الباب الثالث

مراجعة لأساسيات الجبر الخطي

Review of basic linear Algebra

هندسة التحويلات موضوع الدراسة في هذا الكتاب يعتمد اعتماد أساسي على الجبر الخطي وخصوصاً المصفوفات والأساس للفراغ والمعادلات الخطية وطرق حلولها ولذلك نقوم هنا بعمل مراجعة سريعة لهذه الأساسيات.

(١.٣) المصفوفات Matrices

تعرف المصفوفة $m \times n$ على أنها تنظيم مستطيل مكون من m صف و n عمود وتأخذ الشكل

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

حيث a_{ij} يرمز إلى العنصر الذي يقع في الصف i والعمود j.

إذا كان لدينا مصفوفتان $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ فإن مجموعهما $A \pm B$ يعرف كالتالي:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \ , \alpha A = (\alpha a_{ij})_{m\times n} , \qquad (3.2)$$
$$A - B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

إذا كان $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ فإن حاصل الضرب AB هو مصفوفة $C = (c_{ij})_{m\times p}$ حيث العنصر c_{ij} هو ناتج حاصل ضرب الصف i من المصفوفة A في العمود j من المصفوفة B بمعنى

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$$

أي أن الضرب AB معرف فقط إذا كان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B.

إذا كان A,B,C مصفوفات أبعادها تسمح بتعريف العمليات المعطاة فإن الخواص التالية محققة:

$(AB)C=A(BC)$ Associative للدمج

$A(B+C)=AB+AC$ left distribution التوزيع من اليسار

$(A+B)C=AC+BC$ right distribution التوزيع من اليمين

ملاحظة (١.٣):

١. إذا كان AB ليس بالضرورة أن يكون BA معرف.

٢. إذا كان AB ، BA معرف ليس بالضرورة أن يكون $AB=BA$ وعليه فإن ضرب المصفوفات ليس إبدالي not commutative ويحقق ما يأتي:

$$\begin{aligned}&AB\neq BA \quad \text{(فيما عدا حالات خاصة)}\\ &AB=O \not\Rightarrow A=O \text{ or } B=O\\ &AB=AC,\ A\neq 0 \not\Rightarrow B=C\end{aligned}\qquad (3.2)$$

حيث O المصفوفة الصفرية (مصفوفة كل عناصرها أصفار).

باستخدام ضرب المصفوفات يمكن كتابة نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

في الصورة المختصرة

$$AX=b \qquad (3.3)$$

حيث

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ,X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ,b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

يقال أن المصفوفة A مربعة إذا كان $m=n$ أي عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة وفي هذه الحالة يمكن تعريف المصفوفة ذات القوة n $(n\in\mathbb{N})$ على الصورة:

$$A^n=\underbrace{A\ A\ \dots A}_{\text{عامل } n} \tag{3.4}$$

إذا كان D مصفوفة قطرية أي

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix} \text{ فإن } D^n=\begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_n^n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

مصفوفة الوحدة I_n وتكتب أحياناً I ولها الصورة

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

إذا كانت A أي مصفوفة $m\times n$ فإن

$$A\,I_n=A=I_m\,A$$

وفي الحالة الخاصة

$$A\,I_n=I_n\,A=A$$

لأي A مصفوفة $n\times n$ (مربعة).

لأي A مصفوفة $m\times n$ فإننا نعرف المصفوفة البديلة أو المنقولة Transpose للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A' على الصورة:

$$A'=(a_{ji})_{n\times m} \quad , \ A=(a_{ij})_{m\times n}$$

أي A' هي مصفوفة ناتجة من المصفوفة A بتبديل الصف i مكان العمود j . ويمكن للقارئ أن يتحقق من

$$(A+B)' = A' + B' \ , \ (\alpha A)' = \alpha A' \ ,$$
$$(AB)' = B' A' \, , (A')' = A \ , \alpha \in \mathbb{R} \qquad (3.6)$$

