الباب الخامس عشر

زمرة التناظرات Permutations Group

يحتوي هذا الباب على زمرة التبديلات وزمرة الأشكال الهندسية.

(١.١٥) زمرة التبديلات:

سبق أن عرفنا التحويل الهندسي أو باختصار التحويل على أنه راسم تناظر أحادي من المستوى X إلى المستوى Y.

تعريف (١.١٥):

زمرة التحويلات من مجموعة X إلى نفسها هي مجموعة S غير خالية من التحويلات مع عملية تحصيل التحويلات بحيث تحقق:

(i) fg and $gf \in S$, $\forall f, g \in S$

(ii) $(fg)h = f(gh)$, $\forall f, g, h \in S$

(iii) يوجد عنصر وحيد $I \in S$ يحقق $If = fI = f$, $\forall f \in S$

(iv) يحقق $ff^{-1} = f^{-1}f = I$ لأي $f \in S$ يوجد عنصر وحيد f^{-1}

تعريف (٢.١٥):

راسم التناظر الأحادي من مجموعة S إلى نفسها يقال أنه تحويل transformation وفي حالة ما إذا كانت المجموعة S محدودة فإن التحويل يسمى تبديلة permutation.

التعريف السابق يمكن صياغته بصورة أخرى كالآتي:

تعريف (٣.١٥):

راسم التناظر الأحادي من مجموعة محدودة غير خالية مكونة من r من العناصر المختلفة إلى نفسها يسمى تبديلة من درجة r.

وإذا كانت $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ فإننا نرمز للتبديلة $f : S \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} S$ بالشكل

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

حيث $a_i \in S$ ، $b_i = f(a_i) \in S$.

ملاحظة (١.١٥):

إذا كانت S مجموعة محدودة مكونة من r عنصر فإن مجموعة كل التبديلات على المجموعة S تسمى المجموعة المتماثلة symmetric set ويرمز لها بالرمز S_r.

ملاحظة (٢.١٥):

إذا كان S عدد عناصرها r فإن عدد عناصر S_r يساوي $r!$

مثال (١.١٥):

إذا كانت $S=\{a_1,a_2,a_3\}$ أوجد المجموعة المتماثلة S_3.

الحل:

مجموعة كل تبديلات الدرجة الثالثة على S تحتوي على $3!=6$ عناصر وتعطى من

$$f_1=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$f_3=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$f_5=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

تعريف (٤.١٥):

إذا كان $f\ ,\ g\in S_n$ فإننا نعرف تحصيل f، g على أنه راسم تناظر أحادي

$$(f\circ g)(x)=f(g(x)),\quad \forall x\in S$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)),\quad \forall x\in S$$

أي أن:

$$f\circ g\ ,\ g\circ f : S\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}S$$

وبالتالي فهي تعرف تبديلة تنتمي إلى S_n.

مثال (٢.١٥):

نفرض أن لدينا التبديلات f, g على المجموعة $S=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ حيث

$$f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$$

أوجد $f\circ g$ ، $g\circ f$.

الحل :

نقوم بحساب $f\circ g$ ، $g\circ f$ لكل العناصر باستخدام التعريف السابق كالآتي :

$$(g\circ f)(a_1)=g(f(a_1))=g(a_3)=a_4$$

بالمثل فإن

$$(f\circ g)(a_1)=f(g(a_1))=f(a_2)=a_1$$

وهكذا بالنسبة لباقي العناصر ويمكن كتابة التحصيل على الصورة:

$$g\circ f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, f\circ g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

واضح أن $f\circ g\neq g\circ f$

ملاحظة (٣.١٥):

من السهل كتابة $f\circ g$ على الصورة

$$f\circ g=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

نظرية (١.١٥):

المجموعة S_n مع عملية تحصيل التبديلات تكون زمرة محدودة (منتهية) ورتبتها $r!$.

البرهان:

(i) من تعريف التبديلة على أنها راسم تناظر أحادي من المجموعة S إلى نفسها نجد أن $g\circ f\in S_n$ لكل $f,g\in S_n$ وذلك من تعريف تحصيل الرواسم. إذاً عملية تحصيل التباديل مغلقة.

(ii) خاصية الدمج محققة لأنها محققة عموماً في الرواسم.

(iii) العنصر المحايد موجود وهو راسم الوحدة على S_n ، أي هو

$$I = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

وتسمى تبديلة الوحدة.

(iv) لأي تبديلة $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ معكوسها هو

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

والذي يحقق $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ أي أن التبديلة قابلة للعكس حيث أنها راسم تناظر أحادي. إذاً S_n زمرة محدودة ورتبتها $r\,!$ (عدد عناصرها).

