# الباب الثاني

## الرواسم (الدوال أو التطبيقات أو التحويلات)

## The Mappings (functions, transformations)

الرواسم أو الدوال من المواضيع الهامة حيث تعتبر القاعدة الأساسية للتحليل الرياضي وحساب التفاضل والتكامل والهندسة. لذلك وجب علينا تقديم كل ما يتعلق بالدالة وتحصيل الدوال والدوال العكسية والتي تعتبر حجر الزاوية للتحويلات الهندسية أو هندسة التحويلات.

### (١.٢) مقدمة :

**تعريف (١.٢):**

أي علاقة تربط كل عنصر من عناصر المجموعة $A$ بعنصر واحد من عناصر المجموعة $B$ تسمى راسماً أو تطبيق (دالة) من $A$ إلى $B$.

فإذا كان $f$ راسماً من $A$ إلى $B$ فإننا نكتب $A \xrightarrow{f} B$ or $f : A \longrightarrow B$،

ونقول أن العنصر $b$ في $B$ والمرتبط بالعنصر $a \in A$ صورة $a$ بالنسبة للراسم $f$ ويعبر عنه بالصورة $f(a)$. العنصر $a$ يسمى المتغير المستقل والعنصر $b$ يسمى المتغير التابع.

**ملاحظة (١.٢):**

من التعريف السابق نجد أن الراسم $f$ والعلاقة $R$ من $A$ إلى $B$ يرتبطا معاً من خلال

$$f \subseteq R \subseteq A \times B$$

**تعريف (٢.٢):**

نفرض أن $f : A \longrightarrow B$، المجموعة $A$ تسمى نطاق أو مجال (domain) الراسم $f$، المجموعة $B$ تسمى النطاق المصاحب أو المجال المقابل (codomain) للراسم $f$. المجموعة

$$f(A) = \{b \in B : \exists\, a \in A \;\&\; f(a) = b\}$$

تسمى مدى (range) الراسم (الدالة)، وواضح أن $f(A) \subset B$.

**مثال (١.٢):**

نفرض $A=\mathbb{R}, B=\{-1,1\}$ و $f:\mathbb{R}\longrightarrow B$ علاقة من $A$ إلى $B$ معرفة كالآتي :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد قياسي} \\ -1 & \text{إذا كانت } x \text{ عدد غير قياسي} \end{cases}.$$

واضح أن $f$ راسماً من $\mathbb{R}$ إلى $B$، حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية Real numbers

**تعريف (٢.٢):**

إذا كانت $f:A\longrightarrow B,\ g:X\longrightarrow Y$ فإن الراسمين $g,f$ يقال أنهما متساويين وتكتب $f=g$ إذا تحققت الشروط الآتية

(i) نطاق $f$ = نطاق $g$ أي $A=X$

(ii) النطاق المصاحب للراسم $f$ = النطاق المصاحب للراسم $g$ أي $B=Y$

(iii) $f(a)=g(a)$ لكل عنصر $a$ في النطاق.

**ملاحظة (٢.٢):**

طبقاً لتعريف تساوي راسمين. لا يمكن أن يتساوى راسمين إلا إذا كان لهما نفس النطاق ونفس النطاق المصاحب. فمثلاً

**مثال (٢.٢):**

نعتبر الراسمين $f, g$ حيث $f:A\longrightarrow A$ ومعرف كما يلي:

$$f(a)=a^2, \forall a\in A$$

حيث $A$ مجموعة الأعداد الحقيقية، الراسم $g:A\longrightarrow A^+$ معرف بالعلاقة

$$g(a)=a^2, \forall a\in A$$

حيث $A^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

واضح أن $g, f$ لهما نفس النطاق وأن صورة كل عنصر تحت تأثير $f$ تساوي صورة نفس العنصر تحت تأثير $g$. ولكن النطاق المصاحب للراسم $f\neq$ النطاق المصاحب للراسم $g$.

إذاً لا يمكن أن القول بأن الراسم $f$ تساوي الراسم $g$.

