, \alpha]) + g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - [\mu\nu, \alpha] A^{\alpha}$$

$$= g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + [\alpha\nu, \mu] A^{\alpha}$$

وبالضرب في $g^{\mu\sigma}$:

$$\therefore\ g^{\mu\sigma} g_{\mu\alpha} A^{\alpha}_{,\nu} = g^{\mu\sigma} g_{\mu\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + g^{\mu\sigma} [\alpha\nu\ ,\mu] A^{\alpha}$$

$$\therefore\ \delta^{\sigma}_{\alpha} A^{\alpha}_{,\nu} = \delta^{\sigma}_{\alpha} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A^{\alpha}$$

$$\therefore\ A^{\sigma}_{,\nu} = \frac{\partial A^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A^{\alpha}$$

وهي المعادلة (١) المطلوبة (بوضع $\sigma = \mu$).

<u>مثال(٣)</u>: أثبت أن المشتقة المتغايرة لكل من الممتدات الآتية تساوي صفرا.

(i) الممتد المتري $g_{\mu\nu}$.

(ii) الممتد المتري المرافق $g^{\mu\nu}$.

(iii) دلتاكرونيكر δ^{ν}_{μ}

<u>الحل :</u>

(i) <u>للممتد</u> $g_{\mu\nu}$: من التعريف:

$$g_{\mu\nu\ ,\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} g_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} g_{\mu\sigma}$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - [\mu\alpha\ ,\nu] - [\nu\alpha\ ,\mu]$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - ([\mu\alpha\ ,\nu] - [\nu\alpha\ ,\mu])$$

$$= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) = 0$$

وذلك حيث أن : $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = [\mu\alpha\ ,\nu] + [\nu\alpha\ ,\mu]$

(ii) للممتد $g^{\mu\nu}$: من التعريف:

$$g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} g^{\sigma\nu} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} g^{\mu\sigma}$$

$$= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + (g^{\sigma\nu} \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} + g^{\mu\sigma} \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix}) \qquad \to (1)$$

ويمكن إثبات العلاقة الآتية:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = -(g^{\mu\sigma} \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} + g^{\nu\sigma} \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix}) \qquad \to (2)$$

فبالتعويض من (٢) في (١) :

$$\therefore \; g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

وهو المطلوب.

<u>إثبات العلاقة (٢):</u>

حيث أن

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(g^{ik} g_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\delta^{k}_{j}\right) = 0$$

$$\therefore \; g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

$$\therefore \; g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}}$$

بالضرب في g^{lj} :

$$\therefore g^{lj} g_{ij} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{lj} g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\alpha}}$$

$$\therefore \delta^{l}_{i} \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{lj} g^{ik} \left([i\alpha, j] + [j\alpha, i]\right)$$

$$\therefore\ \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{lj} g^{ik} [i\alpha , j] - g^{lj} g^{ik} [j\alpha , i]$$

$$= -g^{ik} \begin{Bmatrix} l \\ i\alpha \end{Bmatrix} - g^{lj} \begin{Bmatrix} k \\ j\alpha \end{Bmatrix}$$

$$= -g^{lj} \begin{Bmatrix} k \\ j\alpha \end{Bmatrix} - g^{ik} \begin{Bmatrix} l \\ i\alpha \end{Bmatrix}$$

وحيث أن i, j هي رموز دمية فانه يمكننا أخذ $i = j = \sigma$

$$\therefore \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^{\alpha}} = -g^{l\sigma} \begin{Bmatrix} k \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} - g^{k\sigma} \begin{Bmatrix} l \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix}$$

$$= -\left(g^{l\sigma} \begin{Bmatrix} k \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} + g^{k\sigma} \begin{Bmatrix} l \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} \right)$$

وهي العلاقة (٢) المطلوبة (بأخذ $l = \mu\ ,\ k = \nu$).

(iii) <u>دلتاكرونيكر</u> δ_{μ}^{ν} : من التعريف:

$$\delta_{\mu,\alpha}^{\nu} = \frac{\partial \delta_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} \delta_{\sigma}^{\nu} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} \delta_{\mu}^{\sigma} \qquad \rightarrow (3)$$

ولكن: حيث أن $\delta_{\mu}^{\nu} = 1,0$ فإن $\dfrac{\partial \delta_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0$

أيضا:

$$\delta_{\sigma}^{\nu} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}$$

$$\delta_{\mu}^{\sigma} \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\mu \end{Bmatrix}$$

بالتعويض في (٣):

$$\therefore\ \delta^{\nu}_{\mu,\alpha} = 0 - \begin{Bmatrix} \nu \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\mu \end{Bmatrix} = 0 - \begin{Bmatrix} \nu \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} = 0$$

وهو المطلوب.