ويقال أن المصفوفة A متماثلة symmetric إذا كان $A' = A$ أما إذا كان $A' = -A$ فإننا نقول أن A عكسية التماثل (متخالفة) skew symmetric

(٢.٣) المحددات ومعكوس المصفوفات:

Determinates and matrix inverses:

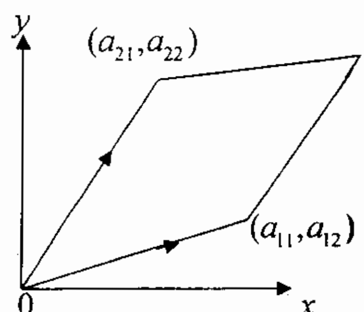
تذكر أن المحددات $Det\ A = |A|$ للمصفوفات A ذات الأبعاد 2×2 ، 3×3 تعرف كالتالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \qquad (3.7)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \qquad (3.8)$$

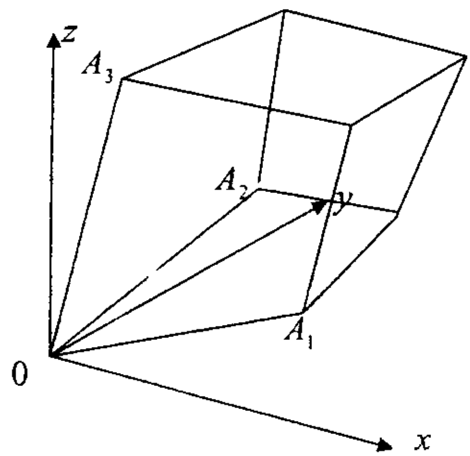
هذه المحددات يمكن إعطائها تفسير هندسي في كل من المستوى $\mathbb{R}^2$ والفراغ $\mathbb{R}^3$ كالآتي:

المحدد $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ يساوي مساحة متوازي الأضلاع الذي أضلاعه المتجهات المبينة في شكل (١.٣).



شكل (١٣)

المحـدد $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \pm \left| A \right|$ هـو حجـم متـوازي المـستطيلات الـذي أضـلاعه المتجهات $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ في الفراغ كما هو مبين في شكل (٢.٣).



شكل (٢.٣)

في حالة المصفوفة A ذات الأبعاد $n \times n$ فإن محددها $\left| A \right|$ يعطى من

$$\left| A \right| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{ij} A_{ij} + \ldots + a_{in} A_{in} \qquad (3.9)$$

حيث A_{ij} هو المرافق cofactor للعنصر a_{ij} ويعرف بمحدد مصفوفة $(n-1) \times (n-1)$ ويعطى بالشكل:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & \ldots & a_{1j} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & \ldots & a_{2j} & a_{2,j+1} & & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & \ldots & \boxed{a_{ij}} & a_{i,j+1} & & a_{in} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & \ldots & a_{nj} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

العلاقة (3.9) تسمى مفكوك المحدد باستخدام المرافقات لعناصر الصف i .

القواعد الآتية مفيدة في الحصول على قيمة المحدد بدون اللجوء إلى فك المحدد بالطريقة السابقة:

(i) إذا تبادل صفان (عمودان) في المحدد فإن قيمة المحدد تتغير بإشارة.

(ii) إذا ضرب عناصر صف (عمود) في عدد c فإن قيمة المحد تضرب في العدد c.

(iii) إذا كانت عناصر صفان (عمودان) في تناسب فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.

(iv) قيمة المحدد لا تتغير إذا ضربنا عدد في عناصر صف (عمود) ما وأضفناه إلى عناصر صف (عمود) أخر.

وأكثر من ذلك فإن

(v) $$|A'| = |A|,\ |AB| = |A||B|$$

(vi) $$|A+B| \neq |A| + |B|$$

معكوس المصفوفة A يرمز له بالرمز A^{-1} ويعرف كالآتي:

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$$

ومنها يتضح أن A^{-1} موجود إذا كان وفقط إذا كان $|A| \neq 0$.

