الباب الثاني عشر

التحويلات التآلفية Affine Transformations

نقدم في هذا الباب نوع من الهندسات يسمى الهندسة التآلفية affine geometry وهي هندسة أكثر عمومية من الهندسة الإقليدية وأقل عمومية من الهندسة الإسقاطية ونقدم كذلك التحويلات التآلفية في الفراغ التآلفي.

(١.١٢) الهندسة التآلفية Affine Geometry

الهندسة التآلفية هي هندسة لا تحتوي على أي مفهوم لنقطة الأصل origin وكذلك الطول والزاوية ولكن تحتوي على مفهوم طرح النقاط لتعرف متجه. إنها تحتل مكان متوسط intermediate بين الهندسة الإقليدية والهندسة الإسقاطية. إنها هندسة الفراغ التآلفي Affine space الذي هو فراغ جزئي من الفراغ الإسقاطي كما نرى في الجزء (٢.١٢).

الهندسة التآلفية يمكن شرحها على أنها هندسة المتجهات، لا تحتوي على أي مفاهيم للطول والزاوية. الفراغ التآلفي يختلف أو يميز عن الفراغ الاتجاهي الذي له نفس البعد dimension بإهمال forgetting نقطة الأصل o. أي أن الفراغ التآلفي هو فراغ المتجهات الحرة free vectors كما كان يطلق عليها في المراجع القديمة.

مما سبق يتضح مدى قرب close الهندسة التآلفية من الجبر الخطي وغالباً لا يمكن فصلهما isolated.

الآن نحن بصدد تعريف واضح للفراغ التآلفي affine space من خلال ثلاث مفاهيم متوافقة consistent معاً كالتالي:

١. الفراغ التآلفي هو مكمل لنقاط اللانهاية points at infinity في الفراغ الإسقاطي.
٢. الفراغ التآلفي هو الفراغ المصاحب للهندسة التآلفية.
٣. الفراغ التآلفي يعرف من خلال الفراغ الاتجاهي.

ونوضح ذلك فيما يلي:

لاحظ أن ارتباطات combinations المتجهات $u - v$ لا تتغير بانتقال (u يتحرك في اتجاه ما بينما v- تتحرك في الاتجاه الأخر). هذا الارتباط يمكن النظر إليه على أنه ارتباط خطي من المتجهات بشرط مجموع المعاملات يساوي الصفر. وهذا يبين لنا أن الفراغ التآلفي هو فراغ اتجاهي مع عمليات الطرح subtractions والضرب في عدد قياسي scalar multiplications.

(١.١.١٢) التراكيب الخطية: Linear Combinations

١. بالنسبة لمجموعة المتجهات $V = \{u\}$ فإن $\alpha u, u + v$ يسمى تركيب خطي وفي الحالة العامة فإن

$$\sum_i \alpha_i u_i$$

يسمى تركيب خطي من المتجهات u_i بحيث لا يوجد قيد على المعاملات α_i.

التحويل الخطي T يعرف كما يلي:

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \quad , T(\alpha u) = \alpha u$$

وفي الحالة العامة فإن التحويل الخطي T يعرف بالعلاقة

$$T\left(\sum_i \alpha_i u_i\right) = \sum_i \alpha_i T(u_i)$$

٢. بالنسبة لمجموعة النقاط $P = \{p_i\}$ فإن $p_1 + u = p_2$ وهذا معناه أن أي نقطة مضافة (مجموعة) إلى متجه تكون النتيجة نقطة.

(٢.١.١٢) التراكيب التآلفية: Affine Combinations

طرح النقاط: point subtraction

$p_1 - p_2$ تعني متجه $u \in V$ بحيث $p_1 = p_2 + u$ للنقاط $p_1, p_2 \in P$ وفي الحالة العامة (by extension) $\sum_i \alpha_i p_i$ يكون متجه إذا كان وكان فقط $\sum_i \alpha_i = 0$

دمج النقاط point blending

$P = (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2$ تعني $P = p_1 + \lambda(p_2 - p_1)$ حيث $p \in P$.