مثال(٤): أثبت أن التفاضل المتغاير لمجموع والفرق بين ممتدين تخضع لنفس قاعدة التفاضل العادي.

الحل: بفرض أن $A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ ممتدان بحيث أن مجموعهما هو:

$$C_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$$

فيكون المطلوب إثبات أن:

$$(A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})_{,\alpha} = C_{\mu\nu,\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} + B_{\mu\nu,\alpha}$$

ولإثبات ذلك: من التعريف:

$$C_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial C_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} C_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} C_{\mu\sigma}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(A_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}(A_{\sigma\nu} + B_{\sigma\nu}) - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix}(A_{\mu\sigma} + B_{\mu\sigma})$$

$$= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} B_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} A_{\mu\sigma} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} B_{\mu\sigma}$$

$$= \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} A_{\mu\sigma} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial B_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} B_{\sigma\nu} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\alpha \end{Bmatrix} B_{\mu\sigma} \right) = A_{\mu\nu,\alpha} + B_{\mu\nu,\alpha}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$(A_{\mu\nu} - B_{\mu\nu})_{,\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} - B_{\mu\nu,\alpha}$$

مثال(٥):

أثبت أن المشتقة المتغايرة لحاصل ضرب ممتدين تخضع لنفس قاعدة التفاضل العادي

الحل: للتبسيط نأخذ ممتدين من المرتبة الأولى $A_\mu,\ B^\nu$ فإن حاصل ضربهما هو $C^\nu_\mu = A_\mu B^\nu$ ، فيكون المطلوب إثبات أن:

$$C^\nu_{\mu,\alpha} = (A_\mu B^\nu)_{,\alpha} = A_\mu B^\nu_{,\alpha} + B^\nu A_{\mu,\alpha}$$

ولإثبات ذلك:- من التعريف

$$\begin{aligned}
C^\nu_{\mu,\alpha} &= \frac{\partial C^\nu_\mu}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} C^\nu_\sigma + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} C^\sigma_\mu \\
&= \frac{\partial (A_\mu B^\nu)}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\sigma B^\nu + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} A_\mu B^\sigma \\
&= A_\mu \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + B^\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\sigma B^\nu + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} A_\mu B^\sigma \\
&= A_\mu \left(\frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} B^\sigma \right) + B^\nu \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\sigma \right) \\
&= A_\mu B^\nu_{,\alpha} + B^\nu A_{\mu,\alpha}
\end{aligned}$$

حيث:

$$B^\nu_{,\alpha} = \frac{\partial B^\nu}{\partial x^\alpha} + \begin{Bmatrix} \nu \\ \alpha\sigma \end{Bmatrix} B^\sigma$$

$$A_{\mu,\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\sigma$$

وبالمثل: يمكن تطبيق هذه القاعدة على الممتدات الأخرى

(i) ففي حالة الممتد من المرتبة صفر (الكمية القياسية I):

$$(IA_{\mu})_{,\alpha} = IA_{\mu,\alpha} + A_{\mu} I_{,\alpha}$$

حيث $I_{,\alpha} = \dfrac{\partial I}{\partial x^{\alpha}}$

(ii) وفي حالة ضرب الممتدين $A^{\sigma}, B_{\mu\nu}$ ، حيث $C^{\sigma}_{\mu\nu} = A^{\sigma} B_{\mu\nu}$

$$\therefore\ C^{\sigma}_{\mu\nu,\alpha} = (A^{\sigma} B_{\mu\nu})_{,\alpha}$$

$$= A^{\sigma} B_{\mu\nu,\alpha} + B_{\mu\nu} A^{\sigma}_{,\alpha}$$

(iii) وفي حالة ضرب الممتدين A^{j}_{k}, B^{lm}_{n} حيث: $C^{jlm}_{kn} = A^{j}_{k} B^{lm}_{n}$

$$\therefore\ C^{jlm}_{kn,\alpha} = \left(A^{j}_{k} B^{lm}_{n}\right)_{,\alpha}$$

$$= A^{j}_{k} B^{lm}_{n,\alpha} + B^{lm}_{n} A^{j}_{k,\alpha}$$

<u>مثال(٦):</u> أثبت أن:

$$(g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta,\alpha}$$

<u>الحل:</u> بتطبيق قاعدة التفاضل العادي على التفاضل المتغاير

$$\therefore\ (g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta,\alpha} + A^{\nu\sigma}_{\beta} g_{\mu\nu,\alpha}$$

ومن المثال رقم (٣) ← $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$

$$\therefore\ (g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta})_{,\alpha} = g_{\mu\nu} A^{\nu\sigma}_{\beta,\alpha}$$

وهو المطلوب.

