الباب الرابع

التحويلات بين الفراغات الاتجاهية

Transformations

نقدم في هذا الباب مراجعة سريعة عن الرواسم أو التحويلات بين الفراغات الاتجاهية.

(١.٤) مقدمة :

نفرض أن لدينا فراغان اتجاهيان $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}^m$ ونعرف الراسم $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ كما يلي:

$$X=(x_1,\ldots,x_n)\longrightarrow Y=(y_1,\ldots,y_m)$$

حيث $y=f(x)$.

أو الصورة المفصلة:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) = f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ &\vdots\\ y_m &= f_m(x) = f_m(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى دالة اتجاهية بين الفراغات الاتجاهية $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}^m$.

مثال (١.٤):

نعتبر التحويل $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

حيث $X=(x_1,x_2)\longrightarrow Y=(y_1,y_2,y_3)$

بحيث

$$y_1=x_1\ ,\ y_2=x_1+x_2, y_3=x_2 \qquad (4.1)$$

العلاقة f المعرفة بالعلاقات (4.1) تعرف راسم من المستوى $\mathbb{R}^2$ إلى الفراغ $\mathbb{R}^3$ ويسمى دالة اتجاهية في متغيرين multi valued function.

مثال (٢.٤):

الدالة $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة

$$f(x)=(x,y,z)=x+y-z\in\mathbb{R}$$

يعرف تحويل من الفراغ $\mathbb{R}^3$ إلى خط الأعداد وتسمى دالة حقيقية real valued function.

(٢.٤) التحويلات (الدوال) الخطية Linear mapping

إذا كانت الدالة $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ خطية بمعنى العلاقات التي تعرف الدالة $y=f(x)$ كلها دوال خطية في المتغيرات $x_1,\dots,x_n$ فإننا نقول أن f دالة خطية linear function. فمثلاً $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ المعرف بالقاعدة

$$(x,y,z)\longrightarrow(x+y,x-z,z-y)$$

دالة خطية.

وعموماً يمكننا تعريف الدالة الخطية بين الفراغات $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ على الصورة:

تعريف (١.٤):

يقال أن الدالة $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ خطية إذا تحقق

$$\begin{aligned}&f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^n\\&f(\lambda x)=\lambda f(x),\ \lambda\in\mathbb{R}\end{aligned}\qquad(4.2)$$

أو ما يكافئ

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y),\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}\qquad(4.3)$$

هندسياً: يقال أن الدالة f خطية إذا كانت تحافظ على الخطية بمعنى صورة تركيبة خطية $\lambda x+\mu y$ هي تركيبة خطية $\lambda f(x)+\mu f(y)$ من الصورة $f(x),f(y)$ أو صورة خط مستقيم في $\mathbb{R}^n$ هي خط مستقيم في $\mathbb{R}^m$.

مثال (٣.٤):

الراسم $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة $f(x,y,z)=x$ والذي يسمى راسم الاسقاط على محور x هو راسم خطي حيث أنه يحقق

$$\begin{aligned}f((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))&=f(x_1+x_1,y_1+y_2,z_1+z_2)\\&=x_1+x_2=f(x_1,y_1,z_1)+f(x_2,y_2,z_2)\end{aligned}$$

بالإضافة إلى $f(\lambda(x,y,z))=f(\lambda x,\lambda y+\lambda z)$

$$=\lambda x = \lambda f(x,y,z), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

تعريف (٤-٢):

للراسم $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نعرف

$$\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}^m : y = f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$$

وتسمى صورة f وهي فراغ جزئي من النطاق المصاحب $\mathbb{R}^m$.

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = O \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n$$

وتسمى قلب kernel لتحويل f وهو فراغ جزئي من النطاق $\mathbb{R}^n$.

مثال (٤-٤):

أوجد $\operatorname{Im} f$ ، $\ker f$ حيث f راسم معرف بالقاعدة

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x,y,0)$$

الحل:

واضح أن $\operatorname{Im} f$ هي

$$\operatorname{Im} f = \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} = xy \text{ المستوى}$$

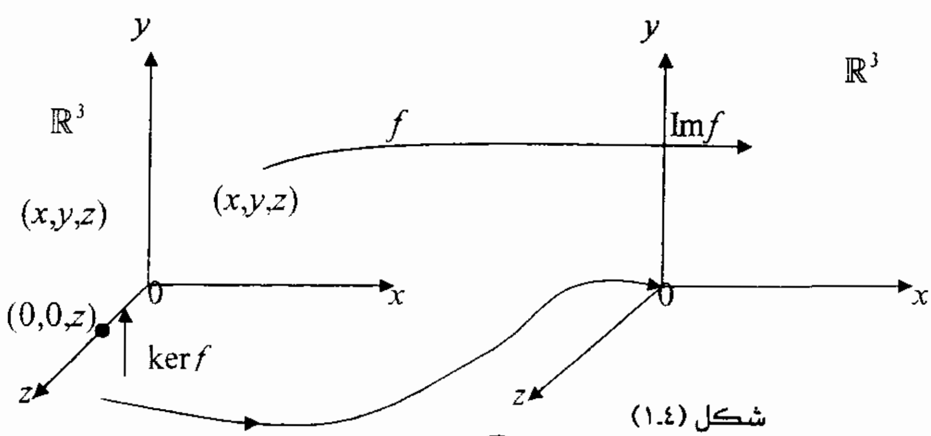
أي أن $\operatorname{Im} f$ هي المستوى $\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2$.