بأسلوب أخر فإننا نكتب

$$P = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \; , \; \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

في الحالة العامة فإننا نقول أن $\sum_i \alpha_i p_i$ نقطة إذا كان $\sum_i \alpha_i = 1$

هندسياً Geometrically

للنقطة $P = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ فإن النسبة الآتية تتحقق

$$\frac{|P-p_1|}{|P-p_2|} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ ,\ \lambda_1+\lambda_2 = 1$$

إذا كانت P تقسم القطعة المستقيمة $\overline{p_1 p_2}$ بنسبة $b_2 : b_1$ فإن

$$P = \frac{b_1 p_1 + b_2 p_2}{b_1 + b_2}\ ,\ b_1 + b_2 \neq 0$$

مما سبق عرضه يمكن الوصول إلى النتائج التالية:

١. في التراكيب الاتجاهية $\sum_i \alpha_i u_i$ لا توجد أي شروط على المعاملات أي أن المتجهات تشكل من أي تراكيب (تراكيب خطية)

٢. التراكيب النقطية $\sum_i \alpha_i p_i$ تعطي نقطة (تركيب تآلفي) إذا كان وكان فقط $\sum_i \alpha_i = 1$ ، وتعطي متجه (تركيب اتجاهي) إذا كان وكان فقط $\sum_i \alpha_i = 0$

مثال (١،١٢):

المعنى الهندسي للمعادلة البارامترية للخط المستقيم في الفراغ التآلفي يعطى من:

نفرض أن L خط مستقيم نقاطه $L(t)$ معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} L(t) &= p_1 + t\,(p_2 - p_1) \\ &= (1-t)\,p_1 + t\,p_2\ ,\ p_1, p_2 \in P \end{aligned}$$

حيث الأوزان weights $t,\ 1-t$ تعرف ارتباط تآلفي وتكون النتيجة نقطة على الخط المستقيم L.

(٢،١،١٢) التحويلات التآلفية: Affine Transformations

نفرض أن A_1, A_2 فراغان تآلفيان وأن $T : A_1 \longrightarrow A_2$ راسم (تحويل) يقال أن T تحويل تآلفي إذا تحقق:

١. T يرسم المتجهات إلى متجهات والنقاط إلى نقاط.

٢. T تحويل خطي على المتجهات

٣. $T(P+u)=T(P)+T(u)$

في الحالة العامة فإن T يحافظ على التراكيب التآلفية بالنسبة للنقاط أي أن

$$T\left(\sum \alpha_i p_i\right)=\sum_i \alpha_i T(p_i)$$

حيث

$$\sum_i \alpha_i = \begin{cases} 1 & , \quad \text{تركيب تآلفي (نقطة)} \\ 0 & , \quad \text{تركيب اتجاهي (متجه)} \end{cases}$$

ملاحظة (١.١٢):

التحويلات التآلفية ترسم الخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة أي أن

$$T((1-t)p_o+t\,p_1)=(1-t)T(p_o)+t\,T(p_1)$$

ملاحظة (٢.١٢):

التحويلات التآلفية تحفظ النسب للمسافات على الخط المستقيم والعكس صحيح بمعنى أنه إذا كان التحويل يحفظ النسب للمسافات على خط مستقيم فإن التحويل تآلفي.

مثال (٢.١٢):

تحويل الحركة المتماسكة (محصلة دوران وانتقال) rigid body motion ومغير البعد والقص والانعكاس كلها تحويلات تآلفية.

(٤.١.١٢) الفرق بين التحويل الخطي والتالفي: Affine vs Linear

١. التحويل T خطي إذا تحقق

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$$

لكل القيم α,β في الحقل F

التحويل T تآلفي إذا تحقق

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$$

إذا كان $\alpha+\beta=1$

٢- إذا كان T تحويل خطي حيث

$$T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v),\ \alpha+\beta=1$$

إذاً T يكون تآلفي.