التدرج (grad) والتباعد (div) والالتفاف (curl) في الصورة الممتدة:

(١) التدرج(grad):

يعرف التدرج لكمية قياسية (لا متغيرة) I بالعلاقة:-

$$grad\ I = \frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} = I_{,\alpha} \qquad \rightarrow (1)$$

(٢) التباعد(div):

يعرف التباعد لمتجه A^{μ} بالعلاقة:- $div \quad A^{\mu} = A^{\mu}_{,\mu}$

وإذا كان $\mathfrak{A}^{\mu} = \sqrt{-g}\,A^{\mu}$

ويعرف بالكثافة الممتدة (Tensor density) للمتجه A^{μ} ، فيمكن إثبات أن

$$\mathfrak{A}^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial \mathfrak{A}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (2)$$

$$\therefore\ A^{\mu}_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\mu})}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (3)$$

(٣) الالتفاف (curl):

يعرف الالتفاف للمتجه A_{μ} بالعلاقة:

$$curl \quad A_{\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (4)$$

وهي عبارة عن ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

أمثلة محلولة:

مثال(١): أثبت أن:

(i) تدرج كمية قياسية I :

$$grad \quad I = \frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} = I_{,\alpha}$$

(ii) تباعد متجه A^{μ} :

$$div \quad A^{\mu} = A^{\mu}_{,\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\mu})}{\partial x^{\mu}}$$

(iii) التفاف متجه A_{μ} :

$$curl \quad A_{\mu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$$

وهو عبارة عن ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

الحل:

(i) إذا كان I كمية لا متغيرة (قياسية) وكان A_{μ} متجه متغاير فان حاصل ضربهما (IA_{μ}) يكون متجها متغايرا ، وتكون مشتقته المتغايرة :

$$\begin{aligned}
(IA_{\mu})_{,\alpha} &= \frac{\partial(IA_{\mu})}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}(IA_{\sigma}) \\
&= I\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + A_{\mu}\frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}(IA_{\sigma}) \\
&= I\left(\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix}A_{\sigma}\right) + A_{\mu}\frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} \\
&= IA_{\mu,\alpha} + A_{\mu}\frac{\partial I}{\partial x^{\alpha}} \qquad \rightarrow (1)
\end{aligned}$$

ولكن من تطابق المشتقة المتغايرة لحاصل الضرب مع المشتقة العادية:

$$\therefore (IA_{\mu})_{,\alpha} = IA_{\mu,\alpha} + A_{\mu}I_{,\alpha} \qquad \to (2)$$

من (٢) و(١) نجد أن $I_{,\alpha} = \dfrac{\partial I}{\partial x^{\alpha}}$ وهو المطلوب.

(ii) من التعريف:

$$A^{\mu}_{,\alpha} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma\alpha \end{Bmatrix} A^{\sigma}$$

بوضع $\alpha = \mu$:

$$A^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma\mu \end{Bmatrix} A^{\sigma}$$

$$= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma}$$

$$\begin{Bmatrix} \mu \\ \sigma\mu \end{Bmatrix} = \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\sigma}}$$

وباستبدال σ بـــ μ في الحد الثاني:

$$A^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial \ln(\sqrt{-g})}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}$$

$$= \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g}\, \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + A^{\mu} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial \sqrt{-g}\, A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right] \qquad \to (3)$$

وبوضع $\mathcal{A}^{\mu} = \sqrt{-g}\,A^{\mu}$ فان :

$$\sqrt{-g}\,\mathcal{A}^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathcal{A}^{\mu})}{\partial x^{\mu}}$$

$$\therefore\ \mathcal{A}^{\mu}_{,\mu} = \frac{\partial \mathcal{A}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (4)$$

تـسمى الكميـــة $\mathcal{A}^{\mu} = \sqrt{-g}\,A^{\mu}$ بالكثافـــة الممتـــدة (Tensor density للمتجه A^{μ} .

(iii) حيث أن:

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_{\sigma}$$

$$A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\mu \end{Bmatrix} A_{\sigma}$$

وبالطرح واعتبار $\begin{Bmatrix} \sigma \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \nu\mu \end{Bmatrix}$

$$\therefore\ A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \rightarrow (5)$$

ولإثبات أن هذه الكمية تشكل ممتدا متغايرا من المرتبة الثانية:

نكتب معادلات التحويل للمتجهين $A_{\mu},\ A_{\nu}$:

$$A'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} A_{\mu} \ ,\ A'_{\beta} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\nu}$$

$$\therefore \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} A_\mu$$

أيضا:

$$\frac{\partial A'_\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial A_\nu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\nu$$

$$= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} A_\nu$$

بالطرح:

$$\therefore \frac{\partial A'_\alpha}{\partial x'^\beta} - \frac{\partial A'_\beta}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}\right)$$

$$\therefore C'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\beta} C_{\mu\nu}$$

ومن هذا يتضح أن:

$C_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$ هو ممتد متغاير من المرتبة الثانية.

