الباب الثالث عشر

تمثيل التحويلات الهندسية من خلال تحويلات خطية

Geometric and Linear Transformation

نتعرض في هذا الباب لتطبيقات التحويلات الخطية في المستوى الاقليدي ونركز على التحويلات المشهورة التي قدمناها في الأبواب السابقة، مثل الدوران والانعكاس والتمدد والتقلص (مغير البعد) والقص وعلاقتها بالعمليات الأولية والتحويلات الخطية (أنظر الباب الثالث والسابع).

(١٫١٣) تحويل الدوران Rotation

لتكن θ زاوية ثابتة وليكن $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ تحويل خطي مصفوفته A حيث

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

إذا كان

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

عندئذ

$$T(\vec{V}) = A\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

يمكن ملاحظة هذا هندسياً باعتبار $T(\vec{V})$ هو المتجه الناتج من دوران $\vec{V}$ بزاوية مقدارها θ . لبيان ذلك نفرض أن ϕ هي الزاوية بين $\vec{V}$ والاتجاه الموجب لمحور X وليكن $\vec{V}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ المتجه الناتج من دوران المتجه $\vec{V}$ بزاوية θ . سوف نثبت أن

$$\vec{V}' = T(\vec{V})$$

لذلك نفرض أن r طول $\vec{V}$ وعليه فإن

$$x = r\cos\phi \ , \ y = r\sin\phi$$

أي أن (r,ϕ) هي الإحداثيات القطبية لرأس المتجه V. وبالمثل لما كان معيار $\vec{V}'$ هو نفس معيار $\vec{V}$ (الدوران تساوٍ قياسي) نحصل على

$$x' = r\cos(\theta+\phi) \ , \ \ y' = r\sin(\theta+\phi)$$

عندئذ

$$\vec{V}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\phi) \\ r\sin(\theta+\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= A(\theta)\vec{V} = T(\vec{V}) \ , \ A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

يطلق على هذا التحويل الخطي تدوير $\mathbb{R}^2$ بزاوية θ أو تحويل الدوران بزاوية θ وأن المصفوفة $A(\theta)$ هي مصفوفة الدوران بزاوية θ وهي مصفوفة عمودية (محددها يساوي الوحدة ومعكوسها A^{-1} يحقق $A^t = A^{-1}$).

ملاحظة (١،١٤):

الدوران تحويل خطي عمودي معرف بالمصفوفة $A(\theta)$ (يحافظ على الأطوال والزوايا).

حالات خاصة للدوران:

لقيم مختلفة لزاوية الدوران θ نحصل على دورانات مختلفة لها أوضاع خاصة فمثلاً:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \ , A(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \theta = \pi \ , \ A(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2}, A(\tfrac{3\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = 2\pi, A(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وفي الحالة العامة تحويل الدوران الذي مركزه نقطة أصل إحداثيات المستوى $\mathbb{R}^2$ وزاويته θ يكتب على الصورة

$$R_o(\theta) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$$

حيث

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وبوضع $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ نحصل على الدورانات الخاصة السابقة.

(٢.١٢) الإنعكاس Reflection

الإنعكاس حول مستقيم ما يمر بنقطة الأصل هو تحويل ينقل كل نقطة من المستوى إلى صورتها بواسطة مرآة على المستقيم وعليه فإن أي نقطة $p(x, y)$ صورتها بالإنعكاس في الخط المستقيم L تكون $p'(x', y')$ بحيث يتحقق pp' عمودي على L وأن L ينصف القطعة المستقيمة pp' ، ومن معادلة الخط المستقيم يمكن الحصول على الصورة (x', y') .

ملاحظة (٢.١٣):

يمكن إثبات أن الإنعكاس تحويل خطي وذلك من خلال إثبات أن الإنعكاس يعرف من خلال مصفوفة.