٣- إذا كان T تحويل تآلفي، $\alpha+\beta\neq 1$ إذاً $T(\alpha u+\beta v)$ قد لا تساوي $T(\alpha u+\beta v)$ وبالتالي فإنه من الممكن أن تكون T تآلفي ولكن ليست خطي.

٤- التحويلات التآلفية أكثر عمومية super class من التحويلات الخطية.

٥- بطريقة أخرى فإن سلوك التحويلات الخطية مقيد بالنسبة لمدى أوسع من القيم α,β ولتوضيح ذلك نعتبر $T(\alpha u+\beta v)$:

١- سلوك التحويلات الخطية يتحدد لجميع القيم α,β.

٢- سلوك التحويلات التآلفية يتحدد فقط عندما $\alpha+\beta=1$. وتسلك سلوك مختلف للقيم الأخرى للمقدار $\alpha+\beta$.

٣- جميع التحويلات التي درسناها في الأبواب السابقة كانت خطية.

٤- تحويل الانتقال هو الوحيد غير خطي ولكنه تآلفي.

(٥.١.١٢) صور النقاط والمتجهات بالتحويلات التآلفية:

نفرض أن A_1,A_2 فراغان تآلفيان بعد كل منهما يساوي 2، و $T:A_1\longrightarrow A_2$ تحويل تآلفي ونفرض أن F_1,F_2 إطارات للفراغات A_1,A_2 على الترتيب حيث

$$F_1=(u_1,u_2,O_1),\ F_2=(v_1,v_2,O_2)$$

ونفرض نقطة $P=p_1u_1+p_2u_2+1O_1$ في الفراغ A_1 حيث $(p_1,p_2,1)$ هي إحداثيات P بالنسبة للإطار F_1. ونقوم بحساب الإحداثيات $(p'_1,p'_2,1)$ للنقطة $T(p)$ بالنسبة للإطار F_2.

التحويل التآلفي يتحدد تماماً عن طريق صورة الإطار F_1 كالآتي:

إذا كان

$$T(u_1) = t_{11}v_1 + t_{12}v_2$$
$$T(u_2) = t_{21}v_1 + t_{22}v_2 \qquad (*)$$
$$T(O_1) = t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + O_2$$

إذاً

$$T(P) = T(p_1u_1 + p_2u_2 + O_1)$$
$$= p_1T(u_1) + p_2T(u_2) + T(O_1) \qquad (**)$$

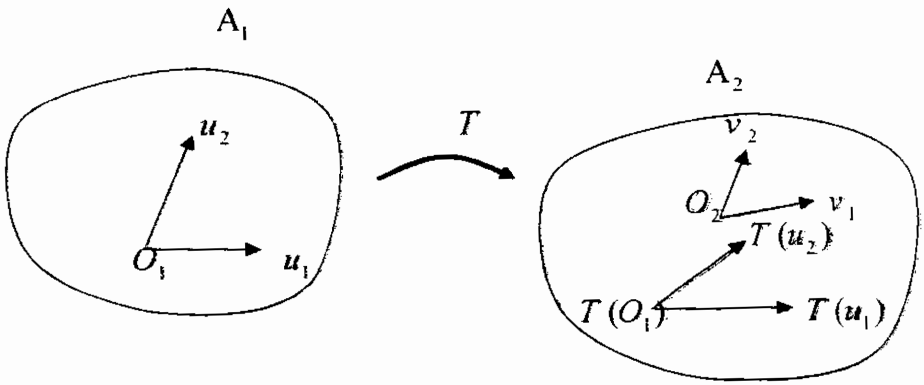
بالتعويض من (*) في (**) وتجميع الحدود المتشابهة نحصل على :

$$T(P) = p_1'v_1 + p_2'v_2 + O_2$$

حيث

$$p_1' = p_1t_{11} + p_2t_{21} + t_{31}$$
$$p_2' = p_1t_{12} + p_2t_{22} + t_{32}$$

كما هو موضح في شكل (١٢.١).



