الجزء الثاني

التحويلات الهندسية وتطبيقاتها

(الحركات في المستوى الإقليدي)

الباب الخامس

التحويلات الهندسية

Geometric Transformations

كي نتعرض للمفاهيم المختلفة للتحويلات الهندسية يلزم معرفة موضوعات سبق وأن درسها الطالب مثل المجموعة والدوال والرواسم والتحويلات الخطية والمصفوفات والتي سبق وأن قدمناها في الأبواب السابقة. وكذلك يلزم معرفة التمثيلات البارامترية والضمنية والصريحة للمنحنيات في المستوى $\mathbb{R}^2$ والفراغ $\mathbb{R}^3$ وكذلك الأشكال الهندسية التي تقع في المستوى والفراغ.

(١.٥) مقدمة (التمثيلات الصريحة والضمنية):

التمثيل الضمني implicit للمنحنى في المستوى $\mathbb{R}^2$ هو مجموعة نقاط المستوى $\mathbb{R}^2$ التي تحقق العلاقة

$$f(v)=0,\, v\in\mathbb{R}^2$$

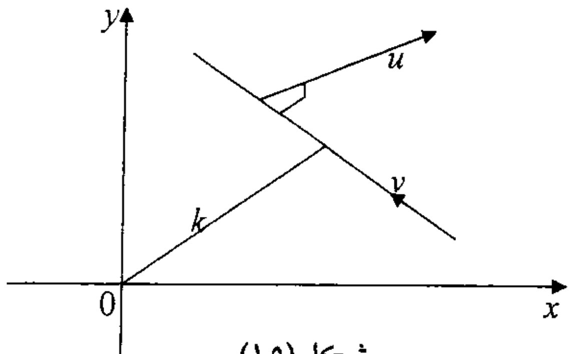
أو في صورة مجموعة نقطية كالآتي:

$$\{v : f(v)=0,\, v\in\mathbb{R}^2\}$$

مثال (١.٥):

(i) المجموعة $L=\{v : v.u+k=0\}$

تمثل خط مستقيم L عمودي على u ويبعد k عن نقطة الأصل حيث v متجه الموضع لأي نقطة على L كما هو موضح في شكل (١.٥).



شكل (١.٥)

(ii) المجموعة $S=\{v:(v-p).(v-p)-r^2=0, v\in\mathbb{R}^2\}$ تمثل دائرة مركزها p ونصف قطرها r

التمثيل الصريح explicit أو البارامتري parametric ويعطى من خلال راسم $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^2$ من $D\subset\mathbb{R}$ إلى المستوى $\mathbb{R}^2$ أي أن المنحنى هو مجموعة النقاط $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ حيث

$$x=x(t), y=y(t), t\in D\subset\mathbb{R}$$

أو في صورة مجموعة نقطية من $\mathbb{R}^2$ كالآتي:

$$\{f(t)=(x(t),y(t),t\in D\}$$

مثال (٢.٥):

(i) خط مستقيم L يحتوي نقطة p ويوازي اتجاه u يكتب على الصورة:

$L=\{p+tu:t\in\mathbb{R}\}$، بارامتر t

(ii) دائرة S' مركزها p ونصف قطرها r تكتب على الصورة:

$$S'=\{p+r(\cos\theta,\sin\theta):\theta\in[0,2\pi]\}$$

θ بارامتر (مسار جسيم في المستوى دالة في الزمن θ)

من الأمثلة السابقة والتعاريف السابقة نلاحظ أن:

الشكل الهندسي geometric object يعبر عنه كمجموعة نقط من المستوى.

تمثيل حد boundary الشكل الهندسي هو مجموعة النقاط التي تقع على الحد للشكل.

تمثيل المجسم solid هو مجموعة النقاط الداخلية interior للشكل.

السؤال الذي يطرح نفسه لماذا نحتاج التحويلات الهندسية؟

(i) نحتاجها لوصف شكل هندسي في نظام إحداثي coordinate system ثم نضعها في نظام أخر أي نحتاج لوصفها في نظام أخر.

(ii) تسمح لنا بخلق مواضع لحظية متعددة multiple instances للشكل الهندسي.

(iii) حركة animation (تحويلات تعتمد على الزمن).

(iv) عرض display باستخدام جهاز مستقل عن الإحداثيات.

(v) المنظر ثلاثي البعد 3 D viewing (الاسقاطات projections).

السؤال: كيف يمكن تحويل شكل هندسي في المستوى $\mathbb{R}^2$.