إن أهم الإنعكاسات في المستوى هي حول محوري الإحداثيات والمستقيمات $y = \pm x$ ومن تعريف الإنعكاس نحصل على مصفوفات التحويل كالآتي:

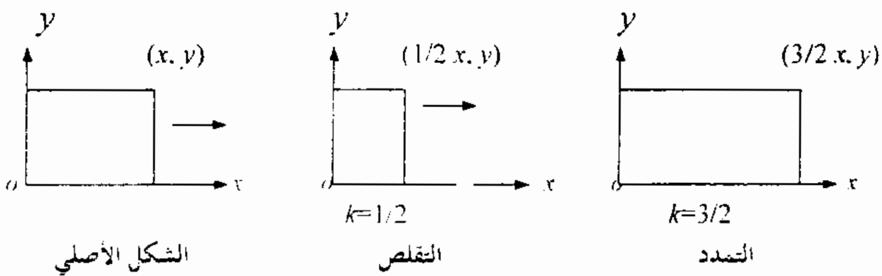
مصفوفة الإنعكاس بواسطة المحور y هي $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الإنعكاس بواسطة المحور x هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الإنعكاس بواسطة المستقيمات $y = \pm x$ هي $A = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$

(٢،١٣) مغير البعد (التمدد والتقلص) Expansions and Compressions

إذا ضرب الإحداثي x لكل نقطة في المستوى بعدد ثابت k موجب عندئذ يكون التأثير تمدد أو تقلص لكل شكل في المستوى باتجاه محور x. إذا كان $0 < k < 1$ تكون النتيجة انكماش وإذا كانت $k > 1$ تؤدي إلى التمدد. نطلق على تأثير كهذا تمدد أو تقلص باتجاه محور x بعامل k وإذا ضرب الإحداثي y لكل نقطة بعدد ثابت موجب k نحصل على تمدد أو تقلص باتجاه محور y بعامل k كما هو موضح في شكل (١٣ـ١). مثل هذا النوع من التحويلات ينتمي إلى تحويل هندسي يسمى مغير البعد equiform اي أن أبعاد الشكل تتغير بهذا التحويل.



شكل (١٣ـ١)

لإيجاد مصفوفة التمدد أو التقلص باتجاه محول x بعامل k. نفرض أن $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويل باتجاه محور x بعامل k. عندئذ

$$T(\vec{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

وبذلك تكون مصفوفة التحويل T على الصورة

$$A = \begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

وبالمثل تكون مصفوفة مغير البعد (التمدد أو التقلص) باتجاه محور y بعامل k هي

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$$

ملاحظة (٣.١٣):

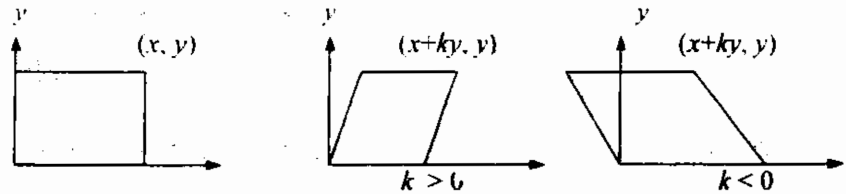
مغير البعد (التمدد أو التقلص) تحويل خطي معرف من خلال مصفوفة مغير البعد. وتطبيقاته كثيرة في الهندسة المدنية وخصوصاً في علوم المواد.

ملاحظة (٤.١٣):

رأينا في الباب السابع أن التحويل الخطي بين الفراغات المحدودة البعد يعرف مصفوفة وكل مصفوفة محدودة تعرف تحويل خطي.

(٤.١٤) القص Shears

يعرف القص باتجاه محور x بعامل k بأنه تحويل يحرك كل نقطة $P(x, y)$ باتجاه يوازي محور x بمقدار ky إلى الموقع الجديد $Q(x + k y, y)$. بهذا التحويل سوف لا تتحرك نقاط محور x لأن الإحداثي الثاني $y = 0$ بينما النقاط البعيدة عن محور x سوف تتحرك مسافة أكثر من النقاط القريبة من محور x كما هو موضح بالشكل (٢.١٣).



شكل (٢.١٣)

القص باتجاه محور y بعامل k هو تحويل يحرك كل نقطة (x, y) مسافة kx باتجاه يوازي محور y إلى الموقع الجديد $(x, y + k x)$. بهذا التحويل تبقى نقاط محور y في مواقعها دون تغيير لأن إحداثيها الأول $x = 0$ أما النقاط البعيدة عن محور y سوف تتحرك مسافة أكثر من النقاط القريبة من محور y.