شكل (١٢.١)

(٦.١.١٢) مصفوفة التحويل التآلفي:

تمثل النقاط والمتجهات بمصفوفات $n \times 1$ وعلى سبيل المثال في المستوى التآلفي فإن

$$P \equiv \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونعلم أن الإحداثيات تتحدد بالنسبة لإطار ما وليكن $F = (u_1, u_2, 0)$. إذاً

$$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= F\,p$$

بالنسبة للتحويلات التآلفية نجد أن:

$$T(P) = T(F_1 P) = [T(u_1)\ T(u_2)\, T(O_1)] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [t_{11}v_1 + t_{12}v_2, t_{21}v_1 + t_{22}v_2, t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + O_2] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [v_1\, v_2\, O_2] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{31} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= F_2 M_T\, P = F_2 P'$$

حيث

$$P' = M_T\, P$$

$$M_T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{31} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة M_T تسمى مصفوفة التحويل التآلفي T بالنسبة للإطارات F_1 ، F_2 وبالتالي نجد أن النقطة P تحولت إلى النقطة $P' = M_T\, P$ ويمكن استنتاج هذا من العلاقة المصفوفية $F_1 = F_2 M_T$.

المصفوفة M_T يمكن وصفها كما يلي:

العمودي الأول في M_T يمثل $T(u_1)$ في F_2 ، العمود الثاني في M_T يمثل $T(u_2)$ في F_2 ، العمود الثالث في M_T يمثل $T(O_1)$ في F_2 .

(٢.١٢) التحويلات التالفية والهندسة الإسقاطية:

في المستوى الإسقاطي P_2 نأخذ مستقيم عند اللانهاية ويسمى مستقيم في اللانهاية أو المستقيم المثالي ideal line or line at infinity ويرمز له بالرمز ∞ ونتيجة لما سبق عرضه يمكن إثبات النظرية الآتية:

نظرية (١.١٢):

مجموعة كل الإسقاطيات projectivities والمتشاكلة ذاتياً بالنسبة للخط ∞ (ترسم الخط ∞ إلى نفسه) تكون زمرة جزئية من زمرة الإسقاطيات.

تعريف (٢.١٢):

الزمرة الجزئية في النظرية السابقة تسمى الزمرة التآلفية affine group ويرمز لها بالرمز $AfG(2,R)$ وأي تحويل ينتمي إليها يسمى تحويل تآلفي affine transformation.

ملاحظة (٣.١٢):

التحويلات التآلفية ترسم النقاط المحددة من المستوى الإسقاطي (نقاط ليست على الخط ∞) إلى نقاط محددة. أي أنها تحويلات تناظر أحادي من المستوى الإسقاطي محذوف منه الخط ∞ (المستوى المثقوب).

تعريف (٣.١٢):

المستوى الإسقاطي بدون خط اللانهاية ∞ يسمى مستوى تآلفي affine plane.

لإيجاد التمثيل التحليلي للتحويلات التآلفية نختار خط اللانهاية ∞ ممثل بالمعادلة $x_3 = 0$ وأن صورته $x'_3 = 0$ (بمعنى أن الخط $x_3 = 0$ رسم إلى نفسه). ومن التحويل (11.1) فإنه من الضروري والكافي أن تنعدم المعاملات c_{31}, c_{32}.

إذاً التحويلات التآلفية تعطى بالتمثيل الآتي:

$$
\begin{aligned}
\rho' x'_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 \\
\rho' x'_2 &= c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + c_{23} x_3 \\
\rho' x'_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad c_{33} x_3
\end{aligned}
\tag{12.1}
$$

بما أن لكل النقاط المحددة تكون $x_3 \neq 0$ فإن كل مستوى التآلفي يمكن تمثيله بإحداثيات غير متجانسة $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$.