الإجابة: نقوم بتحريك مجموعة جزئية S من المستوى باستخدام راسم (تحويل) T من المستوى إلى نفسه كالآتي:

$$T : S \longrightarrow \{T(v) \mid v \in S\}$$

فمثلاً في التمثيل البارامتري

$$\{f(t) : t \in D \subset \mathbb{R}\} \xrightarrow{T} \{T(f(t)) : t \in D\}$$

وفي التمثيل الضمني يكون

$$\{v : f(v) = 0\} \xrightarrow{T} \{T(v) : f(v) = 0\}$$
$$= \{v : f(T^{-1}(v)) = 0\}$$

ومن أمثلة التحويلات التي درسها الطالب التحويلات الخطية وطرق تمثيلها وخصوصاً علاقتها بالمصفوفات.

ملاحظة (١،٥):

عندما نتحدث عن التحويلات الهندسية يجب أن نكون حذرين جداً في التعامل مع الشكل الذي يلزم تحويله حيث يوجد مترادفات alternatives أحدهما الشكل الهندسي geometric object المحول والأخر النظام الإحداثي المحول coordinates system. هذان المترادفان قريبان جداً من بعضهما ولكن الصيغ الرياضية التي تستخدم لتنفيذهما مختلفة.

في هذا الكتاب نحاول تغطية التحويلات الهندسية الخاصة بالأشكال الهندسية ونظم الإحداثيات.

وسوف نبدأ إن شاء الله بالتحويلات الإقليدية Euclidean transformation مثل الانتقال والدوران والانعكاس وهي الأكثر شهرة واستخداماً في حياتنا وهي تحويلات خطية تحافظ على الأطوال وقياس الزوايا، ثم نتبعها بالتحويلات الأفينية affine والتحويلات الاسقاطية projective .

التحويلات مثل الانتقال والدوران ومغير البعد والانعكاس للأشكال من خلال نظام إحداثي معطى أو بين نظم إحداثية تسمى تحويل هندسي.

نبدأ بوضع القواعد الضرورية لتحويل النقاط ثم نستخدم ذلك لتحويل الشكل الهندسي geometric object عن طريق تحويل كل رؤوس الشكل.

تعريف (١.٥):

إذا وجد شكلين هندسيين G_1, G_2 في المستوى $\mathbb{R}^2$ بينهما تناظر أحادي

$$g : G_1 \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} G_2 \subset \mathbb{R}^2$$

وإذا كان $g(G_1) = G_2$ فإن الراسم g يقال أنه تحويل للشكل الهندسي.

بأسلوب آخر نعطي التعريف الآتي:

تعريف (٢.٥):

التحويل الهندسي هو راسم تناظر أحادي g (تقابل = شامل + متباين) أي فوقي وأحادي من المستوى $\mathbb{R}^2$ إلى نفسه بحيث:

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(x,y) = (g(x), g(y)) = (\bar{x}, \bar{y})$$

مثال (٣.٥):

بين أن الراسم $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث

$$g(x,y) = (2x, y+1) \;,\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

تحويل هندسي موضحاً ذلك بالرسم.

الحل:

الراسم المعطى أحادي لأنه لأي نقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ إذا كانت صورهم متساوية أي

$$g(x_1,y_1)=g(x_2,y_2)$$

$$\therefore (2x_1,y_1+1)=(2x_2,y_2+1)\Rightarrow(2x_1,y_1)=(2x_2,y_2)$$

$$\Rightarrow(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$$

إذاً من تساوي الصور تكون الأصول متساوية وإذا كانت $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2$ هل يوجد $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (في النطاق) بحيث يكون

$$g(x,y)=(\bar{x},\bar{y})$$

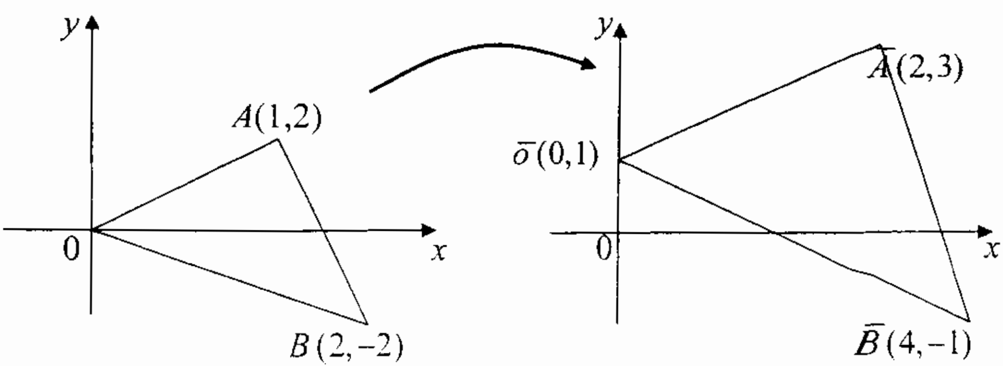
أي

$$(2x,y+1)=(\bar{x},\bar{y})$$

$$\therefore 2x=\bar{x}\ ,\ y+1=\bar{y}\Rightarrow x=\frac{\bar{x}}{2}\ ,\ y=\bar{y}-1$$