يمكن إثبات أن القص هو تحويل خطي ، فإذا كان

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

هو قص بمعامل k في اتجاه محور x ، عندئذ

$$T(e_1)=T(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ T(e_2)=T(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$$

وبذلك تكون مصفوفة القص T باتجاه محور x هي $\begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}$

وبالمثل مصفوفة القص باتجاه محور y بمعامل k هي $\begin{bmatrix}1 & 0\\k & 1\end{bmatrix}$.

ملاحظة (٥،١٣):

القص تحويل خطي معرف من خلال مصفوفة القص.

مثال (١،١٣):

(i) أوجد تحويل خطي من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ معرف على انه محصلة قص بعامل 3 باتجاه محور x ثم انعكاس حول $y=x$،

(ii) أوجد تحويل خطي من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}^2$ معطى بمحصلة انعكاس حول المستقيم $y=x$ ثم قص بعامل 3 باتجاه محور x.

الحل:

(i) مصفوفة القص بمعامل $k=3$ هي $A_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$ ومصفوفة الإنعكاس في المستقيم $y=x$ هي $A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

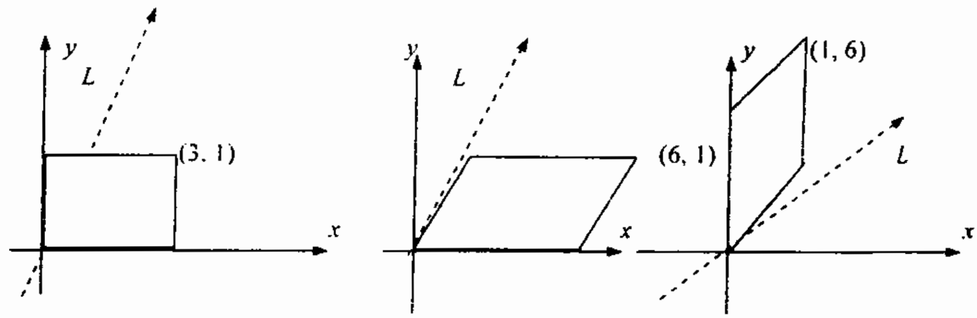
ومصفوفة تحصيل العمليتين (القص ثم الإنعكاس) هي

$$A_2A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$$

(ii) بالمثل مصفوفة الإنعكاس ثم القص هي

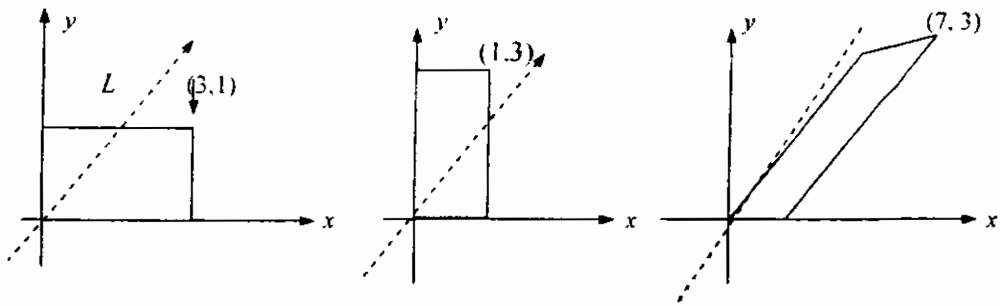
$$A_1A_2=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

من (i)، (ii) نجد أن $A_2A_1 \neq A_1A_2$ لذلك فإن تأثير القص ثم الإنعكاس يختلف عن تأثير الإنعكاس ثم القص ويمكن ملاحظة الفرق من شكل (٣.١٣)، (٤.١٣).



الإنعكاس بالمستقيم $L : y = x$ — القص باتجاه محور x بعامل $k = 3$ — الشكل الأصلي

شكل (٣.١٣)



القص باتجاه محور x بعامل $k = 3$ — الإنعكاس بالمستقيم $L : y = x$ — الشكل الأصلي

شكل (٤.١٣)

نظرية (١.١٣):

إذا كان $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويل معرف بمصفوفة قابلة للإنعكاس A. عندئذ تأثير T هندسياً هو نفس تأثير متتالية من القصات والتمددات والتقلصات والإنعكاسات.