واضح من التمثيل (12.1) أنه لا معنى لاستخدام الإحداثيات المتجانسة في دراسة الزمرة التآلفية وذلك واضح بقسمة كل من المعادلات الأولى والثانية على المعادلة الثالثة في (12.1) ويوضع $x_1'/x_3' = x'$, $x_2'/x_3' = y'$ ، $c_{i1}/c_{33} = a_i$, $c_{i2}/c_{33} = b_i$, $c_{i3}/c_{33} = c_i$ في التمثيل الناتج فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned} \qquad (12.2)$$

أو التمثيل المصفوفي

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (12.3)$$

التحويل في (12.3) يكون تحويل تآلفي إذا كان

$$Det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

خلاف ذلك فإن التحويل ليس أحادي.

وبما أن التحويلات (12.3) تحتوي على ست بارامترات فإن الزمرة التآلفية هي زمرة 6 ـ البارامترية 6-parameter group.

تعريف (١٢.٤):

هندسة الزمرة التآلفية تسمى الهندسة التآلفية affine geometry.

تعريف (١٢.٥):

الهندسة التآلفية هي دراسة الخواص اللاتغيرية invariants للأشكال والكميات المرتبطة بها والتي لا تتغير تحت تأثير الزمرة التآلفية.

توجد فروق واضحة بين الهندسة التآلفية والهندسة الإسقاطية ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٢.١٢):

في الهندسة الإسقاطية أي خطين يتقاطعا ولكن في الهندسة التآلفية توجد خطوط متوازية. وهذا واضح لأن الخطوط في المستوى الإسقاطي P_2 تتقاطع في نقطة على خط اللانهاية ∞. وهذه الخاصية تتحول إلى توازي الخطوط في المستوى التآلفي عندما المستوى الإسقاطي يستبعد منه خط اللانهاية (النقطة المشتركة (نقطة التقاطع) تحذف بعد استبعاد خط اللانهاية).

مما سبق يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية (٢.١٢):

مسلمة التوازي الإقليدية محققة في الهندسة التآلفية.

ملاحظة (٤.١٢):

لاحظ أنه كما هو معروف على الخط الإقليدي فإن الترتيب الخطي linear ordering للنقاط محقق على الخط التآلفي affine line.

بما أن التحويلات التآلفية هي في الأصل تحويلات إسقاطية بمعنى أن الزمرة التآلفية هي زمرة جزئية من الزمرة الإسقاطية ولهذا فإنه إذا كانت خاصية لاتغيرية بالنسبة للإسقاطيات تظل لاتغيرية بالنسبة للتحويلات التآلفية. وعلى العكس من ذلك توجد لا تغيرات تآلفية affine invariants وليست لاتغيرات إسقاطية projective invariants.

تعريف (٦.١٢):

لأي ثلاث نقاط $M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ M_3(x_3,y_3)$ تقع على خط مستقيم في المستوى التآلفي collinear فإننا نعرف النسبة البسيطة simple ratio لثلاث نقاط $[M_1\ M_2\ M_3]$ بالصيغ الآتية:

$$[M_1\ M_2\ M_3]=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}\quad \text{or}\quad [M_1\ M_2\ M_3]=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}\qquad (12.4)$$

نظرية (٣.١٢):

النسبة البسيطة لثلاث نقاط على خط مستقيم كمية لاتغيرية بالنسبة للزمرة التآلفية.

البرهان:

نفرض أن M_1', M_2', M_3' صور لثلاث نقاط M_1, M_2, M_3 (ليست مستقيمة) من خلال التحويلات التآلفية (12.3).