إذا كان $A = (a_{ij})_{n\times n}$ ، $|A| \neq 0$ فإن A لها معكوس وحيد A^{-1} ويعطى من

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) \qquad (3.10)$$

حيث

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})' \qquad \mathbf{(3.11)}$$

المصفوفة $adj(A)$ تسمى المصفوفة المصاحبة (المرتبطة) adjoint وهي المصفوفة البديلة لمصفوفة المرافقات cofactor matrix.

لمصفوفة 2×2 نجد أن

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

بشرط أن

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

معكوس المصفوفة يحقق

$$(A^{-1})^{-1} = A \ , (A B)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \ , (A')^{-1} = (A^{-1})'$$
$$(C A)^{-1} = C^{-1}A^{-1} \qquad (3.13)$$

نعتبر n معادلة في n مجهول على الصورة

$$A X = b \ , A = (a_{ij})_{n\times n} \ , X = (x_i)_{n\times 1} \ , b = (b_i)_{n\times 1}$$

هذا النظام له حل وحيد

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \ , j = 1,2,...,n \qquad (3.14)$$

بشرط ان $|A| \neq 0$ ، المحدد $|A_j|$ ناتج من المحدد A بوضع عمود الثوابت $b = (b_i)$ مكان العمود j. القاعدة (3.14) تسمى قاعدة كرامر Cramer لحل مجموعة المعادلات الخطية.

إذا كان $b_i = 0$ فإننا نحصل على النظام $A X = 0$ والذي يسمى نظام متجانس homogeneous وله دائماً حل تافه trivial (صفري) على الصورة

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

وله حلول غير صفرية إذا كان $|A| = 0$ اي في حالة A مصفوفة مربعة.

(٣.٣) الفراغ الاتجاهي (الخطي) Vector (Linear Space)

نفرض أن لدينا حقل Field F ومجموعة V من العناصر، يقال أن V فراغ اتجاهي معرف على الحقل F ويرمز له بالرمز $V(F)$ إذا تحقق:

(i) $(V,+)$ زمرة إبدالية.

(ii) $\alpha v \in V \ , \forall v \in V \ , \alpha \in F$

$$\alpha(v_1+v_2)=\alpha v_1+\alpha v_2$$
$$(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$$
$$(\alpha\beta)=\alpha(\beta v)$$

عناصر V تسمى متجهات (قد تكون دوال أو رواسم أو مصفوفات أو متتابعات أو متسلسلات أو كثيرة حدود). وفي دراستنا نعتبر عناصر V هي المتجهات الفيزيائية (مثل الإزاحة والقوة والسرعة والتسارع وهكذا) والتي تعرف بالشكل

$$v=(v_1,v_2,\dots,v_n) \qquad \text{(مصفوفة صف)}$$

أو من خلال مصفوفة عمود V' أي

$$v'=(v_1\ v_2\ \dots\ v_n)'$$

وبالتالي جمع وطرح المتجهات وكذلك الضرب في عدد قياسي معرف لأنها تنتمي لفراغ اتجاهي V.

الفراغ الاتجاهي $V(\mathbb{R})$ الذي عناصره v لها الشكل

$$v=(v_1\ v_2\ \dots v_n)$$

يرمز له بالرمز $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{\text{عامل } n}=V_n=\mathbb{R}^n$

وهو فراغ اتجاهي معرف على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وكل عنصر فيه هو متجه مكون من n مرتب n-tuple من الأعداد الحقيقية v_i ، $i=1,2,\dots,n$.