وهو المطلوب.

<u>مثال(٢):</u> إذا كان $A_{\mu\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل من المرتبة الثانية فاثبت أن:

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

وأن هذه الكمية تمثل ممتدا.

الحل: حيث أن $A_{\mu\nu}$ ممتدا مضاد التماثل:

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \rightarrow \therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} A_{\alpha\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} A_{\mu\alpha} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\mu \end{Bmatrix} A_{\alpha\sigma} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{Bmatrix} A_{\nu\alpha} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{Bmatrix} A_{\alpha\mu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_{\sigma\alpha} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) - \left(A_{\alpha\nu} + A_{\nu\alpha} \right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}$$

$$- \left(A_{\mu\alpha} + A_{\alpha\mu} \right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} - \left(A_{\alpha\sigma} + A_{\sigma\alpha} \right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\mu \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \rightarrow (2)$$

وذلك باستخدام العلاقة(١).

وحيث أن الطرف الأيسر من (٢) هو مجموع ممتدات كل منهما من المرتبة الثالثة فان الطرف الأيمن أي الكمية $\left(\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)$ تمثل ممتدا من المرتبة الثالثة .

وهو المطلوب.

مثال(٣): إذا كان: $A_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ ممتدا مضاد التماثل، فاثبت أن:

$$A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = 0$$

<u>الحل:</u> حيث أن:

$$A_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$$

$$\therefore A_{\nu\mu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

$$\therefore A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu} = (A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) + (A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}) = 0$$

وهي من صفات الممتد مضاد التماثل حيث: $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$.

أيضا حيث أن:

$$A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

$$\therefore A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x^σ :

$$\therefore \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu}$$

ومن المثال(٢) واستخدام هذه العلاقة:

$$\therefore A_{\mu\nu,\sigma} + A_{\nu\sigma,\mu} + A_{\sigma\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} \right) = 0$$

وهو المطلوب.

ممتد الانحناء (ممتد ريمان - كريستوفل)

Curvature Tensor (Riemann -Christoffel Tensor)

إذا كان A_μ ممتد متغاير اختياري فيمكن إثبات أن:

$$\boxed{A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} = A_\alpha B^\alpha_{\mu\nu\sigma}}$$

حيث A_α متجه اختياري ، $B^\alpha_{\mu\nu\sigma}$ تشكل ممتد (مختلط من المرتبة ٤) ويعرف بممتد الانحناء (أو ممتد ريمان - كريستوفل) .

الإثبات: إذا كان A_μ ممتد متغاير اختياري من المرتبة الأولى (أي متجه)

$$\therefore A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\alpha$$

$$\therefore A_{\mu,\nu\sigma} = (A_{\mu,\nu})_{,\sigma}$$

$$= \frac{\partial (A_{\mu,\nu})}{\partial x^\sigma} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} A_{\alpha,\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} A_{\mu,\alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} A_\alpha \right) - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu} - \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A_\beta \right)$$

$$- \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \begin{Bmatrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\gamma \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\sigma} - A_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}$$

$$+ \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha\nu \end{Bmatrix} A_\beta - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \nu\sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \gamma \\ \mu\alpha \end{Bmatrix} A_\gamma \qquad \rightarrow (1)$$

بتبديل مواقع ν,σ نحصل على:

$$A_{\mu,\sigma\nu}=\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}-\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\nu}-A_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\sigma}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\sigma\end{Bmatrix}A_\beta$$
$$-\begin{Bmatrix}\alpha\\ \sigma\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \sigma\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}A_\gamma \qquad \rightarrow (2)$$

بطرح (١) من (٢) نحصل على:

$$A_{\mu,\nu\sigma}-A_{\mu,\sigma\nu}=\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\nu\end{Bmatrix}A_\beta-A_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$$
$$-\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\sigma\end{Bmatrix}A_\beta+A_\alpha\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}$$
$$=A_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\right]$$
$$+A_\beta\left[\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\,\sigma\end{Bmatrix}\right]$$

بتبديل β بـــ α في الحد الثاني نحصل على:

$$A_{\mu,\nu\sigma}-A_{\mu,\sigma\nu}=A_\alpha[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}]=A_\alpha B^\alpha_{\mu\nu\sigma} \qquad \rightarrow (3)$$

حيث:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix} \qquad \text{———} \quad (\mathrm{I})$$

هو ممتد الانحناء أو ممتد ريمان - كريستوفل.

من (٣) نلاحظ أن: $A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} \neq 0 \quad \leftarrow \quad A_{\mu,\nu\sigma} \neq A_{\mu,\sigma\nu}$

مثال:

(أ) باستخدام نظرية خارج القسمة، اثبت أن $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ يشكل ممتدا.