البرهان:

لما كانت A مصفوفة قابلة للإنعكاس ويمكن تحويلها إلى مصفوفة محايدة بمتتابعة منتهية من العمليات الصفية الأولية (أنظر الباب الثالث).

لذلك توجد مصفوفات أولية $E_1, E_2, \ldots, E_k$

بحيث $E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I$

وبعمليات عكسية نجد أن:

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I$$

أي أن $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$

إن هذه العلاقة تعطي A بدلالة مصفوفات أولية لأن معكوس مصفوفة أولية هو مصفوفة أولية أيضاً. عمليات الضرب في مصفوفة أولية هو أحد التحويلات الهندسية المشهورة ومثال ذلك:

١ـ التمدد باتجاه محور x يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٢ـ التمدد باتجاه محور y يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

٣ـ الإنعكاس بالمحور y يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٤ـ الإنعكاس بالمحور x يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

٥ـ الإنعكاس بالمحور $y = x$ يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

٦ـ القص باتجاه المحور x يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

٧ـ القص باتجاه المحور y والذي يكافئ الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

عندئذ تاثير T ينتج من هذه التاثيرات الهندسيه المتتالية. وبهذا يتم البرهان.

مثال (٢.١٣):

اكتب المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ بدلالة مصفوفات أولية ثم صف هندسياً تأثير الضرب بالمصفوفة A بدلالة قصات وتمددات وانعكاسات.

الحل:

يمكن تحويل المصفوفة A إلى المصفوفة المحايدة كالآتي :

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_2]{}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_1]{}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

إن العمليات الصفية المتتالية يمكن إنجازها بالضرب من اليسار بالمصفوفات

$$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

إن هذه المصفوفات متولدة من إجراء تحويلات A ذاتها على المصفوفة المحايدة I_2 عندئذ يكون

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

وحيث أن

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=A_4A_3A_2A_1$$

نجد أن تأثير المصفوفة A يكافئ تأثير العمليات المتتالية الآتية :

١. القص باتجاه محور x بعامل 2 من خلال التحويل T_1 المناظر للمصفوفة A_1.

٢. التمدد باتجاه محور y بعامل 2 من خلال التحويل T_2 المناظر للمصفوفة A_2.

٣. الإنعكاس بواسطة محور x من خلال التحويل T_3 المناظر للمصفوفة A_3.

٤. القص باتجاه محور y بعامل 3 من خلال التحويل T_1 المناظر للمصفوفة A_4.

أي أن التحويل الخطي T المناظر للمصفوفة A يأخذ الصورة

$$T = T_4 T_3 T_2 T_1$$

مثال (٣.١٣):

أوجد صورة الخط المستقيم $L:\ y = -4x + 3$ تحت تأثير التحويل الخطي الذي مصفوفته $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

الحل:

معكوس المصفوفة A هو $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

فإذا كانت $P'(x', y')$ نقطة على صورة المستقيم، يجب أن تحقق

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

لذلك فإن (بالضرب)

$$x = -2x' + 3y'$$

$$y = -3x' + 4y'$$

ثم نعوض في معادلة المستقيم المعطاة $y = -4x + 3$ ينتج

$$-3x' + 4y' = -4(-2x' + 3y') + 3$$

$$11x' - 16y' + 3 = 0$$

وبذلك فإن صورة المستقيم $y = -4x + 3$ بواسطة التحويل A هي

$$L':\ y' = \frac{11}{16}x' + \frac{3}{16}\ .$$

واضح أن صورة الخط المستقيم L هو خط مستقيم L' حيث ميل الخط L' موجب بينما ميل الخط L سالب (خواص التحويلات الخطية في الباب السابع).

مثال (٤.١٣):

أوجد صورة المربع الذي رؤوسه $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ بالتحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حيث $X \to AX$ ، $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل:

صورة النقطة الأولى $P_1(0,0)$ تعطى من:

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن الصورة هي $P_1'(0,0)$ أي نقطة الأصل ثابتة fixed point بالنسبة لهذا التحويل.

