الجزء الأول (مقدمة تاريخية ومراجعة لما سبق دراسته)

الباب الأول

مقدمة تاريخية (تصنيف الهندسات)

A Brief History

في هذا الباب نقدم نبذة تاريخية عن نشأة الهندسة وتطورها، من قبل الميلاد حتى وصلت إلى ذلك البناء العظيم في العصر الحديث، لما لها من تداخلات في أفرع العلوم المختلفة وتطبيقاتها في مجالات الحياة العملية. ونبين كيف أن مفهوم النظرة للهندسة كأشياء محسوسة تغير ليصبح مفهوم مجرد وهذا التجريد هو صلب الواقع العملي كما ظهر في أعمال كل من العالم الشهير ريمان واوباتشفيسكي والذي ثبت فيما بعد مدى ملائمة هذه الهندسات لكثير من مشاكل الحياة. وهذا العرض مبني على نظام المسلمات الذي قامت عليه الهندسة وتصنيفاتها المختلفة.

(١.١) المسلمات والفرضيات والتعاريف :

Definitions, Postulates and Axioms :

يرجع تاريخ الهندسة إلى الماضي السحيق حيث ظهرت في محاولات البابليون والمصريون القدماء لتأسيس حضاراتهم العريقة. وفي القرن السابع قبل الميلاد بدأ تطور الهندسة على أيدي المدارس الأغريقية. كثير من الحقائق الأساسية تم الحصول عليها في القرن السادس والخامس قبل الميلاد وظهرت في مفهوم النظرية وكيفية البرهان.

وفي القرن الثالث قبل الميلاد أصبح الأغريق لهم معرفة عميقة بالهندسة، ليس فقط في تراكم عدد كبير من الحقائق الهند، ية ولكن في طرق البرهان. ولهذا كانت هذه الفترة موجهة لتجميع كل النتائج معاً ووضعها في ترتيب منطقي Logical order وإعمال كثيرة قام بها الأغريق من أجل تطوير الهندسة، ولكنها لم تظهر إلينا، وخصوصاً بعد ظهور عمل إقليدس الشهير والذي أسماه الأصول Euclid's Famous Elements هذا العمل يحتوي على ثلاثة عشر كتاباً تفصيلها كالآتي :

الكتب الست الأولى احتوت على دراسة الأشكال المستوية Plane

Geometry، الكتب الحادي عشر إلى الثالث عشر تخصصت في دراسة الأشكال المجسمة Solid Geometry، الكتب الباقية تخصصت في دراسة الحساب Arithmetic بشكل هندسي Geometric Form.

إذاً الأصول لإقليدس احتوت على المفاهيم الأساسية في الهندسة Elementary Geometry. هذه الكتب قسمت إلى ثلاثة مجموعات هي :

(٢.١) المجموعة الأولى: التعاريف Definitions

هذه المجموعة نوردها باختصار :

١. النقطة هي الشيء الذي لا أجزاء له.

٢. المنحنى هو طول بلا عرض Breadthless

٣. الأطراف Extremities للخط المستقيم هي نقاط.

٤. الخط المستقيم هو منحنى متماثل بالنسبة لكل نقاطه.

٥. السطح هو شيء له طول وعرض فقط.

٦. أطراف السطح هي منحنيات.

٧. سطح المستوى هو سطح يقع بالتماثل مع خط مستقيم عليه.

٨. الزاوية المستوية Plane Angle هي الميل Inclination لكل من منحنين في المستوى على الآخر والذي يقطع كل منهما ولا يقعا على خط مستقيم واحد.

بعد هذه التعاريف قام إقليدس بوضع المجموعة الثانية (الفرضيات) Postulates والثالثة (المسلمات) Axioms والتي تثير حقائق Assertions تقبل بدون برهان.

(٣.١) المجموعة الثانية: الفرضيات Postulates

هذه المجموعة تحوي خمس فرضيات هي :

١. يمكن رسم خط مستقيم وحيد بين نقطتين.

٢. كل قطعة مستقيمة finite line أو segment يمكن مدها extension لتصبح خط مستقيم - أي الخط المستقيم اتحاد عدد لانهائي من القطع المستقيمة.

٣. يمكن رسم دائرة مركزها عند أي نقطة ونصف قطرها أي عدد، بمعنى لأي نقطتين مختلفتين $p, \quad q$ يمكن رسم دائرة مركزها p ونصف قطرها هو طول القطعة

المستقيمة الواصلة بين p, q.