(ب) أثبت أن الممتد $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ مضاد التماثل في ν,σ

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = -B^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}$$

(ج) الممتد $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ يخضع للعلاقة الدورية:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} + B^{\alpha}_{\nu\sigma\mu} + B^{\alpha}_{\sigma\mu\nu} = 0$$

الحل:

(أ) حيث أن

$$A_{\mu,\nu\sigma} - A_{\mu,\sigma\nu} = A_{\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$$

فان: الطرف اليسر يشكل الفرق بين ممتدين من المرتبة ٣ فهذا الطرف يكون ممتدا من نفس المرتبة (٣) .

وحيث أن A_{α} هو ممتد متغاير اختياري فمن نظرية خارج القسمة نجد أن الكمية $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ لابد أن تشكل ممتدا .

(ب) من العلاقة (I) بتبديل ν,σ نحصل على :

$$B^{\alpha}_{\mu\sigma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}$$

$$\therefore\ -B^{\alpha}_{\mu\sigma\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix} = B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$$

$$\therefore\ B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = -B^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}$$

(ج) من العلاقة (I) :

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix} \quad \to (1)$$

بتغيير $\mu\to\nu$, $\nu\to\sigma$, $\sigma\to\mu$

نحصل على:

$$B^{\alpha}_{\nu\sigma\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\mu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\sigma\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \nu\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \nu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\mu\end{Bmatrix} \quad \text{———} (2)$$

أيضا بتغيير $\mu\to\sigma$, $\nu\to\mu$, $\sigma\to\nu$

نحصل على:

$$B^{\alpha}_{\sigma\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\begin{Bmatrix}\alpha \\ \sigma\nu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha \\ \sigma\mu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta \\ \sigma\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha \\ \beta\mu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta \\ \sigma\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha \\ \beta\nu\end{Bmatrix} \qquad \text{———} \quad (3)$$

بجمع (٣)، ((٢, (١) نحصل على:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} + B^{\alpha}_{\nu\sigma\mu} + B^{\alpha}_{\sigma\mu\nu} = 0$$

وهو المطلوب.

ممتد الانحناء المتغاير (Covariant Curvature Tensor):

بإنزال (خفض) الدليل α في ممتد الانحناء $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ نحصل علـــى الممتـــد المتشارك لـــ $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ بالصورة: $B_{\rho\mu\nu\sigma} = g_{\rho\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$

ويسمى بالممتد المتغاير للانحناء (أو ممتد الانحناء المتغاير).

مثال : أثبت أن العلاقة لممتد الإنحناء المتغاير :

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}\right)$$

$$+ g_{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \rho\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\nu\end{Bmatrix}\right)$$

الحل: حيث أن:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}$$

$$\therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} = g_{\rho\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$$

$$= g_{\rho\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^{\sigma}}$$

$$+ g_{\rho\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix} - g_{\rho\alpha}\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}$$

ولكن: $[\mu\sigma, \rho] = g_{\rho\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = [\mu\sigma,\nu] + [\nu\sigma,\mu]$$

$$\therefore\ B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[\mu\sigma,\rho] - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\left([\rho\nu,\alpha]+[\alpha\nu,\rho]\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}[\mu\nu,\rho] + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\left([\rho\sigma,\alpha]+[\alpha\sigma,\rho]\right) + [\beta\nu,\rho]\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix} - [\beta\sigma,\rho]\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$$

وبتبديل $\alpha \to \beta$ في الحدين الأخريين، نحصل على:

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}[\mu\sigma,\rho] - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}[\mu\nu,\rho] + \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}[\rho\sigma,\alpha] - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}[\rho\nu,\alpha]$$

وحيث أن:

$$[\mu\nu,\alpha] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\ ,\ [\mu\nu,\alpha] = g_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$$

$$\therefore B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)$$

$$+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}g_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}g_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\nu\end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\nu}}\right)$$

$$+ g_{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\nu\end{Bmatrix}\right) \qquad \to (II)$$

وهي العلاقة المطلوبة.

ملحوظة:

يتمتع الممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ بالخواص التماثلية ومضادة التماثل الآتية:

(١) $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ مضاد التماثل في الدليلين الأولين (ρ,μ) وفي الدليلين الأخيرين (ν,σ) :

$$\therefore\ B_{\rho\mu\nu\sigma} = -B_{\mu\rho\nu\sigma}$$

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = -B_{\rho\mu\sigma\nu}$$

(٢) $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ متماثل في زوجين من الأدلة $(\rho\mu,\nu\sigma)$: $B_{\rho\mu\nu\sigma} = B_{\nu\sigma\rho\mu}$

ويمكن إثبات ذلك بسهولة.