**تعريف (٤.٢):**

الراسم $f:A\longrightarrow B$ يقال أنه راسماً أحادياً (1-1 mapping or injective) إذا كان لأي عنصرين $a_1,a_2\in A$ فإن

$$f(a_1)=f(a_2)\Rightarrow a_1=a_2$$

أي أن $f$ تكون أحادية إذا كان كل عنصرين مختلفين في النطاق لهما صورتين مختلفتين في النطاق المصاحب. الراسم الأحادي يسمى أحياناً متباين.

**تعريف (٥.٢):**

نفرض الراسم $f:A\longrightarrow B$، يقال أن $f$ راسماً من $A$ فوق $B$ إذا كان مدى $f$ يساوي النطاق المصاحب. أي أن $f$ تكون فوقية surjective إذا كان لكل عنصر $b\in B$ يوجد (على الأقل) عنصراً واحداً $a\in A$ بحيث يكون $b=f(a)$.

الراسم الفوقي يسمى أحياناً شامل أو غامر.

**تعريف (٦.٢):**

الراسم $f:A\longrightarrow B$ يقال أنه تناضر أحادي أو تقابل (1-1 correspondence or bijective) إذا كان أحادياً وفوقياً.

أي أن bijection = surjection + injection تناظر أحادي = فوقي + أحادي.

**مثال (٣.٢):**

نفرض الراسم $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ معرفاً بالقاعدة $f(x)=-x,\forall x\in\mathbb{Z}$ عين نوع هذا الراسم.

**الحل:**

(i) هذا الراسم أحادي لأنه لأي عنصرين (النطاق) $x,y\in\mathbb{Z}$ يتحقق

$$f(x)=f(y)\Rightarrow -x=-y\Rightarrow x=y$$

(ii) الراسم فوقي لأن لأي عنصر (النطاق المصاحب) $x\in\mathbb{Z}$ يوجد العنصر $-x\in\mathbb{Z}$ (النطاق) بحيث $f(-x)=-(-x)=x$ أي أن $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$

(iii) حيث أن $f$ أحاد وفوقي، إذاً $f$ تناظر أحادي.

**مثال (٤.٢):**

نفرض الراسم $g:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ومعرف بالقاعدة: $g(x)=2x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$

عين نوع هذا الراسم.

**الحل:**

(i) الراسم $g$ احادي لأن لأي عنصرين (النطاق =) $x,y \in \mathbb{Z}$ يتحقق

$$g(x)=g(y) \Rightarrow 2x=2y \Rightarrow x=y$$

(ii) الراسم $g$ ليس راسماً فوقياً لأنه بالنسبة العنصر (النطاق المصاحب =) $3 \in \mathbb{Z}$، لا يوجد عدد صحيح ضعفه يساوي 3 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$g(x)=2x=3$$

(iii) بما أن $g$ ليست راسماً فوقياً، إذاً $g$ ليست تناظراً احادياً .

**مثال (٥.٢):**

نفرض الراسم $h:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بحيث $h(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{Z}$ عين نوع الراسم.

**الحل:**

(i) هذا الراسم ليس أحادياً لأن

$$h(x)=h(y) \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x=\pm y, \forall x,y \in \mathbb{Z}$$

$\therefore$ ليست بالضروري أن تكون $x$ تساوي $y$.

(ii) الراسم $h$ ليس فوقياً لأن: إذا أخذنا (النطاق المصاحب) $2 \in \mathbb{Z}$ فإنه لا يوجد عدد صحيح مربعه يساوي 2 أي لا يوجد (النطاق =) $x \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون

$$h(x)=x^2=2$$

(iii) بما أن الراسم ليس أحادياً وليس فوقياً، إذاً $h$ ليس تناظراً أحادياً.

**مثال (٦.٢):**

نفرض أن

$$B=\{x,y\} \text{ ، } A=\{a,b,c,d\}$$

و

$$R=\{(a,x),(b,y),(c,y),(d,x)\}$$

هل $R$ راسماً؟ إذا كان كذلك عين نوع الراسم.

**الحل:**

(i) واضح أن $R$ راسماً من $A$ إلى $B$ (لماذا؟).