(٤-٣) الاستقلال الخطي: Linear independent

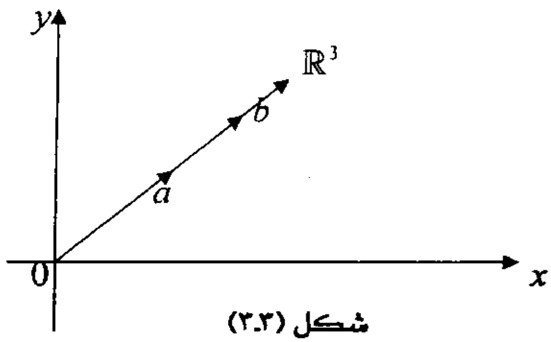
مجموعة المتجهات في $\mathbb{R}^n$ يقال أنها مرتبطة خطياً linearly dependent إذا كان واحد على الأقل منها يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من باقي المتجهات وخلاف ذلك يقال أن مجموعة المتجهات مستقلة خطياً linearly independent أي أنه إذا كان لدينا n من المتجهات $a_1,a_2,\dots,a_n\in\mathbb{R}^n$ وتحقق العلاقة

$$c_1a_1+c_2a_2+\dots+c_na_n=0 \qquad (3.15)$$

بحيث الأعداد $c_1,c_2,\dots,c_n$ ليست جميعها أصفار في وقت واحد، فإن مجموعة المتجهات يقال أنها مرتبطة خطياً، أما إذا تحققت العلاقة (3.15) بحيث الأعداد $c_1,c_2,\dots,c_n$ جميعها أصفار فإننا نقول أن مجموعة المتجهات مستقلة خطياً.

مثال (١.٣):

المتجهان $a=(3,1), b=(6,2)$ مرتبطان خطياً لأن b يمكن التعبير عنه بدلالة a على الصورة $b=(6,2)=2(3,1)=2a$ كما هو موضح في شكل (٣.٣)



شكل (٣.٣)

أي أن المتجه b على امتداد المتجه a.

مثال (٢.٣):

المتجهات $a=(3,1), b=(1,2)$ مستقلين خطياً لأنه باستخدام تعريف الاستقلال

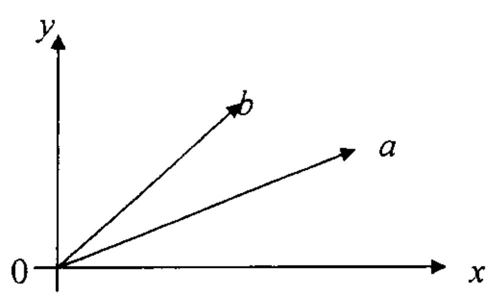
حيث
$$c_1 a + c_2 b = 0$$

أو ما يكافئ

$$c_1(3,1) + c_2(1,2) = (0,0)$$

أو
$$3c_1 + c_2 = 0$$
$$c_1 + 2c_2 = 0$$

هذا النظام المتجانس له حل صفري فقط $c_1 = c_2 = 0$ وبالتالي المتجهان a, b مستقلين خطياً كما هو موضح في شكل (٤.٣).



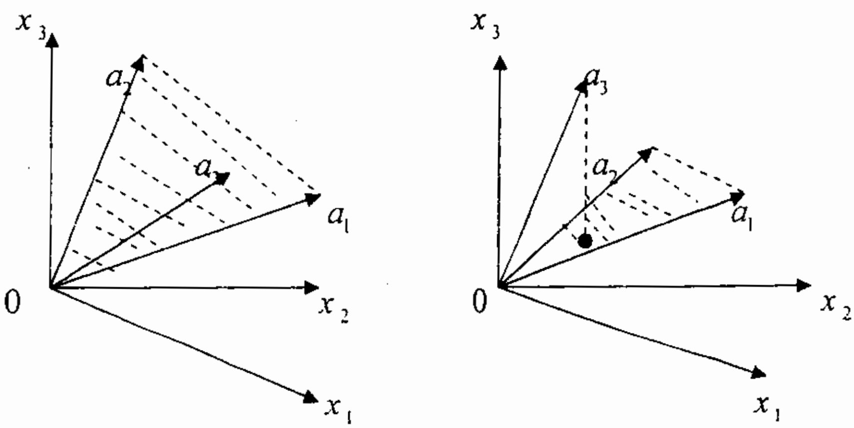
شكل (٤.٣)