الخاصية الدورية للممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$:

يمكن إثبات الخاصية الدورية الآتية لممتد الانحناء المتغاير

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} + B_{\rho\nu\sigma\mu} + B_{\rho\sigma\mu\nu} = 0$$

الإثبات:- من (II):

$$B_{\rho\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\nu}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\sigma\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\nu\end{Bmatrix}\right) \rightarrow (1)$$

بإجراء التغيير: $\mu \rightarrow \nu, \nu \rightarrow \sigma, \sigma \rightarrow \mu$

$$\therefore\ B_{\rho\nu\sigma\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 g_{\nu\sigma}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}\right) + g_{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\mu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \rho\sigma\end{Bmatrix}\right) \rightarrow (2)$$

وبإجراء التغيير $\mu \to \sigma, \nu \to \mu, \sigma \to \nu$

$$\therefore B_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \right)$$

$$+ g_{\alpha\beta}\left(\begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\mu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta \\ \rho\nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha \\ \sigma\nu \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta \\ \rho\mu \end{Bmatrix} \right) \qquad \to (3)$$

بجمع (٣),(٢),(١) نحصل على:

$$\boxed{B_{\rho\mu\nu\sigma} + B_{\rho\nu\sigma\mu} + B_{\rho\sigma\mu\nu} = 0}$$

وهي الخاصية الدورية للممتد $B_{\rho\sigma\mu\nu}$

ملاحظة:

في الفــراغ ذو الأربعــة أبعــاد (فــراغ منكوفــسكي) فــان ممتــد الانحنــاء المتغاير $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ يكون له ٢٠ مركبة فقط .

الإثبات:

من الخواص التماثلية ومضادة التماثل للممتد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ نجــد أن $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ لــه الـ ٢١ مركبة الآتية:

$B_{1212}, B_{1223}, B_{1313}, B_{1324}, B_{1423}, B_{2323}, B_{2424}, B_{1213}, B_{1224}, B_{1314},$
$B_{1334}, B_{1424}, B_{2324}, B_{2434}, B_{1214}, B_{1234}, B_{1323}, B_{1414}, B_{1434}, B_{2334}, B_{3434},$

ويقلل استخدام العلاقة الدورية $B_{1234} + B_{1342} + B_{1423} = 0$

هذا العدد بواحد فيصبح عدد المركبات المــستقلة للممتــد $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ فــي فــراغ منكوفسكي هو ٢٠ مركبة.

الفضاء المسطح (Flate Space):

يعرف الفضاء المسطح بأنه تلك المنطقة من الفضاء التي تخلـو مـن المـادة أو الطاقة.

رياضيا: يعرف الفضاء المسطح بأنه الفضاء الذي له مركبات الممتـد المتـري $g_{\mu\nu}$ تكون ثابتة، أي $g_{\mu\nu} = const$

$$\therefore \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} = 0 \rightarrow [\mu\nu, \sigma] = 0, \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = 0$$

وحيث أن الممتد $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ يحتوي على حواصل ضرب ومشتقات $\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$

$$\therefore B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} = 0$$

مثال: أثبت أن الفراغ الاقليدي ذو الثلاثة أبعاد هو فضاء مسطح.

الحل: بأخذ مترية الفراغ الاقليدي بالصورة:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\therefore g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$

$$g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)$$

$$g^{11} = \frac{1}{g^{11}} = 1, g^{22} = \frac{1}{g^{22}} = 1, g^{33} = \frac{1}{g^{33}} = 1$$

ويمكن حساب رموز كريستوفل لهذا الفراغ من العلاقة:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

ثم نقوم بحساب الممتد $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ فإذا كـان $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}=0$ فهـذا يعنـي أن الفـراغ الاقليدي هو فضاء مسطح (اثبت ذلك).

تقليص ممتد الانحناء-ممتد ريشي (Ricci Tensor)

يعرف ممتد الانحناء $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ بالعلاقة:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\sigma\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\sigma\end{Bmatrix}$$

ويمكن تقليص هذا الممتد بأخذ $\sigma=\alpha$ فنحصل على الممتـد $R_{\mu\nu}$ الـذي يعرف بممتد ريشي.

$$R_{\mu\nu}=B^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\alpha\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{\partial^{2}ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$

$$\therefore\ R_{\mu\nu}=\frac{\partial^{2}ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}$$

مثال: أثبت أن ممتد ريشي $R_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل .

الحل:

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial^{2}ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial\ ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}\qquad\rightarrow(1)$$

بتبديل الـ ν,μ نحصل على:

$$R_{\nu\mu}=\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \nu\mu\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\mu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \nu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\mu\end{Bmatrix}$$
$$=\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\alpha\\ \nu\beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta\\ \alpha\mu\end{Bmatrix}$$
$$=\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}-\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\nu\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\beta\\ \mu\alpha\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\nu\end{Bmatrix}\qquad\rightarrow(2)$$

بمقارنة (٢) , (١) نجد أن: $R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}$ أي أن $R_{\mu\nu}$ هو ممتد متماثل.