(٢.١٥) زمرة الأشكال الهندسية (زمرة التناظرات أو التماثلات)

Symmetric group (group of geometric transformation)

نفرض أن π هو المستوى الإقليدي، $X \subset \pi$ مجموعة من نقاط المستوى π . العنصر $\alpha \in A(\pi)$ يسمى ترتيبة لـ X إذا كانت α راسم فوقي من X إلى X، حيث $A(\pi)$ هي مجموعة كل الرواسم على π أي

$$A(\pi)=\{\alpha:\ \pi \to \pi\}$$

مجموعة كل هذه الرواسم تسمى تحويلات للمجموعة الجزئية X من المستوى π بالتحويلات الهندسية والتي ننظر إليها من وجهة نظر الهندسة على أنها تبديلة على نقاط المجموعة X أي راسم تناظر أحادي من X إلى نفسها.

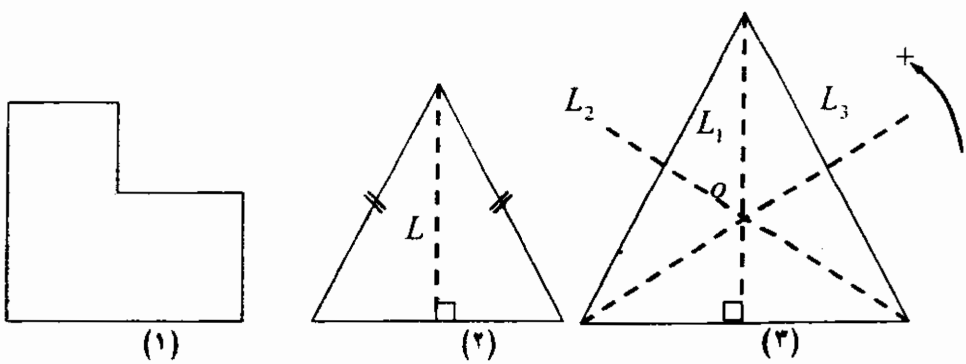
ويمكن التأكد من أن مجموعة التحويلات الهندسية تكون زمرة مع عملية تحصيل الرواسم.

وعرف كلاين Klein الهندسة على أنها دراسة خواص الفراغ (المجموعة) التي تبقى لا تغيرية invariant تحت تأثير زمرة جزئية من زمرة التحويلات الهندسية. فمثلاً مجموعة كل التحويلات الهندسية التي تحافظ على المسافة بين النقاط preserves distance تكون زمرة جزئية تسمى زمرة التساوي القياس (التقايسات) isometric group ومنها أمكن تعريف الهندسة الإقليدية على أنها دراسة الخواص التي تظل لا تغيرية تحت تأثير زمرة التساوي القياس. ومن أمثلة هذه الزمر. زمرة الانتقالات translations وزمرة الانعكاسات Reflections وزمرة الدورانات Rotations.

في الهندسة الإقليدية، التساوي القياسي يدرس التساويات القياسية لمجموعة من النقاط إلى نفسها. التساوي القياسي من هذا النوع يسمى حركة motion إذاً الهندسة الإقليدية تعني دراسة حركات المستوى الكارتيزي $\mathbb{R}^2$ ومن هذه الحركات للمستوى plane motions الانتقال والدوران والانعكاس والانعكاس الانزلاقي.

مثال (٢.١٥):

حدد مجموعة الترتيبات (التبديلات) لكل من المضلعات المبينة في شكل (١.١٥)



شكل (١.١٥)

أولاً: نلاحظ أن راسم الوحدة e على π هو ترتيبة لأي مجموعة جزئية X من π. أي أن مجموعة الترتيبات على أي مجموعة X ليست خالية.

نفرض أن T_1, T_2, T_3 هي مجموعات الترتيبات (التبديلات) للمضلعات الثلاث السابقة، على الترتيب. نلاحظ أن المضلع (٢) هو مثلث متساوي الساقين والمضلع (٣) مثلث متساوي الأضلاع.

(١) T_1 تتكون من عنصر واحد فقط $T_1 = \{e\}$

(٢) T_2 تتكون من عنصرين على الصورة $T_2 = \{e, \lambda\}$

λ هو انعكاس المثلث حول المستقيم L (المتوسط).