هندسياً: اي متجه c في المستوى المولد بالمتجهين a, b يكون مرتبط خطياً بهما اي ان

$$c = \alpha a + \beta b \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

إذا كان لدينا ثلاث متجهات a, b, c في الفراغ $\mathbb{R}^3$ بحيث المتجه c ليس واقع في المستوى المولد بالمتجهين a, b، فإن المتجهات الثلاث تكون مستقلة خطياً لأنه لا يمكن التعبير عن أحدهما كتركيبة خطية من باقي المتجهات.

في الحالة العامة تكون المتجهات الثلاث في $\mathbb{R}^3$ مرتبطة خطياً إذا وقعت في نفس المستوى (والعكس صحيح). أما إذا لم يوجد مستوى يشمل المتجهات الثلاث فإن المتجهات تكون مستقلة خطياً كما هو موضح في شكل (٥.٣).



ارتباط خطي   استقلال خطي

شكل (٥.٣)

(٥.٣) الأساس والبعد Basis and dimension

إذا كان $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ مجموعة من المتجهات في الفراغ $\mathbb{R}^n$ فإن مجموعة كل التراكيب الخطية من هذه المجموعة تكون فراغ اتجاهي جزئي من $\mathbb{R}^n$ يرمز له بالرمز $span(U)$ أو $L(U)$ اي أن:

$$L(U) = \{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_r u_r : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, r\} \subset \mathbb{R}^n$$

ويقال أن المجموعة U تولد $L(U)$ بمعنى أن اي متجه في $L(U)$ يكتب كتركيبة خطية من عناصر U.

تعريف (١.٣):

أي مجموعة من المتجهات في الفراغ $\mathbb{R}^n$ مستقلة خطياً وتولد $\mathbb{R}^n$ تسمى أساس للفراغ $\mathbb{R}^n$. وعدد عناصر الأساس يسمى بعد الفراغ وفي حالة $\mathbb{R}^n$ فإن البعد يساوي n.

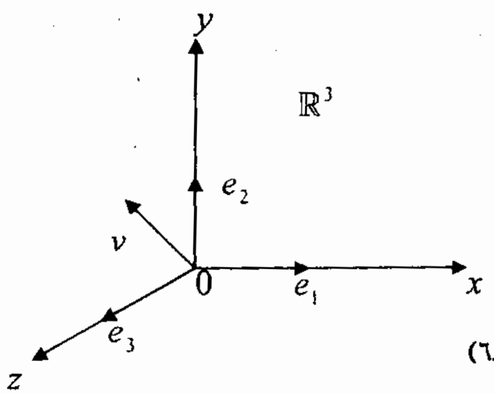
ملاحظة (٢.٣):

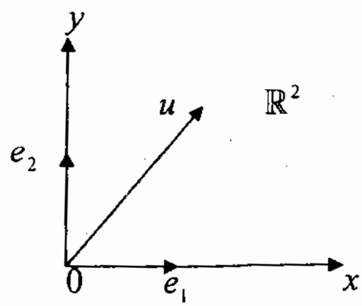
الفراغ $\mathbb{R}^n$ له أساس عدد عناصره n ويكتب $\dim \mathbb{R}^n = n$. الفراغ $\mathbb{R}^n$ من الممكن أن يكون له أكثر من أساس ولكن يوجد أساس مشهور ومتعارف عليه يسمى الأساس المعتاد أو القياسي natural basis. هذا الأساس مكون من n من المتجهات e_i حيث

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

فمثلاً المستوى $\mathbb{R}^2$ له أساس معتاد $\{e_1, e_2\}$ حيث e_1, e_2 متجهات الوحدة على امتداد محاور الإحداثيات oy، ox على الترتيب.