٤. كل الزوايا القائمة right angles متطابقة equal.

٥. إذا قطع مستقيم مستقيمين أخرين بحيث تكونت زاويتان داخليتان interior angles مجموع قياسهما أقل من قائمتين وعلى جانب واحد من الخط القاطع فإن الخطان يتقاطعان إذا مدا على هذا الجانب.

وهذه الفرضية سميت الفرضية الخامسة أو فرضية التوازي.

الهندسة التي تدرس الأشكال الهندسية مع تبني المسلمة الخامسة هذه تسمى الهندسة الإقليدية Euclidean Geometry.

(٤.١) المجموعة الثالثة: المسلمات Axioms وتحتوي على تسع مسلمات هي:

١. الكميات التي تساوي كل منها كمية أخرى محددة تكون كلها متساوية.

٢. إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات متساوية فإن النتائج تكون متساوية.

٣. إذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية فإن المتبقيات تكون متساوية.

٤. إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات مختلفة فإن النتائج مختلفة.

٥. الكل أكبر من أي جزء من أجزائه.

٦. إذا الكميات المتساوية تضاعفت doubled فإن النتائج متساوية.

٧. إذا الكميات المتساوية تناصفت halved فإن النتائج متساوية.

٨. الأشياء التي تتطابق coincide مع شيء أخر تكون مساوية equal لنفس الشيء.

٩. الخطان المستقيمان لا يمكن أن يحدا enclose أي فراغ.

اعتمد إقليدس على هذه المجموعات من التعاريف والفرضيات والمسلمات في ترتيب نظريات الهندسة ترتيباً منطقياً Logical order. بمعنى أن برهان أي نظرية يعتمد على ما سبقها من نتائج وفرضيات ومسلمات، وهذا النظام للبناء الهندسي يسمى النظام المسلماتي Axiomatic System . والهندسة المعرفة من خلال هذا النظام تسمى هندسة المسلمات ومجموعات المسلمات والتعاريف والفرضيات تسمى بمقومات الهندسة Substantiation of Geometry.

الأصول لإقليدس احتوى على الأساسيات الهامة في الهندسة واعتبر نموذج جيد

لزمن طويل ولكن به قصور defect حيث أن صياغته لا تتمشى مع التطور الحديث في الرياضيات والتعاريف اعتمدت على الوصف الهندسي للأشكال موضوع الدراسة، كما أن البراهين تعتمد على حقائق رياضية سابقة لم تبرهن ولم توضع في نظام المسلمات الذي وضعه إقليدس.

لوحظ القصور في الأصول لإقليدس من قبل كثير من العلماء Scholars . خصوصاً أن إقليدس وضع النسب proportional بين الأطوال والأحجام والمساحات ولم يقدم لنا كيفية قياسها بطريقة دقيقة والتي عالجها ارشميدس Archimedes من خلال خمس فرضيات تسمى فرضيات أرشميدس Archimedes Postulates وهي:

(١) من بين كل المنحنيات التي تصل بين نقطتين يكون الخط المستقيم هو الأقصر. وهذه الفرضية تناظر في الوقت الحالي خط أقصر بعد Geodesic على أي سطح أو عديد طيات (في الأبعاد العليا).

(٢) من بين كل السطوح التي لها نفس المحيط المستوى Plane perimeter يكون المستوى هو الأصغر. وهذه الفرضية حالياً تناظر ما يسمى بالسطوح المستصغرة Minimal surface.

(٣) المنحنيين في نفس المستوى الذي لهما نفس نقطة البداية والنهاية يكونا غير متطابقين إذا كان كل منهما مقعر convex وأحدهما مغلف بالآخر enclosed وبالخط المستقيم الواصل بين نهايتي المنحنيين.

(٤) السطحين الذي لهما نفس المحيط المستوي يكونا غير متطابقين إذا كان كل منهما مقعر وأحدهما مغلف بالأخر وبالمستوى الذي له نفس المحيط.

(٥) إذا كان $a < b$ فإنه يوجد عدد n بحيث $n\,a > b$.

المسلمات هذه تعتبر أساسيات الهندسة المترية (المعرف فيها دالة القياس) Metric Geometry والتي نعتمد عليها في دراسة التحويلات الهندسية.