<u>الانحناء القياسي(Scalar Curvature):</u>

<u>يعرف الانحناء القياسي لأي فضاء بالعلاقة:</u>

$$R=R^{\mu}_{\mu}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\qquad\rightarrow(1)$$

وإذا كان $R_{\mu\nu}=kg_{\mu\nu}$ فيمكن إثبات أن: $R=k$ وذلك لأن:

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(kg_{\mu\nu})=k(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu})=k$$

حيث:

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=1$$

مثال:

أحسب ممتد ريشي والانحناء القياسي للفضاء المعرف بالعلاقة:

$$dS^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

الحل: سبق إيجاد رموز كريستوفل لهذا المتري، حيث $x^1 = \theta, x^2 = \phi$

$$g_{11} = a^2, g_{22} = a^2 \sin^2\theta^2, g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g = a^4 \sin^2\theta$$

$$g^{11} = \frac{1}{a^2}, g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2\theta}, g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -\sin\theta\cos\theta, \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \cot\phi$$

وعلى هذا فيوجد فقط مركبة متغايرة واحدة لممتد الانحناء $B_{\rho\mu\nu\sigma}$ هي: $B_{1221} = -a^2 \sin^2\theta$ ويكون لممتد ريشي $R_{\mu\nu}$ مركبتان غير صفريتان فقط $R_{11} = -1, R_{22} = -\sin^2\theta$ ويصبح الانحناء القياسي:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}$$

$$= \frac{-1}{a^2} + \frac{(-\sin^2\theta)}{a^2 \sin^2\theta} = \frac{-2}{a^2}$$

متطابقة بيانكي (الخاصية التفاضلية لممتد الانحناء) Bianchi identity

في أي فراغ ريماني، من الممكن دائما إيجاد منظومة إحداثيات عند نقطة الأصل بحيث تكون المشتقة الأولى للممتد المتري $(g_{\mu\nu})$ متلاشية بينما المشتقة الثانية تكون غير متلاشية.

مثل هذه الإحداثيات تسمى الإحداثيات الريمانية (Riemannian Coordinates) أو الإحداثيات الجيوديسية(Geodesic Coordinates) .

ولذلك فان الشروط اللازمة لتلك الإحداثيات هي:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0, [\mu\nu, \alpha] = 0, \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = 0$$

عند نقطة الأصل

وبذلك تؤول المشتقة التغايرية إلى المشتقة الجزئيـة العاديـة ، ويـؤول ممتـد ريمان – كريستوفل $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$ إلى :

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$$

وذلك عند نقطة الأصل 0 للإحداثيات الجيوديسية.

أيضا عند o: فان المشتقة المتغايرة سوف تؤول إلى المشتقة العادية

$$\therefore B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} = \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} \qquad \rightarrow (1)$$

وبالمثل يمكننا كتابة:

$$B^{\alpha}_{\mu\sigma\rho,\nu} = \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\rho \end{Bmatrix}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} - \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\sigma \end{Bmatrix}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \qquad \rightarrow (2)$$

$$B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\sigma} = \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{Bmatrix}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\rho}} - \frac{\partial^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \mu\rho \end{Bmatrix}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\sigma}} \qquad \rightarrow (3)$$

بجمع (٣), (٢), (١) نحصل على:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} + B^{\alpha}_{\mu\sigma\rho,\nu} + B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\sigma} = 0 \qquad \rightarrow (4)$$

وحيث أن كل حد من هذه المتطابقة يشكل ممتدا فهي معادلة ممتدات (Tensorial Equation) ، وهذا يعني أنه إذا كانت متحققة في منظومة الإحداثيات الجيوديسية (أو الريمانية) فهي متحققة في كل أنظمة الإحداثيات الأخرى ، وتعرف العلاقة (٤) بمتطابقة بيانكي (Bianchi Identity).

ملحوظة:

يمكن كتابة علاقة بيانكي (٤) في صورة أخرى كالآتي:

$$\therefore\ g_{\beta\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} = (g_{\beta\alpha} B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma})_{,\rho} = B_{\beta\mu\nu\sigma,\rho}$$

وذلك بضرب (٤) في $g_{\beta\alpha}$ وملاحظة أن $g_{\beta\alpha}$ يكون ثابتاً في عملية التفاضل المتغير .