الفراغ $\mathbb{R}^3$ له أساس معتاد $\{e_1, e_2, e_3\}$ حيث e_1, e_2, e_3 متجهات الوحدة على امتداد محاور الإحداثيات oz، oy، ox على الترتيب كما هو موضح في شكل (٦.٣).





شكل (٦.٣)

أي متجه $u \in \mathbb{R}^2$ يكتب على الصورة

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, \lambda_2)$$

الكميات λ_1, λ_2 تسمى مركبات المتجه u بالنسبة للأساس المعتاد $\{e_1, e_2\}$.

وكذلك في $\mathbb{R}^3$ فإن المتجه v يكتب على الصورة

$$v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

الكميات μ_1, μ_2, μ_3 تسمى مركبات المتجه v بالنسبة للأساس المعتاد $\{e_1, e_2, e_3\}$.

ملاحظة (٢.٣):

إذا كان لدينا فراغ اتجاهي V بعده n فإن أي مجموعة من المتجهات مستقلة خطياً وعددها n فإنها تكون أساس للفراغ V.

نظرية (١.٣):

إذا كان V فراغ اتجاهي بعده n فإن أي مجموعة جزئية من V تحتوي على أكثر من n متجه تكون مرتبطة خطياً.

مثال (٢.٣):

المجموعة $\{(1,5),(2,7),(4,0)\}$ مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^3$ وذلك باستخدام النظرية السابقة.

نظرية (٢.٣):

إذا كان $U \subset V$ فراغ جزئي خالص من V ($U \neq O$ و$U \neq V$)، $\dim V = n$ إذاً $\dim U < \dim V$.

(٦.٣) الضرب الداخلي Inner product

في الفراغ $\mathbb{R}^2$ نعرف الضرب الداخلي inner product أو الضرب القياسي للمتجهات $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n)$ على الصورة $a.b$ ويعرف كالآتي:

$$a.b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (3.16)$$

$$= a^t b$$ (باعتبار a,b مصفوفات صف)

الضرب الداخلي $a.b$ يحقق الخواص الآتية:

$$a.b = b.a \, , \, a.(a+c) = a.b + a.c \, , \qquad (3.17)$$
$$(\alpha a).b = a.(\alpha b) = \alpha (a.b)$$

الطول length أو المعيار norm الإقليدي Euclidean للمتجه $a=(a_1,...,a_n)$ يعرف كالتالي:

$$\|a\| = \sqrt{a.a} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$$

والذي يحقق

$$\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

الفراغ الاتجاهي $\mathbb{R}^2$ والمعرف عليه الضرب القياسي والطول الإقليدي وبالتالي المسافة الإقليدي يسمى الفراغ الإقليدي وفي الفراغ الإقليدي ثلاثي البعد $\mathbb{R}^3$ والمستوى الإقليدي (فراغ ثنائي البعد) $\mathbb{R}^2$ تصح مسلمة التوازي وفيه يكون مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي 180 درجة.

المتجهان $a,b \in \mathbb{R}^n$ يتعامدان إذا كان $a.b = 0$ وكذلك

$$\cos\theta = \frac{a.b}{\|a\|\|b\|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين a,b.

الخط المستقيم L في $\mathbb{R}^n$ المار بالنقطتين $a=(a_1,...,a_n)\ ,\ b=(b_1,...,b_n)\in \mathbb{R}^n$ يعرف على أنه مجموعة كل النقاط $x=(x_1,...,x_n)\in \mathbb{R}^n$ بحيث تحقق

$$x = t\,a+(1-t)b \qquad (3.18)$$

لأي عدد حقيقي t (بارامتر) أو

$$x = b+t\,(a-b) \qquad (3.19)$$

حيث $a-b$ يعرف اتجاه الخط المستقيم L أي أن الخط المستقيم يتحدد بدلالة نقطة $b\in L$ واتجاه $a-b$ يمر بالنقطة b وعلى امتداد الخط L. العلاقة (3.18) أو (3.19) تسمى المعادلة البارامتري وفي الفراغ الثلاثي فإن هذه المعادلة تأخذ الصورة

$$(x_1,x_2,x_3) = (b_1,b_2,b_3)+t\,(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$$