وكذلك $\ker f = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$

$$= \{(x,y,z) : (x,y,0) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(0,0,z)\} = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

وهو محور z في الفراغ الاقليدي $\mathbb{R}^3$. كما هو موضح في شكل (٤-١).



شكل (٤-١)

التحويلات الخطية تحقق الخواص التالية:

(i) إذا كان لدينا $f, g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحويلين فإن $f+g:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحويل خطي يعرف بالقاعدة

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(ii) إذا كان لدينا f, g, h تحويلات خطية من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^m$ فإن

خاصية الابدال $(f+g)(x)=(g+f)(x)$

خاصية الدمج $(f+(g+h)(x)=((f+g)+h)(x)$

(iii) التحويل الخطي الصفري O والمعرف بالقاعدة

$$O(x)=0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(vi) المعكوس الجمعي للتحويل الخطي f هو $-f$ ويحقق

$$(f+(-f))(x)=O(x)$$

وبالتالي يمكن القول أن مجموعة التحويلات الخطية تكون زمرة مع عملية جمع التحويلات الخطية والتي تسمى زمرة التحويلات الخطية linear group of transformation.

تعريف (٣٤):

يقال أن التحويل الخطي غير شاذ non singular إذا كان له معكوس (في حالة تحصيل الرواسم أو ضرب الرواسم) أي إذا كان تناظر أحادي

one to one correspondences = bijective (surfective + injective)

فوقي (شامل) + أحادي (تقابل) =

حيث تحصيل الرواسم يعرف بالقاعدة (الباب الثاني)

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))$$

ومما سبق في الباب الثاني رأينا أن تحصيل الرواسم ليس إبدالي ولكنه دامج أي أن

$$f \circ (g \circ h)=(f \circ g) \circ h$$

لأي ثلاث تحويلات خطية من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$.

معكوس التحويل الخطي $f:V \longrightarrow V$ هو $f^{-1}:V \longrightarrow V$ ويعرف القاعدة

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

حيث f تحويل خطي من الفراغ V إلى نفسه، I راسم التطابق أو الوحدة Identity mapping ويعرف بالقاعدة

$$I : V \longrightarrow V \ , I(x) = x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

أي أن مجموعة التحويلات الخطية غير الشاذة المعرفة على الفراغ $\mathbb{R}^n$ تعرف زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

وعموماً نفرض أن $f : V \longrightarrow W$ تحويل خطي من فراغ V إلى فراغ W إذا وجد تحويل خطي أخر $f^{-1} : W \longrightarrow V$ يحقق

$$f^{-1} \circ f = I_V \ \ , f \circ f^{-1} = I_W$$

حيث $I_V : V \longrightarrow V$ ، $I_W : W \longrightarrow W$ رواسم التطابق (الوحدة) على الفراغ V ، W على الترتيب فإنه يقال أن f قابل للعكس، f^{-1} معكوس f.

مثال (٥٤):

إذا كان $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ، $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تحويلات خطية معرفة بالقاعدة:

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z)$$

$$S(x, y) = (x - y, 2x - y, 3y)$$

حيث $x, y, z \in \mathbb{R}$. أوجد ST ، TS.

الحل:

من تعريف تحصيل التحويلات نجد أن

$$\begin{aligned} ST(x, y, z) &= S(T(x, y, z)) = S(x + y, x - z) \\ &= ((x + y) - (x - z) - (x - z), 3(x - z)) \\ &= (x + y, x + 2y - z, 3x - 3z) \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

أي أن $ST : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

بينما $TS(x, y) = T(S(x, y))$

$$\begin{aligned} &= T(x - y, 2x - y, 3y) \\ &= ((x - y) + (2x - y), (x - y) - 3y) \end{aligned}$$

$$=(3x-2y,x-4y)\in\mathbb{R}^2$$

أي أن $TS:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$

واضح أن $ST\neq TS$

مثال (٦-٤):

إذا كان $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x,y)=(2x+3y,3x+4y)$$

هل T قابلة للعكس؟

الحل:

للإجابة على هذا السؤال يوجد اتجاهين:

أحدهما وهو إثبات أن T تناظر أحادي وهذا واضح من كون أن T فوقي وأحادي والأخر نحاول إيجاد راسم $S:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ يحقق $ST=I$ حيث

$$T(x,y)=(a,b),\ S(a,b)=(x,y)$$

ومن تعريف T المعطى في المثال يكون

$$(2x+3y,3x+4y)=(a,b)$$

$$\therefore\ 2x+3y=a\ ,\ 3x+4y=b$$

واضح أن مجموعة المعادلات هذه لها حل وحيد x,y حيث أن محدد المعاملات $(8-9=-1\neq 0)$ لا يساوي الصفر وباستخدام طريقة كرامر مثلاً نجد أن

$$x=\frac{\begin{vmatrix}a & 3\\ b & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=-4a+3b\quad ,\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & a\\ 3 & b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=-2b+3a$$