$$\therefore g(\frac{\bar{x}}{2},\bar{y}-1)=(\bar{x},\bar{y})$$

إذاً لأي نقطة في المستوى (النطاق المصاحب) يوجد نقطة (أصل) في النطاق وبالتالي التحويل g متباين (أحادي) أي أن g تناظر أحادي وبالتالي فهو تحويل هندسي. كما هو مبين في شكل (٢.٥).



شكل (٢.٥)

مثال (٤.٥):

بـين أن التحويـل $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعـرف بالقاعـدة $g(x,y)=(x^2,2y)$ ليست تحويل هندسي.

الحل:

واضح من المركبة الأولى في الصورة وهي x^2 أن التحويل ليس أحادي لأن

$$g(x,y) = g(-x,y) = (x^2,2y)$$

أي يوجد نقطتين لهما نفس الصورة.

ولذلك النقطة التي إحداثيها الأول سالب لا يمكن أن يوجد لها أصل فمثلاً النقطة

$$(-9,3) \in \mathbb{R}^2 \not\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

بحيث $x^2 = -9$

أي أن g ليس فوقي وبالتالي فهو ليس تقابل (تناظر أحادي) أي أنه ليس تحويل هندسي.

تعريف (٣.٥):

التحويل $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ بحيث

$$I(x,y) = (x,y), \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

يسمى التحويل الهندسي المطابق (الوحدة) أو التحويل المحايد.

تعريف (٤.٥):

تحـصيل التحـويلات الهندسـية $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ يرمـز لـه بـالرمز $g_1 \circ g_2$ أو باختصار $g_1 g_2$ ويعرف كالآتي:

$$\begin{aligned} g_1 g_2(x,y) &= g_1(g_2(x,y)) \\ &= g_1(g_2(x), g_2(y)) \\ &= (g_1(g_2(x)), g_1(g_2(y))) \end{aligned}$$

وبمـا أن التحويـل الهندسـي g تنـاظر أحـادي إذ يكـون لـه معكـوس g^{-1} يحقـق $g\,g^{-1} = g^{-1} g = I$ وكذلك التحويلات الهندسية تحقق خاصية الدمج. إذاً يمكـن صياغة النظرية الآتية:

نظرية (١.٥):

مجموعة التحويلات الهندسية في المستوى تكون زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

(٢.٥) أمثلة مختلفة على التحويلات الهندسية:

مثال (٥.٥):

أوجد صورة المربع $ABCD$ الذي رؤوسه $A(0,0)$، $B(1,0)$، $C(1,1)$، $D(0,1)$ بالتحويل الخطي $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

موضحاً ذلك بالرسم.

الحل:

أولاً نقوم بحساب الصور لرؤوس المربع وهي

$$f(A) = \bar{A}\ , f(B) = \bar{B}\ , f(C) = \bar{C}\ , f(D) = \bar{D}$$

وذلك من التعويض في القاعدة المعطاة عن إحداثيات الرؤوس A, B, C, D للمربع حيث

$$f(A) = \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

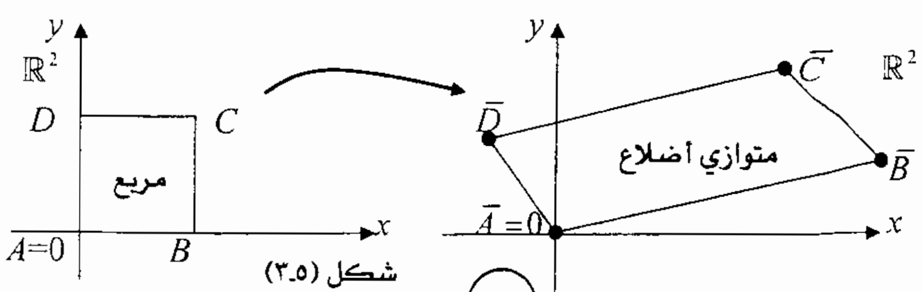
إذاً الرأس A تظل ثابتة حيث $(0,0) = A = \bar{A}$ وكذلك

$$\bar{B} = f(B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

إذاً صورة B هي نقطة $\bar{B} = (4,2)$. بالمثل

$$\bar{C} = f(C) = (3,3)\ ,\ \ \bar{D} = f(D) = (-1,1)$$

كما هو موضح في شكل (٣.٥).