ثم صورة $P_2(1,0)$ هي

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن الصورة هي $P_2'(-3,0)$ وهكذا بالنسبة لبقية رؤوس المربع تكون صورها

$$P_3'(0,1),\ P_4'(-3,1)$$

شكل (٥.١٣)

أي أن صورة المربع في الربع الأول من المستوى هو مستطيل في الربع الثاني من المستوى بحيث عرض المستطيل يساوي طول ضلع المربع.

مثال (٥.١٣):

أوجد مصفوفة التحويل $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ التي تحول النقطة $P(x,y,z)$ إلى

(i) معكوسها بالنسبة للمستوى xy

(ii) معكوسها بالنسبة للمستوى xz

(iii) معكوسها بالنسبة للمستوى yz

الحل:

(i) لما كان $T(x,y,z)=(x,y,-z)$ فإن مصفوفة التحويل هي

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وتعرف انعكاس في المستوى xy .

وهكذا بالنسبة للإنعكاس (ii) حيث

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالنسبة للإنعكاس (iii) تكون

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٦.١٣):

أعط تاويل هندسي للتحويلات الخطية في المستوى.

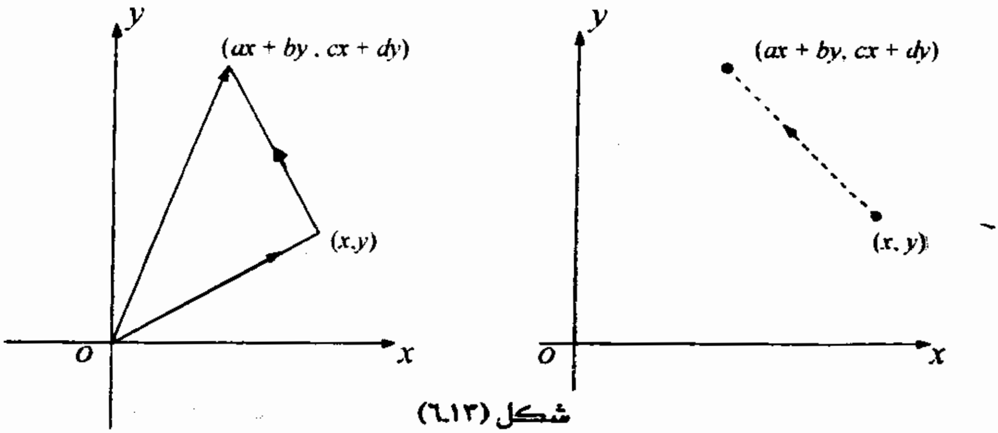
الحل:

إذا كان $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويلاً خطياً مصفوفته

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فإن
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

يمكن النظر إلى عناصر المصفوفات إما مركبات متجهات أو إحداثيات نقاط كما في الشكل الآتي:



شكل (٦،١٣)

ملاحظة (٦،١٣):

التحويل الخطي في مثال (١٣ـ٤) يسمى مغير البعد equiform حيث أنه غير الأبعاد في اتجاه محاور الإحداثيات.

مثال (٧،١٣):

أوجد $\cos(90+\theta)$ باستخدام مصفوفة الدوران.

الحل:

نفرض متجه وحدة بدايته عند النقطة o ويصنع زاوية θ مع محور السينات فتكون نقطة نهاية المتجه هي $M=(\cos\theta,\sin\theta)$ فإذا دار المستوى $\mathbb{R}^2$ بزاوية 90° فإن صورة M تصبح $M'=(\cos(90+\theta), \sin(90+\theta))$. إذاً

$$M'=R_o(\tfrac{\pi}{2})M=\begin{pmatrix} \cos(90+\theta) \\ \sin(90+\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

إذاً

$$\cos(90+\theta)=-\sin\theta\ ,\ \sin(90+\theta)=\cos\theta$$

مثال (١٣-٨):

برهن أن تحصيل دورانين حول نفس النقطة هو دوران.

الحل:

نفرض أن الدوران حول نقطة الأصل O وزاويته θ_1 ضد عقارب الساعة وأن صورة (x, y) بهذا الدوران هي (x_1, y_1). إذاً

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ونفرض أن الدوران الثاني حول نقطة الأصل O وزاويته θ_2 ضد عقارب الساعة وأن صورة (x_1, y_1) بهذا الدوران هي (x_2, y_2). إذاً

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

من $(1), (2)$ ينتج أن

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ضرب مصفوفات وعلاقات مثلثية)

وهذه العلاقة تمثل دوراناً زاويته $(\theta_1 + \theta_2)$ أي أن تحصيل دورانين حول نقطة الأصل هو دوران حول نفس النقطة.