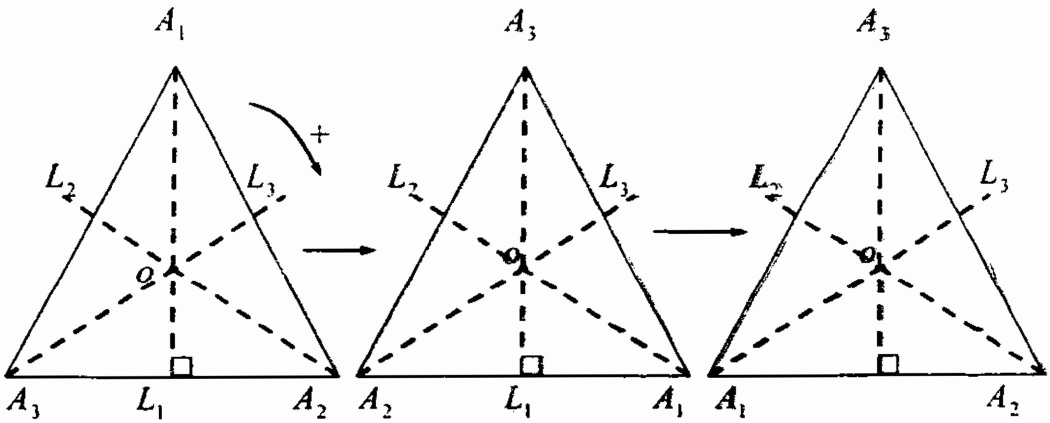
(٣) T_3 تتكون من 6 عناصر $T_3 = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

حيث σ_1 هي دوران المثلث حول النقطة o بزاوية 120^0 في اتجاه عقارب الساعة، σ_2 هي دوران المثلث حول النقطة o بزاوية 240^0 في اتجاه عقارب الساعة، λ_1 انعكاس المثلث حول المستقيم L_1، λ_2 انعكاس المثلث حول المستقيم L_2، λ_3 انعكاس المثلث حول المستقيم L_3.

مثال (٤.١٥):

ادرس النظام $(T_3, \circ)$ حيث T_3 هي المجموعة المعرفة في المثال السابق، $(\circ)$ هي عملية تركيب (تحصيل) الرواسم.

المخطط التالي (شكل (٢.١٥)) يوضح تأثير الدوران σ_1 متبوعاً بالانعكاس λ_1 على المضلع (٣).



شكل (٢.١٥)

لاحظ أن L_1, L_2, L_3 مستقيمات ثابتة في المستوى وهي متوسطات المثلث المتساوي الأضلاع. من هذا الرسم يتضح أن $\sigma_1 \circ \lambda_1 = \lambda_2$.

لاحظ أن النقطة o هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث المتساوي الأضلاع وأن أي نقطة على خط الإنعكاس لا تتغير صورتها بالإنعكاس.

بالمثل يمكن تكوين جميع حواصل الضرب (التحصيل) الممكنة للترتيبات الست للمضلع

(٣) ونكون الجدول التالي الذي يبين نواتج التحصيل.

o	e	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	λ_3
e	e	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	λ_3
σ_1	σ_1	σ_2	e	λ_2	λ_3	λ_1
σ_2	σ_2	e	σ_1	λ_3	λ_1	λ_2
λ_1	λ_1	λ_3	λ_2	e	σ_2	σ_1
λ_2	λ_2	λ_1	λ_3	σ_1	e	σ_2
λ_3	λ_3	λ_2	λ_1	σ_2	σ_1	e

من الجدول نلاحظ أن T_3 مغلقة بالنسبة لعملية تركيب (تحصيل) الرواسم، e هو عنصر الوحدة وكل عنصر له معكوس. وحيث أن عملية تركيب الرواسم دامجة فإن T_3 تكون زمرة مع هذه العملية.

يمكن كتابة الترتيبات السابقة بكتابة رؤوس المثلث كما يلي :

$$e=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_1 \end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_3 & A_2 \end{pmatrix}, \lambda_2=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \lambda_3=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_1 & A_3 \end{pmatrix}$$

فإذا رمزنا للرؤوس بالرموز 3 ,2 ,1 بدلاً عن A_1, A_2, A_3 نحصل على :

$$e=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \lambda_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وبالتالي يمكن ملاحظة أن $T_3=S_3$ وهي مجموعة متماثلة من درجة 3.

نظرية (٢.١٥):

نفرض أن X مجموعة جزئية من المستوى الاقليدي. المجموعة S_X المكونة من جميع الترتيبات على X تكون زمرة مع عملية تركيب الرواسم وتسمى زمرة الترتيبات على X

البرهان:

واضح أن $S_X \neq \phi$ حيث $e \in S_X$. نفرض $f_1, f_2 \in S_X$ وكل من f_1, f_2 راسم فوقي من X إلى X. إذاً

$$f_1 f_2(X) = f_1(f_2(X)) = f_1(X) = X$$

أي أن $f_1 f_2$ راسم فوقي من X إلى X إذاً $f_1 f_2 \in S_X$.