أغلب الأعمال التي ظهرت حول أساسيات الهندسة كانت تحاول إسقاط مسلمة التوازي (المسلمة الخامسة لإقليدس) Euclid's fifth posttulate من فرضيات إقليدس لأنها كانت تبدو معقدة جداً.

(٥،١) الفرضية الخامسة The Fifth Postulate

كلنا يعرف القاعدة الأساسية التي تلعبها المسلمة الخامسة، من دراسة الهندسة الأولية Elementary Geometry حيث إنها تشكل أساس نظرية توازي الخطوط المستقيمة parallel lines وكل ما يتعلق بها مثل التشابه similarity للأشكال وحساب المثلثات Trigonometry وكذلك هندسة التحويلات.

تعلم الطالب أثناء مرحلة التعليم ما قبل الجامعي، في كتب الهندسة والتي تتناول المقارنة بين الأشكال الهندسية مثل القطع المستقيمة والزوايا والمثلثات حيث أن هذه الأشكال تكون متطابقة (متساوية) equal إذا ما تطابقت coincident من خلال حركة motion (انتقال ودوران أو انعكاس) كما نرى في هندسة التحويلات في الأبواب القادمة.

مفهوم الحركة، حتى الوقت الذي وضع فيه إقليدس نظام المسلمات، لم يكن معرف تعريف جيد وسوف نتناوله في هندسة التحويلات (الحركة).

ومن النظريات الأساسية في الهندسة المستوية تلك النظريات التي تعالج تطابق equality المثلثات والتعامد perpendicular وميل الخطوط المستقيمة inclined lines، وبالتالي يمكن إعادة صياغة مسلمة التوازي كالآتي:

يتوازى الخطين المستقيمين إذا لم يحتويا أي نقطة مشتركة بينهما (لا يتقاطعا).

هذه الصياغة أدت إلى برهان أن:

من أي نقطة خارج مستقيم (ليست واقعة عليه) معطى يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازي الخط المعطى.

وهذه المسلمة يمكن صياغتها كما يلي:

"يوجد خط مستقيم واحد يمر خلال نقطة معطاة ويوازي خط معطى".

وبالتالي يمكننا القول أن هذه المسلمة هي أساس الهندسة الإقليدية. ومن زمن إقليدس وحتى نهاية القرن التاسع عشر كانت مسلمة التوازي من المشاكل الشائعة في الهندسة. وبذلت محاولات كثيرة لبرهنتها وكثيراً من هذه المحاولات تعرضت لاستقلالية مسلمة التوازي مثل ليجندر (١٧٥٢-١٨٣٣) Legendre أي أنها مسلمة لا تعتمد على باقي

المسلمات وبالتالي إذا حذفت من نظام المسلمات فإن النظام يظل مترابط منطقياً. ومن مسلمة التوازي أمكن إثبات حقائق كثيرة في الهندسة المستوية مثل تشابه المثلثات وتناظر الزوايا وأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي قائمتين.

(٦.١) هندسة لوباتشفيسكي: Lobachevskin Geometry

حتى بداية القرن التاسع عشر لم تنجح أي محاولة لبرهنة مسلمة التوازي ولكن في العقود الأولى من القرن التاسع عشر ظهر حل لهذه المشكلة على يد نيكولاى إيفانوفتش لوباتشفيسكي (١٧٩٣ - ١٨٥٦) Lobachevsky في عام ١٨٢٩ حيث تمكن من صياغة وبرهان مسلمة التوازي وأثبت أن مسلمة التوازي مستقلة أي لا يمكن أن تعتمد أو تنتج من باقي مسلمات الهندسة التي وضعها إقليدس.

أي أن لوباتشفيسكي وضع هندسة مشابهة لهندسة إقليدس فيما عدا مسلمة التوازي وتوصل إلى نظام مسلماتي مرتب ترتيباً منطقياً لا تعارض فيه. وبالتالي فإن لوباتشفيسكي أسس هندسة جديدة أسماها الهندسة التخيلية Imaginary Geometry والتي تشابه الهندسة الإقليدية ولكن خالية (حرة) من التعارضات المنطقية Logical contradictions وطورها بنفس مستوى الهندسة الإقليدية. وقد تم التوصل لبرهان مدى التوافق Consistency لهندسة لوباتشفيسكي في نهاية القرن التاسع عشر والذي يمكن صياغته كالآتي :

(١) مسلمة التوازي ليس من الضروري أن تنتج من المسلمات الأخرى للهندسة، أي أنها مستقلة منطقياً Logically independent عن باقي المسلمات.