وبمساواة الطرفين نحصل على

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1+t\,(a_1-b_1) \\ x_2 &= b_2+t\,(a_2-b_2) \qquad (3.20) \\ x_3 &= b_3+t\,(a_3-b_3) \end{aligned}$$

هذه المعادلات تسمى المعادلات البارامترية (الوسيطية) parametric equations

وبحذف t من المعادلات (3.20) نحصل على

$$\frac{x_1-b_1}{a_1-b_1}=\frac{x_2-b_2}{a_2-b_2}=\frac{x_3-b_3}{a_3-b_3}$$

هذه المعادلات تسمى المعادلات القانونية أو المعتادة canonical or normal equations للخط المستقيم L.

في الفراغ $\mathbb{R}^n$ يعرف المستوى الفوقي (الأعظم) hyper plane الذي يمر بالنقطة $a=(a_1,...,a_n)$ ويكون عمودي على المتجه غير الصفري $\ell=(\ell_1,...,\ell_n)$ على أنه جميع النقاط $x=(x_1,...,x_n)$ التي تحقق

$$\ell.(x-a)=0 \qquad (3.21)$$

أو

$$\ell_1(x_1-a_1)+\ell_2(x_2-a_2)...+\ell_n(x_n-a_n)=0$$

أو

$$\ell_1x_1+\ell_2x_2+...+\ell_nx_n=\ell_1a_1+\ell_2a_2+...+\ell_na_n$$

أو

$$\ell_1x_1+\ell_2x_2+...+\ell_nx_n=p \qquad (3.22)$$

أي أن معادلة المستوى الفوقي في $\mathbb{R}^n$ تعطى من خلال معادلة خطية في إحداثيات أي نقطة على المستوى. في هذه الحالة فإن $p=\ell.a$ تسمى طول العمود الساقط من نقطة الأصل على المستوى.

في الفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$ معادلة المستوى (3.22) تأخذ الصورة

$$\ell_1x_1+\ell_2x_2+\ell_3x_3=p$$

أو

$$\pi: \ell_1x_1+\ell_2x_2+\ell_3x_3=p \qquad (3.23)$$

معادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$ تتحدد أيضاً بدلالة نقطة a واتجاهين A, B واقعين في المستوى π أي أن $A\wedge B$ هو العمودي على المستوى π (حيث $\wedge$ تعني الضرب الاتجاهي بين المتجهات في الفراغ الثلاثي).

(٧.٣) مرتبة المصفوفة The rank of a matrix

مرتبة المصفوفة هي عدد طبيعي يرتبط مع المصفوفة A ذات الأبعاد $m\times n$ ويعرف على أنه أكبر عدد من أعمدة المصفوفة A يكون مستقل خطياً ويرمز له بالرمز $r(A)$.

ملاحظة (٤.٣):

مرتبة المصفوفة الصفرية تساوي الصفر.

ملاحظة (٥.٣):

مرتبة المصفوفة المربعة $n \times n$ لا تزيد عن n وتكون مرتبتها تساوي n إذا كان وفقط إذا كان محددها مختلف عن الصفر أي أن

$$r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

ملاحظة (٦.٣):

بما أن $|A| = |A'|$ فإن $r(A) = r(A')$

العمليات الأولية على الصفوف (الأعمدة) elementary operations هي:

(i) تبديل صفين (عمودين).

(ii) ضرب صف (عمود) في عدد قياسي لا يساوي الصفر.