إذاً الراسم S يمكن تعريفه كالآتي:

$$S(a,b)=(3b-4a,3a-2b)$$

ويمكن التحقق من أن $ST=I$ ، $TS=I$ كما يلي:

$$ST(x,y)=S(T(x,y))=S(2x+3y,3x+4y)$$

$$=(3(3x+4y)-4(2x+3y),3(2x+3y)-2(3x+4y))$$
$$=(x,y)=I(x,y)$$
$$\therefore ST=I$$

بالمثل فإن

$$TS(a,b)=T(S(a,b))$$
$$=T(3b-4a,3a-2b)$$
$$=(2(3b-4a)+3(3a-2b),3(3b-4a)+4(3a-2b))$$
$$=(a,b)=I(a,b)$$

إذاً $TS=I$ ومن تعريف المعكوس حيث $TS=I$ ، $ST=I$ يكون $S=T^{-1}$.

(٢.٤) مصفوفة التحويل الخطي:

نفرض أن لدينا فراغ اتجاهي V بعده n وأساسه $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ وفراغ اتجاهي W بعده m وأساسه $\{w_1,w_2,...,w_n\}$ ، $T:V\longrightarrow W$ تحويل خطي. تغير صورة أساس V بالراسم T حيث

$$Tv_1=z_1,Tv_2=z_2,...,Tv_n=z_n$$

حيث $z_1,z_2,...,z_n\in W$ إذاً المتجهات z_i تكتب كتركيبات خطية من أساس W على الصورة

$$z_1=a_{11}w_1+a_{12}w_2+...+a_{1m}w_m$$
$$z_2=a_{21}w_1+a_{22}w_2+...+a_{2m}w_m$$
$$\vdots$$
$$z_n=a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+...+a_{nm}w_m$$

أو في الشكل المختصر

$$z_i=Tv_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}w_j\ ,\ i=1,2,...,n$$

الشكل الرياضي $A=(a_{ij})$ يسمى مصفوفة التحويل الخطي $T:V\longrightarrow W$ بالنسبة للأساسين المرتبين $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ ، $\{w_1,...,w_m\}$ للفراغات V ، W على الترتيب.

مثال (٤ـ٥):

إذا كان $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T\,e_1 = e_1 + e_3 \,, T\,e_2 = e_1 + e_3 \,, T\,e_3 = e_1 + e_2$$

حيث $\{e_1, e_2, e_3\}$ الأساس المعتاد للفراغ $\mathbb{R}^3$. أوجد مصفوفة التحويل T.

الحل:

من تعريف التحويل المعطى يتضح أن صورة الأساس المعتاد معبر عنها كتراكيب خطية من الأساس المعتاد للنطاق المصاحب وبذلك تكون مصفوفة التحويل هي معاملات التراكيب الخطية بنفس الترتيب المعطى أي أن:

$$T\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

أي أن مصفوفة التحويل الخطي هي

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (٤ـ١):

من المثال السابق يتضح أن ترتيب صفوف التحويل T يعتمد على ترتيب أساس V (النطاق) وترتيب أعمدتها يعتمد على ترتيب أساس W (النطاق المصاحب).

تمارين (٤)

(١) بين أي من التحويلات الآتية يكون خطي.

(i) $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T(x,y)=(3x-y,y^2)$

(ii) $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z)=(3x+2z,y)$

(٢) إذا كان $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x,y)=(4x-2y,3y-6x)$$

أوجد صورة الخطوط المستقيمة الآتية بالتحويل T:

(i) $L_1=\{t(1,5):t\in\mathbb{R}\}=span\{(1,5)=\{(t,5t),t\in\mathbb{R}\}$

(ii) $L_2=\{t(2,1)+(3,5),t\in\mathbb{R}\}=\{(2t+3,t+5),t\in\mathbb{R}\}$

(إرشاد: في (i) أوجد صورة النقطة العامة $(t,5t)$ وفي (ii) أوجد صورة النقطة العامة $(2t+3,\ t+5)$ على الخط L_2)

(٣) أوجد مصفوفة التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$$T(x,y,z)=(x+3y,y-2,x+6z)$$

بالنسبة للأساس المعتاد للفراغ $\mathbb{R}^3$.

(٤) أوجد ST ، TS حيث الراسمان $T,S:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ معرفات بالقاعدتان

$$T(a,b)=(2a-b,3b)$$

$$S(x,y)=(y-x,4x)$$

حيث $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ وبين فيما إذا كان S معكوس T أم لا؟

(٥) بين أن $T\circ T=T^2=I$ في حالة T معرف بالقاعدة

$$T(a,b)=(a,3a-b)$$