نفرض أن $f \in S_X$، إذاً $f \in A(\pi)$. لذلك f يكون لها معكوس $f^{-1} \in A(\pi)$. ولكن

$$X = e(X) = f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(X)$$

أي أن f^{-1} راسم فوقي من X إلى X وبالتالي فإن $f^{-1} \in S_X$.

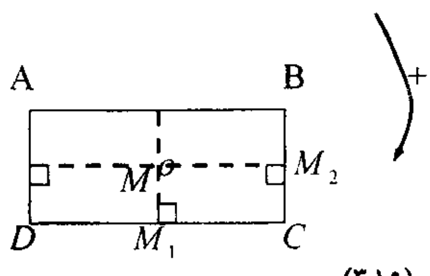
وبهذا نكون قد توصلنا إلى نهاية البرهان.

ملاحظة (٤.١٥):

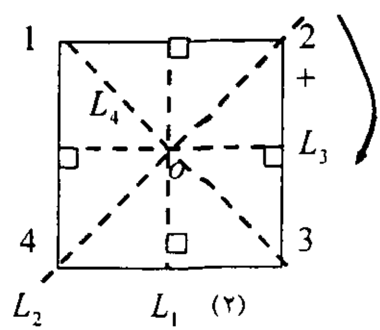
زمرة الترتيبات (التبديلات) لأي شكل هندسي غير متماثل تتكون عادة من عنصر واحد. واضح أيضاً أن الشكل الأكثر تماثلاً تكون له زمرة ترتيبات ذات رتبة أكبر من رتبة زمرة الترتيبات للشكل الأقل تماثلاً.

مثال (٥.١٥):

أوجد رتبة زمرة التبديلات لكل من المستطيل والمربع.



(١)



(٢)

شكل (٣.١٥)

أولاً : المستطيل $ABCD$ له أربع ترتيبات (شكل (٣.١٥) (١)).

e الدوران حول M في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 0^o .

σ الدوران حول M في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 180^o.

λ_1 الانعكاس حول المستقيم M_1 .

λ_2 الانعكاس حول المستقيم M_2 .

أي أن زمرة الترتيبات للمستطيل من رتبة 4.

ثانياً : نفرض أن D هي مجموعة كل الترتيبات للمربع 1234 (شكل (٣.١٥) (٢))

إذاً $$D_4=\{e,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}$$

حيث

e الدوران حول o في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 0^o،

σ_1 الدوران حول o في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 90^o،

σ_2 الدوران حول o في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 180^o،

σ_3 الدوران حول o في اتجاه عقارب الساعة بزاوية 270^o،

λ_1 الانعكاس حول المستقيم L_1،

λ_2 الانعكاس حول المستقيم L_2،

λ_3 الانعكاس حول المستقيم L_3،

λ_4 الانعكاس حول المستقيم L_4.

لاحظ أن $|D_4|=8$

من الأمثلة السابقة يمكننا صياغة النظرية الآتية:

نظرية (٣.١٥):

مجموعة تماثلات (تناظرات) مثلث متساوي الأضلاع equilateral تكون زمرة تحويلات.

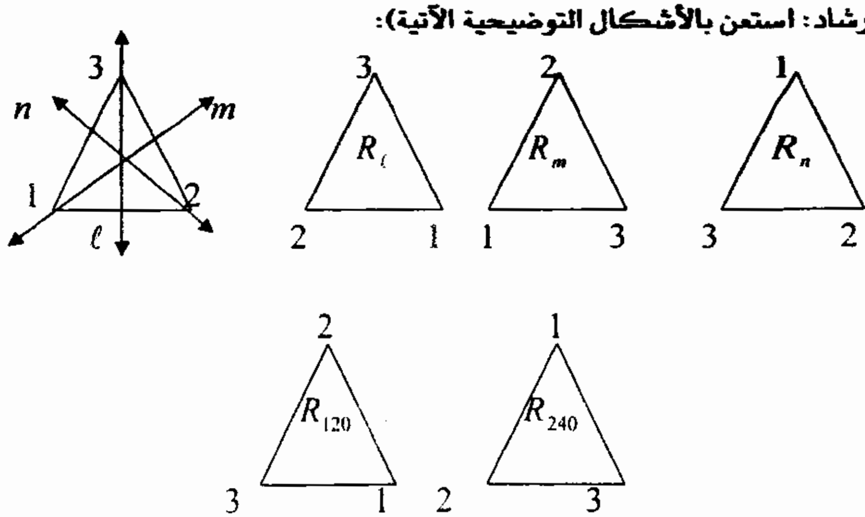
تمارين (١٥)