(٢) المسلمة الخامسة لا تنتج من باقي المسلمات (بعيداً عن الهندسة الإقليدية التي تصح فيها هذه المسلمة) بسبب وجود هندسة أخرى تخيلية والتي تفشل فيها هذه المسلمة.

لوباتشفيسكي قال أن هندسته تخيلية بينما الهندسة الإقليدية قابلة للتطبيق أو عملية Practical وهذا لا يعني أنه اعتبر هندسته نظام منطقي مجرد (بحت) Purely Logical System ولكن اعتبره نظام مفيد في التحليل الرياضي وعليه قام بتأليف كتاب بعنوان تطبيقات الهندسة التخيلية لحساب بعض التكاملات. إن لوباتفشيسكي لم يكن هو الوحيد الذي توصل إلى هندسة جديدة غير الهندسة الإقليدية ولكن جاوس

(١٨٥٥.١٧٧٧) Gauss توصل إلى هذا النوع من الهندسة.

وبعد ظهور هندسة لوباتشفيسكي قام العالم المجري بوي (١٨٠٢ ـ ١٨٦٠) Yohn Bolyai بالتوصل إلى هندسة أخرى غير هندسة إقليدس ولكن بصفة مستقلة تماماً، بمعنى أنه لم يطلع على أعمال لوباتشفيسكي. الهندسة الجديدة سميت فيما بعد بالهندسة اللاإقليدية Non-Euclidean Geometry.

قبل الإعلان عن هذه الهندسة (بعد موت لوباتشفيسكي) كانت الهندسة الإقليدية هي المفهوم الوحيد للفراغ. اكتشاف الهندسة اللا إقليدية إدى إلى القضاء على وجهة النظر السابقة للفراغ. إذاً النظرة للهندسة كعلم وموضوعاته المختلفة كان موسع لدرجة أنه أدى إلى المفهوم الحديث للفراغ المجرد Abstract Space وتطبيقاته العديدة في الرياضيات والمجالات المتعلقة بها من خلال الجبر الخطي وتطبيقاته الهندسية (هندسة التحويلات).

(٧.١) شكل الفراغ الهندسي Formation of Geometrical Space:

في القرن السابع والثامن عشر تطورت علوم الرياضيات وخصوصاً حساب التفاضل والتكامل Differential and Integral Calculus والهندسة التحليلية Analytic Geometry وكل هذا أدى إلى فتح آفاق جديدة لتطبيقات الجبر والتحليل الرياضي في حل مشاكل هندسية Geometrical problems وخصوصاً التي لها علاقة بمجالات الميكانيكا Mechanics والفلك Astronomy .

كثير من الموضوعات الهندسية تطورت وتقدمت في القرن التاسع عشر وأهم ثلاث مواضيع في هذه الفترة هي:

أساسيات الهندسة Foundation of Geometry، الهندسة التفاضلية Differential Geometry والهندسة الإسقاطية Projective Geometry. في البداية كان تطور الموضوعات السابقة يجري في اتجاهات مختلفة ولكن في نهاية القرن التاسع عشر أصبح كل منها قريب جداً من الأخر very close وبعض اجزائها توحد unified.

توجد مشكلتان أساسيتان في أساسيات الهندسة:

(١) تطور الهندسة المنطقي Logical development اعتماداً على حد أدنى من المسلمات.

(٢) دراسة Investigation الاعتماد المنطقي Logical dependence والترابط بين القضايا الهندسية Geometrical propositions المختلفة.

كثير من الدراسات أجريت حول برهان اعتماد المسلمة الخامسة على باقي المسلمات وفي النهاية توصلوا إلى استقلال المسلمة الخامسة عن باقي المسلمات. ويعتبر لوباتشفيسكي هو الذي وضع النتيجة الأساسية الأولى في هذا المجال عن طريق بناء نظام هندسي مختلف عن نظام إقليدس. أي أن لوباتشفيسكي وسع إدراك Realization معنى الهندسة وكذلك المشاكل المرتبطة بها.