(ii) الراسم ليس أحادياً لأنه يوجد عنصر $y$ في المجال المصاحب يرتبط بعنصرين $b, c$ في المجال أي $f(b)=f(c)=y$

(iii) الراسم فوقي لأن كل عناصر المجال المصاحب لها أصول في المجال.

(v) إذاً $R$ راسم ليس تناظراً أحادياً.

**تعريف (٧،٢):**

إذا كانت $A_1 \subset A, f : A \longrightarrow B$ فإنه يمكن تكوين راسماً جديداً من $A_1$ إلى $B$ ويرمز له بالرمز $f / A_1 : A_1 \longrightarrow B$ بحيث $(f / A_1)(a) = f(a), \forall a \in A_1$. الراسم $f / A_1$ يسمى تقييد $f$ (restriction $f$) على $A_1$.

**تعريف (٨،٢):**

إذا كان $A_1 \subset A$، فإن الراسم $f : A_1 \longrightarrow A$ المعرف بالقاعدة $f(a) = a, \forall a \in A_1$ يسمى راسماً احتوائياً **(inclusion mapping)** وقد نستخدم الرمز: $i : A_1 \subset A$

الراسم الاحتوائي $i : A \longrightarrow A$ يسمى راسم تطابق (identity) للمجموعة $A$.

**تعريف (٩،٢):**

نفرض $f : A \longrightarrow B$ الصورة العكسية للعنصر $b \in B$ يرمز لها $f^{-1}(b)$ وتحتوي عناصر من $A$ تكون $b$ صورة كل منهم. أي أن

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\} \subset A$$

وتكتب معكوس $f$ ($f$ inverse) أو Inverse of a function

**ملاحظة (٣،٢):**

على وجه العموم $f^{-1}(b)$ قد تتكون من أكثر من عنصر وقد تكون $\phi$. أي أن معكوس $f$ قد يكون راسم وقد لا يكون راسم.

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ راسماً أحادياً وفوقياً. فإن لكل $b \in B$ نجد أن المجموعة $f^{-1}(b)$ تتكون من عنصر واحداً فقط في $A$. وفي هذه الحالة $f^{-1}$ تكون راسماً من

$B$ إلى $A$ ونكتب $f^{-1}: B \longrightarrow A$ ويسمى هذا الراسم المعكوس للراسم $f$ Inverse map أو الراسم العكسي.

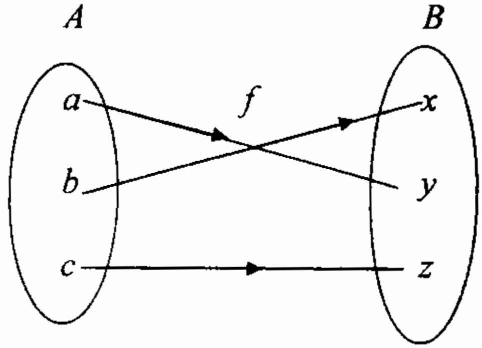
المعكوس $f^{-1}$ للراسم $f$ يحقق

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

راسم التناظر الأحادي $f$ يقال أنه قابل للعكس inverse أي له معكوس $f^{-1}$.

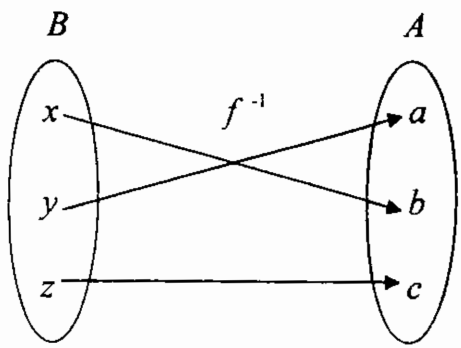
**مثال (٢.٧):**

نفرض الراسم المعرف بالمخطط السهمي شكل (٢.١)




شكل (٢.١)

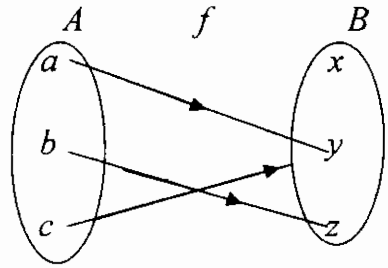
∵ الراسم $f$ تناظر أحادي. إذاً الراسم المعكوس (العكسي) $f^{-1}$ للراسم $f$ موجود ومعرف بالمخطط السهمي شكل (٢.٢).