مثال (١٣-٩):

أثبت أن تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين هو دوران.

الحل:

نأخذ محوري الانعكاس هما محور السينات ومستقيم L يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية θ مع محور السينات.

نفرض أن صورة $A = (x, y)$ بعد الانعكاس بالنسبة لمحور السينات هي

$A_1 = (x_1, y_1)$. إذاً

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ونفرض أن صورة $A_1 = (x_1, y_1)$ بعد الانعكاس في المستقيم L الذي يصنع زاوية θ مع محور السينات هي $A_2 = (x_2, y_2)$ (من الباب السادس).

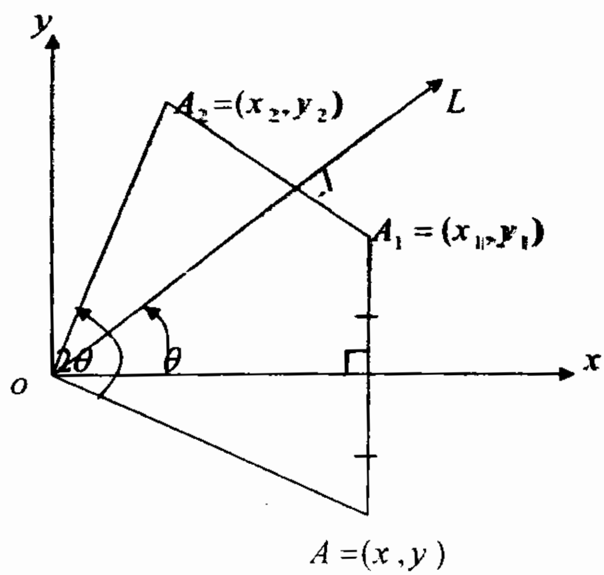
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

من (2) ,(1) ينتج أن:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

وهذا يمثل دوراناً حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها 2θ ويمكن التأكد من ذلك حيث $\left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{oA_2}\right|$ ، ومقياس زاوية AoA_2 يساوي 2θ كما هو موضح في شكل (٧.١٣)



شكل (٧.١٣)

مثال (١٠.١٣):

أثبت أن

(i) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

(ii) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

الحل:

بما أن مصفوفة الدوران بزاوية صفر هي $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (دوران الوحدة).

وإذا فرض أن f_a, f_b دورانين مقياسهما (زاويتهما) a, b على الترتيب حول نقطة الأصل فإن:

$$R_o(a):\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos b\end{pmatrix}$$

$$R_o(b):\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos b&-\sin b\\\sin b&\cos b\end{pmatrix}$$

$$R_o(a+b):\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos(a+b)&-\sin(a+b)\\\sin(a+b)&\cos(a+b)\end{pmatrix}$$

وبما أن تحصيل دورانين $R_o(a)$ ، $R_o(b)$ حول نفس مركز الدوران o هو دوران زاويته $a+b$ حيث $R_o(a+b)=R_o(b)\,.\,R_o(a)$ اي أن

$$\begin{pmatrix}\cos(a+b)&-\sin(a+b)\\\sin(a+b)&\cos(a+b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos b&-\sin b\\\sin b&\cos b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a&-\sin a\\\sin a&\cos b\end{pmatrix}$$

ضرب المصفوفات وتساوي المصفوفات نحصل على المتطابقات المثلثية المعروفة وهي:

(i) $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

(ii) $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

مثال (١١.٢):

باستخدام المصفوفات أثبت أن f_L^2 راسم محايد حيث f_L انعكاس في المستقيم L.

الحل:

نفرض أن المستقيم L يصنع زاوية γ مع محور السينات وبما أن

$$f_L:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}$$

$$\therefore f_L^2:\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\gamma & \sin 2\gamma\\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cos^2 2\gamma+\sin^2 2\gamma & 0\\ 0 & \sin^2 2\gamma+\cos^2 2\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

مثال (١٢.١٣):

أوجد مصفوفة التحويل لكل من:

(أ) انعكاس في محور السينات ثم دوران زاويته 30° ومركزه نقطة الأصل.