توصل جورج فريدريك برنارد ريمان Georg Freidrich Bernhard Remann (١٨٢٦ ـ ١٨٦٦) في عام ١٨٥٤ على نتيجة هامة حول موضوع الترابط السابق بين هندسة لوباتشفيسكي وهندسة إقليدس وفيها طور المبادئ التحليلية Analytical principals للهندسة وأوجد نظام هندسي مختلف عن نظام كل من إقليدس ولوباتشفيسكي والذي أسماه هندسة ريمان. في هندسة الريمانية Riemannian Geometry الخط يتحدد بنقطتين والمستوى بثلاث نقاط وأي مستويين يتقاطعان في خط وهكذا ولكن هناك مفهوم مخالف للتوازي وقد تمكن من صياغته كالآتي:

"خلال نقطة معلومة لا يمكن رسم خط يوازي خط معلوم"

وتبعاً لذلك توصل إلى نظرية تنص على:

"مجموع زوايا المثلث الداخلية تزيد عن قائمتين"

(٨.١) نظام هلبرت المسلماتي:

في نهاية القرن التاسع عشر ظهر هلبرت (١٨٦٢ ـ ١٩٤٧) David Hilbert ونشر كتاباً في عام ١٨٩٩ بعنوان أساسيات الهندسة. في هذا الكتاب تمكن هلبرت من صياغة نظام كامل من مسلمات الهندسة الإقليدية بمعنى قائمة من الفرضيات فيها يمكن الحصول على الموضوع الكلي لهذه الهندسة كنتيجة منطقية Logical sequence. مسلمات هلبرت وتحليل العلاقات المتبادلة بينها سوف نعرضها الآن بإيجاز كالآتي:

لدراسة نظام مسلمات هلبرت، دعنا نعتبر ثلاث مجموعات هي مجموعة النقاط points ومجموعة الخطوط lines ومجموعة المستويات planes. مجموعة كل

المجموعات السابقة تسمى فراغ. عناصر المجموعات السابقة ترتبط فيما بينها بعلاقات متبادلة يعبر عنها من خلال أدوات الربط الآتية: يقع lie، بين between، تطابق congruent. طبيعة العناصر في الفراغ والعلاقات المتبادلة بينها relationship تعتبر اختيارية كلية totally arbitrary.

عناصر المجموعات السابقة تحقق مجموعة من المسلمات وضعها هلبرت وقسمها إلى خمسة مجموعات هي :

المجموعة I: تسمى مجموعة الوقوع incidence وتحوي ثمان مسلمات تحدد العلاقات بين النقاط والخطوط والمستويات.

المجموعة II : تسمى مجموعة البينية betweenness وتحتوي على أربع مسلمات تحدد العلاقات بين نقطة على خط ونقطتين على نفس الخط.

المجموعة III: تسمى مجموعة التطابق congruence وتحوي خمس مسلمات تحدد تطابق القطع المستقيمة والأشكال المستوية.

المجموعة IV: تسمى مجموعة الاتصال continuity وتحوي مسلمتان وهما مسلمة ارشميدس Arshmeds وهي تعرف طول القطعة المستقيمة ومسلمة كانتور Cantor التي تعرف تقسيم القطعة المستقيمة إلى قطع أصغر منها.

المجموعة V : وهي عبارة عن مسلمة التوازي axiom of parallelism.

على العكس من أصول إقليدس فإن قائمة المسلمات الحديثة للهندسة الإقليدية لا تحتوي على وصف للأشكال الهندسية Geometrical figures ولكنها افترضت وجود ثلاث مجموعات من الأشكال هي النقاط والخطوط والمستويات والعلاقات بينها يجب أن تحقق متطلبات المسلمات.

يوجد سببان لمثل هذا التوجه نحو الهندسة والأشكال الهندسية:

(١) الهندسة تستخدم حقائق نشأت من الخبرة في الحياة (العالم الحقيقي) real world life حيث تأخذ في اعتبارنا بعض الخصائص للأشياء الحقيقية real objects بحيث لا تتعارض مع نظام المسلمات.

(٢) بعيداً عن الهندسة الإقليدية التي تستخدم خصائص الأشكال الهندسية يوجد نظم

هندسية مختلفة مثل هندسة لوباتشفيسكي وريمان والتي تعارض المفهوم العادي usual notion للفراغ ولهذا مفهوم الأشكال الهندسية نفسه يجب أن يكون أكثر عمومية ليغطي كل المجالات الضرورية.