شكل (٢.٢)

**مثال (٢-٨):**

نفرض الراسم $f : A \longrightarrow B$ المعرف بالمخطط السهمي شكل (٢-٣) حيث $f(a) = y$ ,$f(c) = y$ ، إذاً $f$ ليس راسماً أحادياً وبذلك لا يمكن تكوين الراسم $f^{-1}$.




شكل (٢-٣)

**مثال (٢-٩):**

العلاقة $f$ حيث

$$f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = \sin x , \forall x \in \mathbb{R}$$

تعرف راسم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ مجاله $\mathbb{R}$ ومداه (صورته) الفترة $[-1,1]$

**مثال (٢-١٠):**

العلاقة $f$ حيث $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة بالقاعدة

$$f(x) = \log x , \forall x \in \mathbb{R}$$

ليست دالة على $\mathbb{R}$ لأن دالة اللوغاريتم غير معرفة للأعداد السالبة.

**تعريف (٢-١٠):**

الراسم (الدالة) $f$ المعرفة بالقاعدة

$$f : X \longrightarrow X , f(x) = c, \forall x \in X$$

حيث $c$ ثابت يسمى دالة ثابتة أو راسم ثابت constant mapping. واضح أن مدى الراسم الثابت هو $\{c\}$.

**تعريف (١١.٢):**

النقطة $x$ التي تحقق $f(x) = x$ حيث $f$ راسم من $A$ إلى $B$ تسمى نقطة ثابتة fixed point للراسم $f$.

**مثال (١١.٢):**

للدالة

$$f(x) = \sin x, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

توجد نقطة ثابتة وهي الصفر لأن

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

**تعريف (١٢.٢):**

الراسم $f : X \longrightarrow Y$ يقال أنه من النوع into إذا وجد عنصر في المجال المقابل $Y$ ليس له أي أصل في المجال $X$.

**مثال (١٢.٢):**

الراسم

$$f : A \longrightarrow B, f \subset A \times B, f(x) = 2x$$

حيث $A = \{1,2,3\}, B = \{2,4,6,8\}$

هو من نوع into لأن العنصر $8 \in B$ هو العنصر الوحيد الذي ليس له أصل.

**مثال (١٣.٢):**

الراسم

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{N}$$

أحادي ولكن ليس فوقي حيث الأعداد الزوجية في المجال المقابل لها أصول preimage في المجال بينما الأعداد الفردية ليست لها أصول في المجال وبالتالي يمكن القول أنه من النوع into.

**نظرية (١.٢):**

إذا كان $X, Y$ مجموعتان غير خاليتين وأن $f : X \longrightarrow Y$ راسم تناظر أحادي. إذاً $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ تناظر أحادي.

**البرهان:**

نفرض أن $f$ تناظر أحادي وبالتالي فإن $f$ أحادي وفوقي ولهذا يوجد عنصرين $x_1, x_2 \in X$ بحيث $f(x_1) = y_1 \wedge f(x_2) = y_2$

وهذا يؤدي إلى

$$x_1 = f^{-1}(y_1) \wedge x_2 = f^{-1}(y_2)$$

نفرض أن

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow y_1 = y_2$$

إذاً $f^{-1}$ احادي.

وآخيراً إذا كان $x$ عنصر اختياري في $X$ ومن التعريف يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ بحيث

$$f(x) = y \vee x = f^{-1}(y)$$

إذاً لكل $x \in X$ يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ بحيث $f^{-1}(y) = x$ وبالتالي فإن $f^{-1}$ فوقي. وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

**نظرية (٢.٢):**

معكوس راسم التناظر الأحادي $f : X \longrightarrow Y$ وحيد.