وتصبح متطابقة بيانكي بالصورة:

$$B_{\beta\mu\nu\sigma,\rho} + B_{\beta\mu\sigma\rho,\nu} + B_{\beta\mu\rho\nu,\sigma} = 0 \qquad \rightarrow (5)$$

مثال:

من متطابقة بيانكي: $B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} + B^{\alpha}_{\mu\sigma\rho,\nu} + B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\sigma} = 0$

استنتج المتطابقة الرباعية (Four Identity) بالصورة:

$$\left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} g^{\nu}_{\mu} R \right)_{,\nu} = 0$$

الحل: حيث أن $B^{\alpha}_{\mu\sigma\rho,\nu}$ هو ممتد مضاد التماثل في σ, ρ

$$\therefore\ B^{\alpha}_{\mu\sigma\rho,\nu} = -B^{\alpha}_{\mu\rho\sigma,\nu}$$

وتصبح متطابقة بيانكي:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} - B^{\alpha}_{\mu\rho\sigma,\nu} + B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\sigma} = 0$$

وبتقليص تلك المتطابقة بوضع $\alpha = \sigma$:

$$\therefore B^{\alpha}_{\mu\nu\sigma,\rho} - B^{\alpha}_{\mu\rho\alpha,\nu} + B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\alpha} = 0$$

ومن تعريف ممتد ريشي:

$$B^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = R_{\mu\nu}$$

$$\therefore R_{\mu\nu,\rho} - R_{\mu\rho,\nu} + B^{\alpha}_{\mu\rho\nu,\alpha} = 0$$

بالضرب في $g^{\mu\rho}$ وملاحظة أن: $g^{\mu\rho}_{,\sigma} = 0$

$$\therefore (g^{\mu\rho}R_{\mu\nu})_{,\rho} - (g^{\mu\rho}R_{\mu\rho})_{,\nu} + (g^{\mu\rho}B^{\alpha}_{\mu\rho\nu})_{,\alpha} = 0$$

$$\therefore R^{\rho}_{\nu,\rho} - R_{,\nu} + R^{\alpha}_{\nu,\alpha} = 0$$

وبتغيير ρ بـ α في الحد الأول واعتبار أن $R_{,\nu} = g^{\alpha}_{\nu}R_{,\alpha}$

$$\therefore R^{\alpha}_{\nu,\alpha} - g^{\alpha}_{\nu}R_{,\alpha} + R^{\alpha}_{\nu,\alpha} = 0$$

$$\therefore 2R^{\alpha}_{\nu,\alpha} - g^{\alpha}_{\nu}R_{,\alpha} = 0$$

$$\therefore R^{\alpha}_{\nu,\alpha} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\nu}R_{,\alpha} = 0$$

$$\therefore (R^{\alpha}_{\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\nu}R)_{,\alpha} = 0$$

وهي المتطابقة الرباعية والتي يمكن كتابتها أيضاً بالصورة:

$$(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}R)_{,\nu} = 0 \qquad \rightarrow (1)$$

[وذلك بوضع $\alpha = \nu$, $\nu = \mu$]

ممتد الطاقة المادية Material Energy Tensor

بضرب المتطابقة الرباعية (١) في $g^{\mu\sigma}$ وملاحظة أن $g^{\mu\sigma}_{,\nu}=0$

نحصل على:
$$(g^{\mu\sigma}R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g^{\nu}_{\mu}R)_{,\nu}=0$$
$$\therefore\ (R^{\sigma\nu}-\frac{1}{2}g^{\sigma\nu}R)_{,\nu}=0$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{,\nu}=0$$

[بإستبدال $\mu\leftarrow\sigma$].

وبكتابة $T^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ والذي يسمى بممتد الطاقة المادية فإن

المتطابقة السابقة تأخذ الصورة: $T^{\mu\nu}_{,\nu}=0$

ويعني هذا أن تباعد (div) ممتد الطاقة يكون متلاشياً.

ممتد آينشتين (أو ممتد الكون) Einstein (or World) Tensor

يعرف ممتد آينشتاين أو ممتد الكون بالعلاقة:

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

حيث R هي الانحناء القياسي المناظر لممتد ريشي $R_{\mu\nu}$

$$R=R^{\mu}_{\mu}=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

<u>مثال:</u> أثبت أن تباعد ممتد آينشتاين يكون متلاشياً

<u>الحل:</u> حيث أن المتطابقة الرباعية يمكن كتابتها بالصورة:

$$(R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}R)_{,\nu}=0$$

أو بالصورة:

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{,\nu} = 0$$

وحيث أن تباعد ممتد هو مشتقته المتغايرة المتقلصة، فإن تباعد الممتد $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ يجب أن يساوي صفراً

$\therefore$ تباعد ممتد آينشتاين يساوي صفراً أي أن : $G_{\mu\nu,\nu} = 0$.

ويقال أنه حر التباعد (divergence free) .

ملحوظة:

تستخدم هذه الخاصية كثيرا في النظرية النسبية العامة لآينشتاين كأحد أهم العلاقات في تلك النظرية.