(iii) ضرب عناصر صف (عمود) في ثابت مختلف عن الصفر وإضافته إلى عناصر صف (عمود) أخر.

ملاحظة (٧.٣):

مرتبة المصفوفة لا تتأثر بالعمليات الأولية.

أي أنه إذا كانت A مصفوفة ناتجة من مصفوفة أخرى بإجراء عمليات أولية على الصفوف (الأعمدة) وفي هذه الحالة تكون مرتبة A تساوي عدد الصفوف (الأعمدة) غير الصفرية في المصفوفة الجديدة (بعد إجراء العمليات الأولية عليها).

مثال (٤.٣):

نعتبر المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ونجري العمليات الأولية عليها لتصبح على الصورة:

$$A \overset{\text{تكافؤ}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذاً $r(A) = 2$ لأن عدد الصفوف غير الصفرية (بعد إجراء العمليات الأولية) يساوي 2. وهذه الصفوف $(0\ -1\ -1\ -3)$ ، $(1\ 2\ 3\ 2)$ عبارة عن متجهات مستقلة خطياً أي أنه لا يمكن التعبير عن أحدها بدلالة الآخر.

ونعطي الآن أحد تطبيقات مرتبة المصفوفات وهو مرتبة المصفوفة ونظام المعادلات الخطية:

نظام المعادلات الخطية $AX = b$ يقال أنه متوافق consistent أي له حل إذا كان $r(A) = r(A|b)$ حيث $(A|b)$ المصفوفة الناتجة بإضافة عمود الثوابت للمصفوفة A وتسمى المصفوفة الموسعة augmented matrix. أما إذا كان $r(A) \neq r(A|b)$ فإن النظم يكون غير متوافق non consistent أي ليس له حل.

نعتبر الحالات الآتية:

(i) (عدد المجاهيل) $r(A) = r(A|b) = k = n$ في هذه الحالة يوجد حل وحيد.

(ii) إذا كان $k < n$ فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول نحصل عليه باختيار عدد $n-k$ من المجاهيل كبارامترات ويقال في هذه الحالة أن النظام له $n-k$ درجة حرية degree of freedom.

ونكتفي بهذا القدر في حدود ما نحتاج إليه في دراستنا لموضوعات الكتاب.

تمارين (٣)

(١) بين أنه لأي ثلاث متجهات a,b,c مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^n$ تكون المتجهات $a-b$, $b-c$,$a-c$ مستقلة خطياً.

(٢) عبر عن المتجه $a=(8,9)$ في صورة تركيبة خطية من المتجهات $b=(2,5)$, $c=(-1,3)$.

(٣) أثبت أنه المتجهات $a=(1,0,1),b=(2,1,0),c=(0,1,1)$ مستقلة خطياً.

(٤) أثبت أن المتجهات $a=(1,1,1),b=(2,1,0),c=(3,1,4),d=(1,2,-2)$ مرتبطة خطياً.

(٥) إذا كان $a,\ b,\ c$ متجهات مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^n$ أثبت أن مجموعة المتجهات $a+b$,$b+c$,$a+c$ مستقلة خطياً أيضاً. ماذا عن مجموعة المتجهات a-b, b+ c, $a+c$.

(٦) نفرض أن a, b, c ثلاث متجهات مختلفة عن الصفر في الفراغ الثلاثي الإقليدي $\mathbb{R}^3$ بحيث a عمودي على b، b عمودي على c ، c عمودي على a أثبت أن $a,\ b,\ c$ متجهات مستقلة خطياً.

(٧) أوجد مرتبة المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(٨) أوجد حل لمجموعة المعادلات التالية وحدد درجات الحرية:

(a)
$$\begin{aligned} x-y+z&=0 \\ x+2y-z&=0 \\ 2x+y+3z&=0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=1 \\ -x+y-21z&=2 \\ 3x+7y+z&=3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x+y-z+w&=2 \\ 2x-y+z-3w&=1 \end{aligned}$$