شكل (٣.٥)

أي أن الشكل الهندسي (مربع) تحول إلى شكل هندسي (متوازي أضلاع) في المستوى $\mathbb{R}^2$ أي أن التحويل الخطي المعطى هو تحويل هندسي حيث أنه تناظر أحادي (تأكد من ذلك). في هذا المثال قمنا بتحويل المربع عن طريق تحويل إحداثيات رؤوسه.

مثال (٦.٥):

أوجد صورة الخط المستقيم $L : y = x + 1$ باستخدام التحويلات الخطية

$$\text{(i)} \quad T_1 : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad T_2 : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل:

في (i) مصفوفة التحويل الخطي غير شاذة لأن $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

أي أن التحويل تناظر أحادي وبالتالي له معكوس هو

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

وباستخدام معكوس المصفوفات الذي قدمناه في الباب الثالث نجد أن:

$$= \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{x} + 2\bar{y} \\ \bar{x} - \bar{y} \end{pmatrix}$$

وبالتعويض عن x, y في معادلة الخط L نحصل على صورته $\bar{L}$ على الصورة:

$$\bar{L}_1 : \bar{x} - \bar{y} = -\bar{x} + 2\bar{y} + 1$$

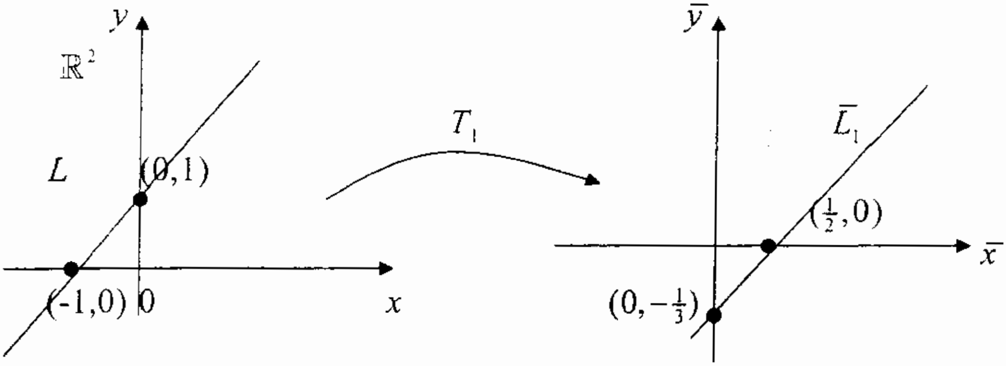
وباختصار وتجميع الحدود نحصل على:

$$\bar{L}_1 : 3\bar{y} - 2\bar{x} + 1 = 0$$

أو

$$\bar{L}_1 : \bar{y} = \frac{2}{3}\bar{x} - \frac{1}{3}$$

هندسياً: الخط المستقيم L ميله 1 ويقطع من محور y جزء مقداره 1 بينما الخط $\bar{L}_1$ (صورة L) ميله $\frac{2}{3}$ ويقطع جزء مقداره $-\frac{1}{3}$ من محور $\bar{y}$ كما هو موضح في شكل (٤.٥).



شكل (٤.٥)

(ii) بالمثل نجد أن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

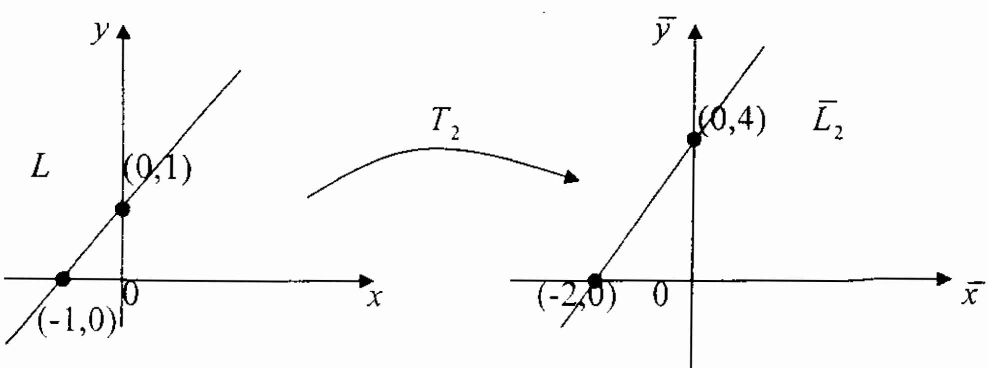
$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\bar{x} \\ -\frac{1}{6}\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{y} \end{pmatrix}$$