(٩.١) الهندسة التحليلية: Analytic Geometry

مجموعات المسلمات (I-V) وأشكال الفراغات الهندسية كانت هي الأساس لظهور الهندسة التحليلية الكارتيزية Cartesian Analytic Geometry. وذلك باستخدام مسلمات الترتيب والوقوع والاتصال حيث أمكن إدخال نظام إحداثي coordinate system للخط المستقيم. وباستخدام الجبر والضرب (الجداء) الديكارتي للمجموعات أمكن إيجاد تناظر أحادي بين نقاط المستوى ونقاط الجداء الديكارتي $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ وبالتالي أمكن تكوين إحداثيات للمستوى وكذلك بالنسبة للفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

باستخدام المسلمة V وبالتالي النظرية الإقليدية للتوازي ونظرية تشابه الأشكال similarity of figures وخاصية نظرية فيثاغورث Theorem of Phytagoras يمكننا إعطاء تعريف المسافة distance بين نقطتين

$$M_1(x_1,y_1,z_1) \quad \text{and} \quad M_2(x_2,y_2,z_2)$$

بالدالة $d(M_1,M_2)$ حيث

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

والمستوى يعطى بمعادلة خطية في الإحداثيات (x,y,z) وهكذا بالنسبة لباقي مفردات الهندسة التحليلية في المستوى والفراغ والتي سبق أن درسها الطالب في الفرقة الأولى من التعليم الجامعي، أي أن الهندسة التحليلية هي دراسة الأشكال الهندسية باستخدام الجبر أي نظم الإحداثيات.

ملاحظة (١.١):

في الحقيقة يمكنك أن ترى بوضوح أن نظام هلبرت المسلماتي كامل complete أو تام بمعنى أنه من الممكن تطوير الهندسة بطريقة مرتبة منطقياً logical strictly order وحادة لا غموض فيها.

باستخدام مسلمات هلبرت أمكن صياغة مشكلة المسلمة الخامسة لإقليدس fifth postulate بالأسلوب الآتي :

بفرض مجموعة المسلمات الأربع I - IV، اشتق المسلمة V منهم (المسلمة V ناتج من نواتج المسلمات الأربع).

أيضاً نتيجة لوباتشفيسكي وهي:

المسلمة V ليست نتيجة لمجموعات المسلمات I - IV.

هذه النتيجة يمكن إعادة صياغتها كالآتي :

إذا لازم مجموعات المسلمات I-IV تقرير statement ينفي negating صحة truth المسلمة V، إذاً النتيجة لكل التقارير سوف تكون نظام متوافق منطقياً والذي يسمى الهندسة اللا إقليدية non-Euclidean geometry.

(١٠،١) الهندسة المحايدة (المطلقة) Absolute Geometry

نظام القضايا الناتج فقط من مجموعة المسلمات I - IV يسمى الهندسة المحايدة طبقاً لمفهوم بوي المجري J. Bolyais terminology. الهندسة المحايدة تعتبر القاسم (الجزء) المشترك common portion بين الهندسة الإقليدية واللاإقليدية لأن النتائج التي اثبتت بمساعدة مجموعات المسلمات I - IV تظل محققة بنفس الدرجة equality valid في كل من الهندسة الإقليدية وهندسة لوباتشفيسكي.

ملاحظة (٢،١):

النتائج التي لم تعتمد على مفهوم التوازي تعتبر نتائج في الهندسة المحايدة.

(١١،١) الهندسة والواقع اليومي: World Life Geometry

من العرض السابق يمكننا القول أن الفراغ الهندسي Geometrical space المعرف بنظام المسلمات هو مجموعة من الأشياء تسمى عناصر هندسية Geometric elements والعلاقات الطبيعية Natural relationships المتبادلة بينها تحقق متطلبات المسلمات للنظام المعطى. وهذا يعني أنه يمكن القول بأن:

الفراغ الإقليدي (فراغ لوباتشفيسكي) هو مجموعة من العناصر تحقق متطلبات مسلمات إقليدس (لوباتشفيسكي).

الفراغ الإقليدي نفسه يمكن أن يأخذ عدة أشكال تعتمد على نوعية الأشياء Concrete objects التي تمثل عناصره (بعيداً عن المفهوم العادي للنقطة والخط والمستوى) ونوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية :

مثال (١.١):

النقطة تمثل بكرة والخط يمثل بأسطوانة لانهائية والمستوى يمثل بالفراغ بين خطين مستقيمين متوازيين spatial layer.

والعلاقات الأساسية بين عناصر المثال السابق يمكن تعريفها بحيث تحقق نظام المسلمات الإقليدي كالآتي :

مثال (٢.١):

النقطة (الكرة) تقع على الخط المستقيم (الاسطوانة) إذا كانت مرسومة داخل الأسطوانة.