نفرض أن (x_i', y_i') هي إحداثيات النقاط M_i' ، $i = 1, 2, 3$. ومن (12.3) والتعويض في تعريف النسبة البسيطة (12.4) فإننا نحصل على

$$[M_1', M_2', M_3'] = \frac{x_2' - x_1'}{x_3' - x_2'}$$

حيث

$$\begin{aligned} x_3' - x_2' &= a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2) \\ x_2' - x_1' &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) \\ &= [M_1 M_2 M_3]\{ a_1(x_3 - x_2) + b_1(y_3 - y_2)\} \end{aligned}$$

إذاً

$$[M_1' M_2' M_3'] = [M_1 M_2 M_3]$$

وهذا يعني أن الدالة $[M_1 M_2 M_3]$ لا تغيرية تحت أي تحويل تآلفي، وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

من هذه النظرية نجد أنه لا توجد نقاط لاتغيرية موضوعة بطريقة اختيارية في المستوى التآلفي (ليست على خط واحد). وهذا سببه أن التحويلات التآلفية تنقل أي ثلاث نقاط ليست مستقيمة إلى ثلاث نقاط ليست مستقيمة. ومن تعريف النسبة التبادلية لأربع نقاط في المستوى الإسقاطي رأينا أنه لا توجد أربع نقاط لاتغيرية موضوعة بطريقة اختيارية في المستوى الإسقاطي وهذا يوصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (٤،١٢):

لا يوجد في الزمرة التآلفية ثلاث نقاط اختيارية لاتغيرية.

تعريف (٧،١٢):

النسبة البسيطة $[M_1 M_2 M_3]$ لثلاث نقاط مستقيمة في المستوى التآلفي تسمى اللاتغيري الأساسي basic invariant للزمرة التآلفية.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هل يمكن تعريف المستوى التآلفي (الهندسة التآلفية) بطريقة مستقلة تماماً عن الهندسة الإسقاطية؟

الإجابة نعم يمكن عن طريق نظام مناسب من المسلمات ونوضح ذلك فيما يلي:

مسلمات الهندسة التآلفية :

نعني بالمستوى التآلفي affine plane مجموعة عناصر من نوعين وهي النقاط والخطوط المستقيمة والتي تحقق خمس مجموعات من المسلمات تفصيلها كالآتي :

(١) المجموعة الأولى تعرف علاقة الوقوع incidence بين العناصر وتحتوي على أول ثلاث مسلمات في المجموعة **I** من نظام المسلمات الإقليدية.

(٢) المجموعة الثانية تعرف ترتيب النقاط على خط وهي نفسها المجموعة **II** من مسلمات الهندسة الإقليدية (بما أن الترتيب الخطي للنقاط محقق على الخط التآلفي affine line فإن مسلمات البينية betweeness تنطبق على مسلمات البينية الإقليدية).

(٣) المجموعة الثالثة تحتوي على مسلمة ديدكند للأتصال.

(٤) المجموعة الرابعة تحتوي على مسلمة إقليدس للتوازي.

(٥) المجموعة الخامسة تحتوي على نظرية ديسارجيس Desargue's theorem هذه النظرية تم تعديلها لتتلائم مع حقيقة أن التوازي موجود في الهندسة التآلفية.

مما سبق عرضه فإنه يمكننا القول بأن الهندسة التآلفية تم تعريفها من خلال نظام مسلماتي مستقل تماماً عن الهندسة الإسقاطية وفي هذا النظام تتحقق كل مسلمات الهندسة الإقليدية (سواءً في بعدين أو ثلاث أبعاد) فيما عدا مسلمات التطابق axioms of congruence.

(٣.١٢) الهندسة التآلفية أحادية المقاس Unimodular Affine Geometry

تعريف (٨.١٢):

التحويل التآلفي (12.3) يسمى أحادي المقاس unimodular إذا تحقق:

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1 \qquad (12.5)$$

نظرية (١٢ـ٥):

مجموعة التحويلات التآلفية أحادية المقاس تكون زمرة.