**البرهان:**

نفرض أنه يوجد معكوسان $g, h$ للراسم $f$ أي أن

$$g, h : Y \longrightarrow X$$

ويحققان $f(g(y)) = y, f(h(y)) = y$ لأي عنصر اختياري $y \in Y$

حيث $f(x_1) = y \Leftrightarrow g(y) = x_1, h(y) = x_2 \Leftrightarrow f(x_2) = y$

وبما أن $f$ أحادي إذاً

$$f(g(y)) = y = f(h(y))$$

وحيث أن $f$ أحادي يكون لدينا

$$g(y) = h(y), \forall y \in Y$$

$$\therefore g = h$$

أي أن معكوس $f$ وحيد.

**مثال (١٤،٢):**

بين أن الراسم $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرف بالقاعدة

$$f(x)=3x+5,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

تناظر أحادي ومن ثم أوجد القاعدة التي تعرف المعكوس $f^{-1}$.

**الحل:**

نفرض (النطاق) $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ بحيث $f(x_1)=f(x_2)$

$$\therefore\ 3x_1+5=3x_2+5\Rightarrow 3(x_1-x_2)=0$$
$$\Rightarrow x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$$

إذاً الراسم أحادي.

لإثبات أن هذا الراسم فوقي نفرض أن (المجال المقابل) $y\in\mathbb{R}$

هل يمكن إيجاد $x$ في المجال بحيث $y=f(x)$ أي أن

$$3x+5=y\Rightarrow x=\frac{y-5}{3}\in\mathbb{R}$$

إذاً $f$ فوقي وبالتالي الراسم تناظر أحادي ولهذا يكون له معكوس $f^{-1}$ معرف من خلال القاعدة:

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-5}{3},\forall y\in\mathbb{R}$$

أو في الشكل المألوف

$$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3},\forall x\in\mathbb{R}$$

ويتحقق

$$ff^{-1}(x)=f\left(\frac{x-5}{3}\right)$$
$$=3\left(\frac{x-5}{3}\right)+5=x$$

وكذلك

$$f^{-1}f(x)=f^{-1}(3x+5)$$

$$= \frac{(3x+5)-5}{3} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x = I(x)$$

حيث $I$ راسم التطابق وعليه فإن $f^{-1}$ هو معكوس $f$.

## (٢.٢) : تحصيل الرواسم : Composite Mappings

نعرف هنا تحصيل الرواسم. ولذلك نفرض أن $f, g$ رواسم معرفة كالآتي :

$$f : X \longrightarrow Y \quad , \quad g : Y \longrightarrow Z$$

إذاً $x \in X$ صورتها $y = f(x) \in Y$ بالراسم $f$ وكذلك فإن $y \in Y$ لها صورة $z = g(y)$ بالراسم $g$

$$\therefore \quad z = g(y) = g\big(f(x)\big), \forall x \in X$$

هذه القاعدة التي عرفت صورة $x$ في $Z$ تعرف راسم من $X$ إلى $Z$ يرمز له بالرمز $g \circ f$ حيث

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \ , \ (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$$

واضح أن

$$\text{Dom}(g \circ f) = X = \text{Dom}(f)$$

**ملاحظة (٤.٢):**

الراسم $g \circ f$ معرف فقط عندما

$$\text{Rang}(f) \subseteq \text{Dom}(g)$$

**ملاحظة (٥.٢):**

إذا كان $g \circ f$ معرف ليس من الضروري أن يكون $f \circ g$ معرف لأن الراسم $f \circ g$ معرف فقط عندما

$$\text{Rang}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$$

**ملاحظة (٦.٢):**

إذا كانت الرواسم $f \circ g$ ، $g \circ f$ معرفة فإنه في الحالة العامة ليس من الضروري أن يكونا متساويان. أي أن $f \circ g \neq g \circ f$

ونوضح ذلك بالمثال التالي:

**مثال (١٥،٢):**

إذا كان

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,f(x)=x^2$$

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,g(x)=\cos x$$

إذاً

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

$$=g(x^2)=\cos x^2$$

بينما

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$$=f(\cos x)=\cos^2 x$$

واضح أن

$$f\circ g\neq g\circ f$$

لأن

$$\cos x^2\neq\cos^2 x$$

**نظرية (٣،٢):**

إذا كان $f:X\longrightarrow Y$ راسم ، $I_x,I_y$ رواسم التطابق على $X$، $Y$ على الترتيب فإن

$$f\circ I_x=f\ ,I_y\circ f=f$$

**البرهان:**

الرواسم المعطاة هي

$$f:X\longrightarrow Y\ ,I_x:X\longrightarrow X\ ,I_y:Y\longrightarrow Y$$

نفرض أن $x\in X$ عنصر اختياري إذاً

$$(I_y\circ f)(x)=I_y(f(x))=f(x),(f(x)=y\ \in Y)$$

$$\therefore \quad I_y \circ f = f$$

بالمثل

$$(f \circ I_x)(x) = f(I_x(x)) = f(x)$$
$$\therefore \quad f \circ I_x = f$$

**نظرية (٤.٢):**

إذا كان $f: X \longrightarrow Y$ راسم قابل للعكس فإن

$$f \circ f^{-1} = I_y, f^{-1} \circ f = I_x$$

**نظرية (٥.٢):**

إذا كان $f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow X$

رواسم وكان

$$f \circ g = I_y \quad , g \circ f = I_x$$

فإن $g = f^{-1}$ أي أن $g$ هو معكوس $f$

**البرهان:**

خطوات البرهان هي هل $f$ في هذه الحالة قابل للعكس وإذا كان كذلك هل $f^{-1} = g$ ولذلك نقوم بإثبات أن $f$ أحادي وفوقي.

**نظرية (٦.٢):**

نفرض أن

$$f: X \longrightarrow Y, g: Y \longrightarrow Z$$

رواسم تناظر أحادي حيث $X, Y, Z$ مجموعات غير خالية. إذاً $g \circ f$ قابل للعكس ويحقق

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**البرهان:**

بما أن $f, g$ رواسم تناظر احادي. إذاً $f^{-1}, g^{-1}$ موجودة. نبين الآن أن $g \circ f$ قابل للعكس أي $(g \circ f)^{-1}$ موجود وهذا يتطلب إثبات أن $g \circ f$ تناظر أحادي.

نفرض أن

$$(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$$
$$\Rightarrow g(f(x_1))=g(f(x_2))$$
$$\Rightarrow f(x_1)=f(x_2), \qquad (g \text{ is } 1\text{-}1)$$
$$\Rightarrow x_1=x_2, \qquad (f \text{ is } 1\text{-}1)$$

إذاً $g\circ f$ أحادي.

نبين الآن $g\circ f$ فوقي ولذلك نفرض $z\in Z$ إذاً يوجد $y\in Y$ بحيث $g(y)=z$ لأن $g$ فوقي وأيضاً بما أن $f$ فوقي يوجد عنصر $x\in X$ بحيث $f(x)=y$

$$\therefore\ (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=z$$

إذاً لعنصر $z\ni Z$ يوجد عنصر $x$ في $X$ بحيث $(g\circ f)(x)=z$

إذاً $g\circ f$ فوقي وبالتالي $g\circ f$ تناظر أحادي أي قابل للعكس.

$$\therefore\ (g\circ f)(x)=z\Rightarrow (g\circ f)^{-1}(z)=x \qquad \text{(I)}$$

بالمثل

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))$$
$$=f^{-1}(y)$$ (لأن $g(x)=z\Rightarrow y=g^{-1}(z)$)

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=x$$ (لأن $f(x)=y\Rightarrow x=f^{-1}(y)$)

إذاً

$$(f^{-1}\circ g^{-1})(z)=x \qquad \text{(II)}$$

واثبتنا في (I) أن

$$(g\circ f)^{-1}(z)=x$$

إذاً
$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

**تعريف (١٢،٢):**

نفرض أن $X\neq\Phi$ ، $A\subseteq X$ ، $B\subseteq Y$ ، $f:X\longrightarrow Y$ ونعرف

$$f(A)=\{y\in Y: y=f(x), x\in A\}$$
$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$$

من هذا التعريف يمكن ملاحظة ما يلي :