مثال (٣.١):

النقطة تقع على المستوى إذا كانت الكرة الممثلة للنقطة تمس الخطين المتوازيين المحددين للمستوى.

النظرة الشاملة للعناصر الهندسية والمسلمات الهندسية تمكننا من اختيار نظام المسلمات بدرجة اختيارية Degree of arbitrariness بحيث تتكيف مع كل مجال من مجالات الدراسة. بهذه الطريقة يمكن تطبيق نظام المسلمات للهندسة في مجالات أخرى غير الرياضيات مثل الفيزياء والميكانيكا وهذا يقودنا إلى الفراغات المجردة الحديثة حيث عناصرها مجموعات، دوال، تحويلات، ...

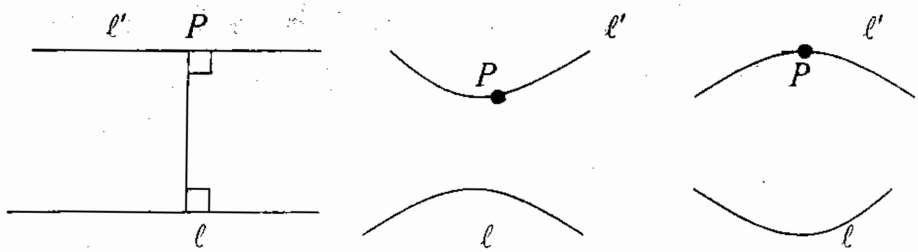
تطبيقات الهندسة بمفهومها العام كثيرة ومتعددة ونشير هنا إلى أن فراغ مانكوفيسكي Minkowski space، مثلاً يلعب دور هام في نظرية النسبية الخاصة Special Relativity. وعموماً فإن فكرة الفراغات المجردة Abstract spaces قد اكتملت بعد تنامي الرياضيات (الجبر الخطي والتحليل الدالي) في القرن التاسع عشر.

(١٢.١) الهندسة الإسقاطية: Projective Geometry

تقريباً في نفس الوقت الذي بدأ فيه لوباتشفيسكي دراساته عن نظرية التوازي Theory of Parallels وجاوس عمله عن نظرية السطوح، قفز نوع جديد من الهندسة وهو الهندسة الإسقاطية Projective Geometry، هذه الهندسة محكومة من خلال مفاهيم تصويرية Pictorial concepts وكانت في أول الأمر بعيدة عن مشاكل المسلمات المعقدة. ولكن في عام ١٨٧٥ أعطى فيلكس كلاين F. Klein (١٨٤٩ - ١٩٢٥) تاويل عام General Interpretation للأنظمة الهندسية لكل من إقليدس ولوباتشفيسكي وريمان وكانت مبنية على الهندسة الإسقاطية. دراسات كلاين كانت مرتبطة بشدة بمفهومة للهندسة على أنها دراسة اللامتغيرات Theory of invariants لزمرة معينة من التحويلات Group of Transformation. مدخل الزمر النظري Group-theoretic approach للهندسة تم وضعه بواسطة كلاين عام ١٨٧٢ والمسمى ببرنامج كلاين الموسع Erlangen Program.

هذا البرنامج مكن كلاين من إعطاء تصنيف لنظم الهندسة الهامة والتحويلات المرتبطة معها وكلها نتجت من الهندسة الإسقاطية أي أنه في برنامج كلاين الموسع تعتبر الهندسة الأسقاطية هي أم الهندسات المختلفة.

من خلال تعرضنا للمواضيع المختلفة في هذا الكتاب نبين انه توجد ثلاثة أنواع من الفراغات ثلاثية البعد وذات الإنحناء الثابت هي الفراغ الإقليدي البديهي اليومي Intutive every day لإقليدس والفراغات اللاإقليدية (جاوس وبرترامي - بوي - لوباتشفيسكي) وتسمى الفراغات الزائدية Hyperbolic Spaces والفراغات الريمانية أو الناقصية Elliptic Spaces ومنها الهندسة الكروية ذات البعدين Spherical Geometry كما هو موضح في شكل (١.١).