البرهان:

من الجبر الخطي نجد أن :

(١) من خواص المحددات والمصفوفات نجد أنه إذا كانت مصفوفة حاصل ضرب مصفوفتين فإن محددها يساوي حاصل ضرب محددات المصفوفتين. ولهذا يمكن إثبات أن ضرب تحويلين تآلفين أحادي المماس هو تحويل تآلفي أحادي المقاس.

(٢) معكوس تحويل تآلفي أحادي المقاس هو تحويل تآلفي أحادي المقاس حيث أنه تحويل تآلفي فإن محدد مصفوفة معكوس التحويل هي مقلوب محدد مصفوفة التحويل التآلفي وإذا كان المحدد يساوي ± 1 فإن مقلوبه يساوي ± 1 .

تعريف (١٢ـ٩):

مجموعة التحويلات التآلفية أحادية المقاس تكون زمرة تسمى الزمرة التآلفية أحادية المقاس unimodular affine group ويرمز لها بالرمز $uniG(2, R)$.

تعريف (١٢ـ١٠):

الهندسة المصاحبة للزمرة التآلفية أحادية المقاس تسمى الهندسة التآلفية أحادية المقاس unimodular affine geometry.

رأينا سابقاً أن الزمرة التآلفية للمستوى تتحدد من خلال 6 بارامترات وحيث أن الزمرة التآلفية تحقق الشرط (12.4) فإننا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (١٢ـ٦):

الزمرة التآلفية أحادية المقاس هي زمرة 5-البارامترية 5-parameter group.

واضح أن كل الأشياء objects التي في الهندسة التآلفية العامة تكون موجودة في الهندسة التآلفية أحادية المقاس، لكن الهندسة التآلفية أحادية المقاس تحتوي على أشياء غير موجودة في الهندسة التآلفية لأن الخصائص اللاتغيرية للزمرة التآلفية أحادي المقاس أكثر بكثير منها في الزمرة التآلفية.

نوضح الآن الفروق الواضحة بين الزمرة التآلفية والزمرة التآلفية أحادية المقاس من خلال الأمثلة الآتية:

مثال (٣.١٢):

الزمرة التآلفية أحادية المقاس تحتوي على خاصية أن وضع ثلاث نقاط بطريقة اختيارية هو خاصية لاتغيرية.

الحل:

طبعاً هذه الخاصية غير محققة في الهندسة التآلفية العامة. لذلك نفرض أن $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$ ثلاث نقاط في المستوى التآلفي نقلت (رسمت) إلى ثلاث نقاط $M_1'(x_1',y_1'), M_2(x_2',y_2'), M_3'(x_3',y_3')$ في المستوى نفسه.

بالتحويل التآلفي أحادي المقاس (12.3)، (12.5)، من السهل أن نتحقق من

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

وهذا يعني أن القيمة المطلقة للمحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (12.6)$$

هي كمية لاتغيرية. وتوضح كذلك أن وضع ثلاث نقاط بطريقة اختيارية هو خاصية لاتغيرية.

ملاحظة (٥.١٢):

نعني بأن النقاط وضعت بطريقة اختيارية بأنه لا توجد شروط عليها فمثلاً نقول في الهندسة الإسقاطية والهندسة التآلفية النقاط تقع على خط مستقيم.

مثال (٤،١٢):

وضح أن مساحة المثلث في الهندسة التآلفية أحادية المقاس كمية لاتغيرية.

الحل:

من المثال السابق وتعريف مساحة المثلث الذي رؤوسه M_1, M_2, M_3 نجد أن المساحة

$$area = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (12.7)$$

كمية لاتغيرية.

مثال (٥،١٢):

من المثال السابق يمكن تعريف مساحة أي مضلع polygon وكذلك مساحة أي شكل منحني curvilinear figure عن طريق مساحة المثلث.