وبالتعويض في معادلة الخط المستقيم L عن x, y بدلالة $\bar{x}, \bar{y}$ نجد أن:

$$\bar{L}_2 : -\frac{1}{6}\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{y} = \frac{1}{3}\bar{x} + 1$$

$$\therefore \bar{L}_2 : \bar{y} = 2\bar{x} + 4$$

واضح أن $\bar{L}_2$ خط مستقيم ميله 2 ويقطع جزء مقداره 4 من $\bar{y}$ كما هو موضح في شكل (٥.٥).



شكل (٥.٥)

مثال (٦.٥):

أوجد صورة الدائرة $S^1 : x^2 + y^2 = 4$ بالتحويل الخطي

$$T : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

الحل:

بنفس الأسلوب الذي اتبعناه في المثال السابق نجد أن التحويل العكسي T^{-1} يعطى من

$$T^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 2\bar{y} \end{pmatrix}$$

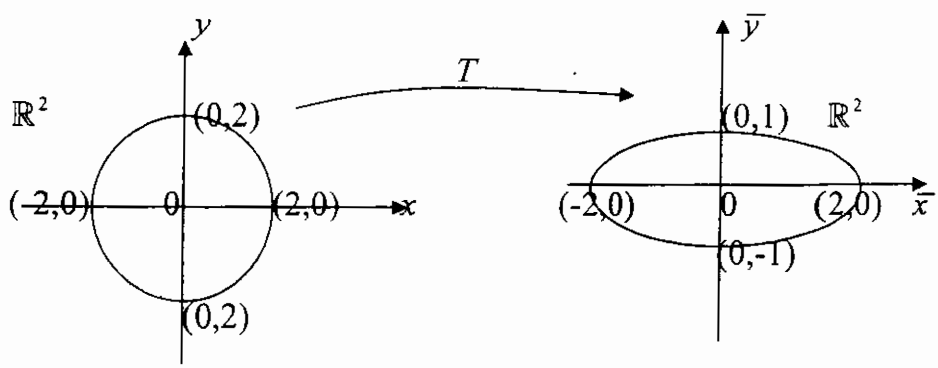
وبالتعويض في معادلة الدائرة المعطاة عن x, y بدلالة $\bar{x}, \bar{y}$ نحصل على:

$$T(S') = \bar{x}^2 + (2\bar{y})^2 = 4$$

واضح أن صورة S^1 هي قطع ناقص $T(S^1)$ حيث بالقسمة على 4 نجد أن

$$T(S^1) : \frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1$$

كما هو موضح في شكل (٦.٥).



شكل (٦.٥)

تمارين (٥)

(١) أي من العلاقات الآتية $g_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ حيث $i = 1,...,5$ المعرفة بالقواعد الآتية لجميع النقاط (x, y) في المستوى $\mathbb{R}^2$ تعرف تحويل هندسي:

$$g_1(x,y) = (x+3, y-2)$$
$$g_2(x,y) = (x,-y)$$
$$g_3(x,y) = (x^2, y)$$
$$g_4(x,y) = (2x+1, y-3)$$
$$g_5(x,y) = (x, 4-y)$$

(٢) في التمرين السابق أي من العلاقات g_i تعرف تحويل خطي؟

(٣) في التمرين السابق بين فيما إذا كان هناك علاقة بين التحويل الخطي والتحويل الهندسي.

(٤) أوجد صورة الخط المستقيم $L: 3y + 4x - 2 = 0$ باستخدام التحويلات الخطية الآتية:

$$T_1 : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$T_2 : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(٥) أوجد صورة المربع الذي رؤوسه $A(0,0)$، $B(1,0)$، $C(1,1)$، $D(0,1)$ باستخدام التحويل الخطي

$$T : \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وبين أنه ليست تحويل هندسي.

(إرشاد: التحويل الخطي المعطى ليس تناظر أحادي لأن مصفوفته شاذة (ليس لها معكوس لأن محددها يساوي الصفر) وبالتالي فإن التحويل المعطى ليس تحويل هندسي).

(٦) أوجد صورة القطع الناقص

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

والقطع الزائد

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$$

بالتحويلات الخطية الآتية:

$$T_1:\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$T_2:\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$T_3:\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

موضحاً إجابتك بالرسم.