(١) أكمل الجدول الآتي الخاص بزمرة التماثلات لمثلث متساوي الأضلاع:

o	I	R_ℓ	R_m	R_n	R_{120}	R_{240}
I	I	R_ℓ	R_m	R_n	R_{120}	R_{240}
R_ℓ	R_ℓ	I	R_{120}	R_{240}	R_m	R_n
R_m	R_m	R_{240}	I			
R_n	R_n	R_{120}		I		
R_{120}	R_{120}	R_n		R_{240}		
R_{240}	R_{240}	R_m				R_{120}

حيث R_ℓ, R_m, R_n هي انعكاسات في الخطوط المستقيمة ℓ, m, n على الترتيب و R_{240} ، R_{120} هي دورانات حول المركز المتوسط centroid بزوايا مقياسها 120, 240 على الترتيب ضد عقارب الساعة counter clockwise و I تحويل التطابق (الوحدة) Identity ، o عملية (دالة) تحصيل التحويلات function composition.

(إرشاد: استعن بالأشكال التوضيحية الآتية):



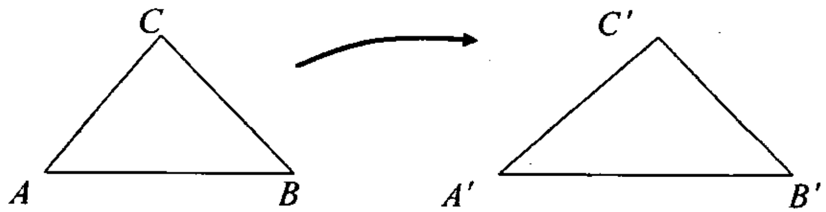
(٢) بين أن مجموعة كل الانتقالات في المستوي تكون زمرة تحويلات.

(٣) بين أن مجموعة كل الدورانات حول نقطة ثابتة تكون زمرة تحويلات.

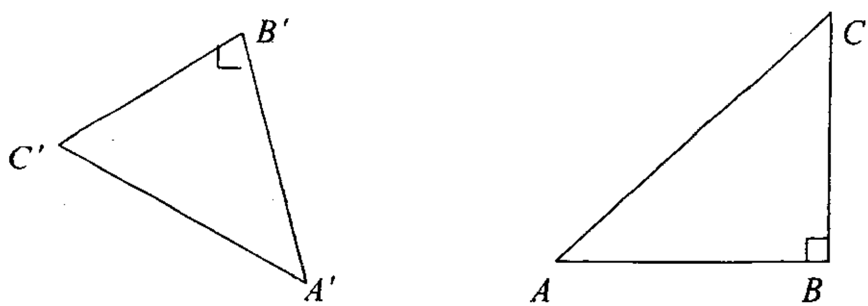
(٤) هل مجموعة الانعكاسات حول نفس الخط تكون زمرة تحويلات.

(٥) بين أن الانعكاس يعكس الاتجاه.

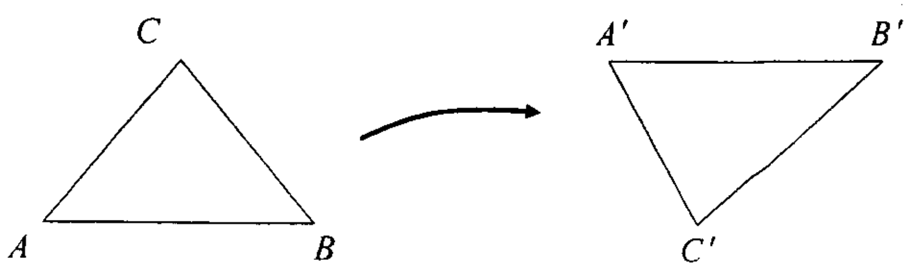
(٦) حدد الحركة التي تنقل المثلث ABC إلى المثلث $A'B'C'$ كما هو موضح في الشكل



(٧) حدد الحركة التي تنقل ΔABC إلى $\Delta A'B'C'$ كما هو موضح في الشكل



(٨) حدد نوع الحركة التي تنقل المثلث ΔABC إلى $\Delta A'B'C'$ كما هو موضح في الشكل



(٩) ادرس نوع التحويل الهندسي في $\mathbb{R}^2$ حيث

$$T:\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

هل مجموعة التحويلات من هذا النوع تكون زمرة تحويلات.

(١٠) بين أن مجموعة التحويلات من النوع

$$T:\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ a\in\mathbb{R}\ ,\ b\in\mathbb{R}^{+}$$

تكون زمرة تحويلات.