**ملاحظة (٧.٢):**

(i) $y \in f(A) \Rightarrow y = f(x), x \in A$

(ii) $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in B$

(iii) $f(x) \in f(A) \not\Rightarrow x \in A$

(iv) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

ونوضح ذلك من المثال التالي :

**مثال (١٦.٢):**

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}, A = [0,1] \subset \mathbb{R}$$

إذاً
$$f(A) = [0,1]$$

ناخذ $-1 \in \mathbb{R} \not\ni A$ ومن التعريف نجد أن

$$f(-1) = 1 \in [0,1] = f(A) \text{ لكن } -1 \notin A$$

نعطي الآن مجموعة من النظريات (بدون برهان) تتعلق بالصورة والصورة العكسية لاتحاد أو تقاطع مجموعتين جزئيتين من النطاق والنطاق المصاحب.

**نظرية (٧.٢):**

نفرض $f : X \longrightarrow Y$ راسم حيث $X \neq \Phi, Y \neq \Phi$ ، $A, B \subseteq X$

إذاً

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(ii) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

**ملاحظة (٨.٢):**

في الحالة العامة فإن

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$$

ونوضح ذلك بالمثال التالي :

**مثال (١٧.٢):**

نعتبر الراسم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$A = [-1,0] \subset \mathbb{R} \quad , \quad B = [0,1] \subset \mathbb{R}$$

إذاً

$$f(A)=[0,1]\ ,\qquad f(B)=[0,1]$$

$$f(A)\bigcap f(B)=[0,1]$$

$$A\bigcap B=\{0\}\quad ,f(A\bigcap B)=\{0\}$$

إذاً

$$f(A\bigcap B)\neq f(A)\bigcap f(B)$$

**نظرية (٢-٨):**

إذا كان $f:X\longrightarrow Y$ راسم ، $X\neq\Phi$ ، $Y\neq\Phi$ ، $A,B\subseteq Y$. إذاً

(i) $f^{-1}(A\bigcup B)=f^{-1}(A)\bigcup f^{-1}(B)$

(ii) $f^{-1}(A\bigcap B)=f^{-1}(A)\bigcap f^{-1}(B)$

**نظرية (٢-٩):**

نفرض أن $f:X\longrightarrow Y$ راسم حيث $X\neq\Phi$ ، $Y\neq\Phi$. إذاً لأي مجموعة جزئية $A$ من $X$ يتحقق $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

**ملاحظة (٢-٩):**

في الحالة العامة

$$A\neq f^{-1}(f(A))$$

ونوضح ذلك بالمثال التالي :

**مثال (٢-١٨):**

نعتبر الراسم

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^2,\forall x\in\mathbb{R}$$

ونأخذ $A=[-1,0]\subset\mathbb{R}$ إذاً $f(A)=[0,1]$

$$\therefore\ f^{-1}(f(A))=f^{-1}[0,1]=[-1,1]\neq A$$

وهذا يبرهن على أنه في الحالة العامة

$$A\neq f^{-1}(f(A))$$

**نظرية (٢-١٠):**

نفرض $f: X \longrightarrow Y$ راسم و $B$ أي مجموعة جزئية من $Y$ إذاً

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$$

**ملاحظة (٢-١٠):**

في النظرية السابقة إذا كانت $B$ مجموعة جزئية من مدى الراسم $f$ أي $B \subseteq \text{Rang}(f) \subset Y$ فإن $f(f^{-1}(B)) = B$

ونوضح ذلك بالمثال التالي:

**مثال (٢-١٩):**

نعتبر الراسم

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$$

ونختار $B = [-1,0] \not\subset \text{Rang} f$ إذاً $f^{-1}(B) = \{0\}$

$$\therefore \quad f(f^{-1}(B)) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [-1,0] = B$$

$$\therefore \quad f(f^{-1}(B)) \neq B$$

**(٢-٣) زمرة الرواسم (التحويلات):**

مما سبق يتضح أن مجموعة التحويلات (الرواسم) من نوع تناظر أحادي تحقق أنها مغلقة بالنسبة لعملية تحصيل الرواسم وكذلك دامجة ولها عنصر محايد (راسم التطابق أو الوحدة) وكل راسم له معكوس وعليه فإن مجموعة الرواسم من نوع تناظر أحادي تكون زمرة مع عملية تحصيل الرواسم. هذه الزمرة تسمى زمرة التحويلات أو زمرة الرواسم **group of transformation**.