هندسة ناقصية　　هندسة زائدية　　هندسة إقليدية

شكل (١.١): التوازي في الهندسات الثلاث

(١٣.١) الهندسة التفاضلية:

النظرة الحديثة للفراغ الهندسي تشكلت بتوسع عندما تطورت الهندسة التفاضلية Differential Geometry وفي عام ١٨٢٧ توصل جاوس إلى مجموعة من الخصائص الخاصة بالسطوح والتي شكلت الهندسة الذاتية أو الداخلية Intrinsic Geometry للسطوح. هذه الهندسة هي دراسة الخواص التي يمكن ملاحظتها عن طريق ملاحظ observer بواسطة قياسات Measurements على السطح نفسه مثل الأطوال، المساحات والزوايا، وكان منشأ هذه الهندسة هو الهدف العملي من عملية مسح الأرض Land-Surveying ، وخلاف ذلك فإنها تسمى الهندسة الخارجية Extrinsic Geometry.

ظهرت في عام ١٨٦٨ نتائج أعمال بلترامي (١٨٣٥-١٤٠٠) Eugenio Beltrami والتي فسر فيها الهندسة اللاإقليدية Interpretation of non-Euclidean Geometry كالآتي:

"هندسة لوباتشفيسكي المستوية يمكن اعتبارها، تحت شروط معينة، هندسة ذاتية لبعض السطوح".

وهذا مكنه من أن يجعل الهندسة اللاإقليدية المستوية والهندسة المستوية الإقليدية تقع ضمن مجال حقيقي كامل كجزء من نظرية السطوح Theory of Surfaces.

النقاط المشتركة في الدراسات المسلماتية The Axiomatic Investigation للوباتشفيسكي بطرق جاوس للهندسة التفاضلية استخدمت في حالة البعدين ولكن في

هذه الفترة كان مستوى الرياضيات عال جداً بحيث أمكن تطبيق طرق الهندسة التفاضلية في الهندسة اللاإقليدية.

ففي عام ١٨٥٤ عرف ريمان فراغات كانت تعميم Genearization للفراغات الإقليدية واللاإقليدية Lobachevskian Geometry هذه الفراغات المعممة لريمان Riemannian Generalized Spaces تختلف في خواصها عن الفراغات الإقليدية مثل اختلاف أي سطح منحني Curved Surface عن المستوى.

الدراسة التحليلية البحتة التي طبقها ريمان في دراسة المشاكل الهندسية مكنته من تعميم مفهوم الانحناء Curvature مباشرة للحالات متعددة الأبعاد Multidimensional Cases وفراغات ريمان المعممة أصبحت مفيدة للفيزياء النظرية Theoretical physics (النسبية العامة).

ملاحظة (٢.١):

موضوعات هذا الكتاب تركز على التحويلات بين الفراغات وخصوصاً التحويلات الهندسية أي التي تتعامل مع صور الأشكال الهندسية حيث نبدأ بالتحويلات في شكلها العام وبعدها التحويلات الخطية والأنواع المختلفة من التحويلات الهندسية (حركات المستوى والفراغ) والتحويلات الأفينية والأسقاطية والتحويلات الحافظة للزوايا.

تمارين (١)

(١) أعط تعريفاً لكل من :

(i) هندسة إقليدس.

(ii) هندسة لوباتشفيسكي.

(iii) هندسة ريمان.

(٢) مسلمة التوازي لعبت دور هام في تصنيف الهندسات ـ وضح ذلك؟.

(٣) ماذا نعني بالهندسة الذاتية (الداخلية)؟

(٤) اشرح برنامج كلاين الموسع لتصنيف النماذج الهندسية.

(٥) وضح بمثال كيف أن نوعية العناصر الهندسية للفراغ تختلف من فراغ إلى آخر بحيث تتوافق مع نظام المسلمات في الفراغ.

(٦) وضح القصور في هندسة إقليدس.

(٧) وضح أن الفراغ المجرد هو صلب التطبيق في الحياة.

(٨) وضح كيف فسر بلترامي الهندسة اللاإقليدية.

(٩) هل الهندسة الإسقاطية نظام مسلماتي؟

(١٠) وضح معنى استقلالية مسلمة التوازي؟

(١١) أذكر فرضيات ارشميدس ووضح كيف أنها عالجت القصور في أصول إقليدس.

(١٢) أذكر مسميات الفراغات ثلاثية البعد ذات الانحناء الثابت موضحاً مسلمة التوازي في كل منها من خلال الأشكال.

(١٣) الهندسة الإسقاطية أم الهندسات ـ وضح ذلك؟