(ب) انعكاس في محور الصادات ثم دوران زاويته 60° ومركزه نقطة الأصل.

(جـ) انعكاس في المستقيم $y=x$.

(د) دوران زاويته 45° ومركزه نقطة الأصل ثم انعكاس في المستقيم $y=-x$.

الحل:

(أ) مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور السينات هي $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

مصفوفة الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 30° هي $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$.

$\therefore$ مصفوفة التحويل المطلوبة هي (حاصل ضرب المصفوفتين):

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & \frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12\\ \frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}$$

(ب) مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور الصادات هي $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

مصفوفة الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 60° هي $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore$ مصفوفة التحويل المطلوبة هي:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(جـ)، (د) يتركا تمارين للطالب.

تمارين (١٣)

(١) أثبت أن تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين هو دوران.

(٢) أوجد مصفوفة التحويل لكل من:

(أ) دوران زاويته 30° مركزه نقطة الأصل متبوعاً بانعكاس في المستقيم $y = x$

(ب) انعكاس في الخط المستقيم $y = -x$.

(جـ) دوران زاويته 180° مركزه نقطة الأصل متبوعاً بانعكاس في الخط المستقيم $y = -x$.

(٢) أوجد صورة الخط المستقيم $5x - 4y + 2 = 0$ تحت تأثير المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(٤) أوجد صورة القطع الناقص $\frac{(x-5)^2}{6} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1$ تحت تأثير المصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(٥) أوجد صورة الخط المستقيم $y = mx + c$ بالدوران بزاوية $\frac{\pi}{4}$.

(٦) بالدوران $R_o(\frac{\pi}{4})$ اثبت أن المعادلة $xy = 1$ هي قطع زائد قائم.

(٧) بدوران المحاور بزاوية $\frac{\pi}{4}$ أوجد الحل الهندسي الذي تمثله المعادلة $x^2 + xy + y^2 = 1$.

(٨) أوجد $\cos(2\pi + \theta), \cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$.

(٩) أثبت صحة المتطابقات الآتية باستخدام تحويل الدوران

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta,\ \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta,\ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta,\ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

(١٠) باستخدام التحويلات الخطية (الدوران) أو المصفوفات، اثبت أن

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

(١١) أوجد معكوس مصفوفة الدوران العكسي (معكوس الدوران) وبين أن

$$R_o^{-1}(\theta) = R_o(-\theta)$$

(١٢) أوجد مصفوفة التحويل الناتج عن تحصيل دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ ثم بدوران زاويته $\frac{\pi}{4}$ في نفس الاتجاه ولهما نفس المركز o.

(١٣) أثبت أن دوران المستوى بزاوية حادة حول نقطة الأصل في اتجاه ضد عقارب الساعة تحويل خطي وأوجد مصفوفة التحويل.

(١٤) أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطي $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ الذي يرسم أي متجه $v=(x,y)$ إلى:

(i) انعكاسه بواسطة محور x

(ii) انعكاسه بواسطة المستقيم $y=x$

(iii) انعكاسه بواسطة نقطة الأصل.

(iv) مسقطه العمودي على محور x

(١٥) أوجد مصفوفة المؤثر الخطي $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ الذي يرسم المتجه $v=(x,y,z)$ إلى:

(i) انعكاسه بواسطة مستوى xy

(ii) انعكاسه بواسطة مستوى xz

(iii) انعكاسه بواسطة المستوى yz.

(١٦) أوجد المصفوفة المعتادة للمؤثر الخطي $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ الذي:

(i) يدور كل متجه زاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x.
(بالنظر إلى أسفل محول z الموجب في اتجاه نقطة الأصل).

(ii) يدور كل متجه زاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور x.
(بالنظر من أعلى محور x الموجب في اتجاه نقطة الأصل)

(iii) يدور كل متجه زاوية 90° عكس اتجاه عقارب الساعة حول محور y.
(بالنظر من أعلى محور y الموجب في اتجاه نقطة الأصل).