# تمارين (٢)

(١) أعطِ مثال :

(i) لراسم $f : X \longrightarrow Y$ يحقق

$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ لمجموعتين جزئيتين $A, B$ من $X$

(ii) لراسم $f : X \longrightarrow Y$ يحقق

$f(X - A) \neq f(X) - f(A)$ لمجموعة جزئية $A$ من $X$

(٢) إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{a,b\}$ اكتب جميع عناصر $A^B$ (جميع الرواسم من $B$ إلى $A$)، كم عنصراً في $A^B$ يكون راسماً أحادياً .

(٣) أي من الرواسم $\theta : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ تكون أحادية وأيها تكون فوقية في الحالات الآتية . حيث $\theta(x)$ معرفة لكل $x \in \mathbb{Z}$ كما يلي :

(i) $\theta(x) = \frac{1}{2}x$ إذا كانت $x$ زوجية، $\theta(x) = x$ إذا كانت $x$ فردية.

(ii) $\theta(x) = 2x + 1$

(iii) $\theta(x) = x^3$

(٤) نفرض $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(x \geq 0)$ ، ونعرف الراسم

$$\theta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad \theta(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

برهن أن $\theta$ تناظر أحادي ومن ثم أوجد $\theta^{-1}$.

(٥) نعرف الراسم : $\theta ; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \theta(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية. هل $\theta$ تناظر أحادي؟

(٦) نفرض $a, b$ عددين حقيقيين ثابتين، ونفرض أن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ راسم معرفة كما يلي $f(x) = ax + b,\ \forall x \in \mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

برهن أن $f$ تناظر أحادي إذا وإذا فقط كانت $a \neq 0$ ومن ثم أوجد $f^{-1}$ في هذه الحالة.

(٧) نفرض $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{e,f\}$ ، أكتب كل الرواسم الممكنة من $A$ إلى $B$.

(إرشاد : أوجد كل المجموعات الجزئية الممكنة من $A\times B$ التي تعرف علاقات من $A$ إلى $B$ ثم اختار كل العلاقات التي تصلح أن تكون رواسم).

(٨) بين أي من العلاقات الآتية تصلح أن تكون راسم وأوجد المدى لكل منها في حالة ما إذا كانت راسم :

(i) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $g:\mathbb{R}^{+}\longrightarrow\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}, \forall x\in\mathbb{R}^{+}$

(iii) $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, h(x)=\log x, \forall x\in\mathbb{R}$

(iv) $\ell:\mathbb{N}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{Q}, \ell(x)=\dfrac{1}{x-2}, \forall x\in\mathbb{N}-\{2\}$

(v) $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, k(x)=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$

(vi) $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, h(x)=a^{x}, a>0, \forall x\in\mathbb{R}$

(vii) $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, T(x)=\sqrt{9-x^{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$

(٩) أي من الرواسم الآتية تناظر أحادي

(i) $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}, f(z)=|z|, \forall z\in\mathbb{C}$

حيث $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة.

(ii) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$

(١٠) إذا كان $X\neq\Phi, Y\neq\Phi$ بين أنه يمكن تكوين راسم تناظر أحادي بين $X\times Y$ ، $Y\times X$

(١١) إذا كان $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=|x|$ بين أن $f\circ f=f$

(١٢) إذا كان $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=x^{2}, g(x)=x+3$

بين أن $f\circ g\neq g\circ f$

(١٣) هل الراسم $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} : f$ تناظر أحادي حيث

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{2} & , \quad x \text{ odd}\\ \frac{-x}{2} & , \quad x \text{ even}\end{cases}$$

(١٤) هل الراسم $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, f(n)=n-(-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ تناظر أحادي.

(١٥) هل الراسم $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تناظر أحادي حيث

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad x \text{ عدد قياسي}\\ -1 & , \quad x \text{ عدد غير قياسي}\end{cases}$$