من الأمثلة السابقة نصل إلى صياغة النظرية الآتية :

نظرية (٧،١٢):

مساحة الأشكال معرفة في الهندسة التآلفية أحادية المقاس.

(٤،١٢) الزمرة العمودية والهندسة الإقليدية :

Orthogonal Group and Euclidean Geometry

التحويلات التآلفية (12.2) تسمى تحويلات متعامدة orthogonal إذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متعامدة. المصفوفة المتعامدة تحقق (من الجبر الخطي)

$$A\,A' = I \qquad (12.8)$$

حيث t ترمز لتبديل الصفوف بالأعمدة أي أن A' هي المصفوفة البديلة أو المنقولة transpose.

نظرية (٨،١٢):

مجموعة التحويلات المتعامدة تكون زمرة.

الإثبات:

من الجبر الخطي التحويل يعرف من خلال مصفوفة وضرب المصفوفات هو مصفوفة وبالتالي محصلة تحويلين متعامدين هو تحويل متعامد. وكذلك معكوس المصفوفة المتعامدة هو مصفوفة متعامدة وهذا يكفي لإثبات النظرية.

تعريف (١١،١٢):

التحويلات المتعامدة في النظرية السابقة تكون زمرة تسمى الزمرة المتعامدة orthogonal group ويرمز لها بالرمز $OG(2,\mathbb{R})$ ويمكن التأكد بسهولة من صحة ما يأتي :

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+b_1^2&=1\\ a_2^2+b_2^2&=1\\ a_1a_2+b_1b_2&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.9)$$

$$Det\ A\ = a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1 \qquad (12.10)$$

من الشرط (12.10) يتضح أن :

نظرية (٩،١٢):

زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة جزئية من زمرة التحويلات التآلفية أحادية المقاس.

ملاحظة (٦،١٢):

زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة جزئية من الزمرة التآلفية.

وحيث أن زمرة التحويلات المتعامدة هي زمرة تآلفية وتحقق الشروط (12.9). إذاً زمرة التحويلات المتعامدة تعتمد على ثلاث بارامترات $(3 = 6-3)$ أي أن الزمرة $OG(2,\mathbb{R})$ هي زمرة 3-البارامترية 3-parameter group.

ذكرنا سابقاً أن معكوس المصفوفة المتعامدة هو مصفوفة متعامدة وبالتالي فإن المصفوفة A تحقق شروط هي صورة أخرى للشروط (12.9) وهي $A'A = I$ ولهذا فإن:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2&=1\\ b_1^2+b_2^2&=1\\ a_1b_1+a_2b_2&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.11)$$

الشروط (12.9) تكافئ الشروط (12.11).

تعريف (١٢.١٢):

في هندسة الزمرة المتعامدة الكمية الحقيقية

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (12.12)$$

تسمى المسافة distance بين النقطتين $M_1(x_1,y_1)\ ,\ M_2(x_2,y_2)$.

نظرية (٩.١٢):

المسافة d المعرفة في (12.12) هي كمية لاتغيرية بالنسبة للزمرة المتعامدة $OG(2,\mathbb{R})$.

البرهان:

نفرض أن $M_1'(x_1',y_1')\ ,\ M_2'(x_2',y_2')$ صور النقاط $M_1(x_1,y_1)\ ,\ M_2(x_2,y_2)$ بالتحويلات المتعامدة (12.2)، (12.8).

إذاً $d^2(M_1',M_2')=(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')$

$$\begin{aligned} &=[a_1(x_2-x_1)+b_1(y_2-y_1)]^2+[a_2(x_2-x_1)+b_2(y_2-y_1)]^2\\ &=(a_1^2+a_2^2)(x_2-x_1)^2+2(a_1b_1+a_2b_2)(x_2-x_1)(y_2-y_1)\\ &\qquad+(b_1^2+b_2^2)(y_2-y_1) \end{aligned}$$

وباستخدام (12.8) نجد أن

$$\begin{aligned} d^2(M_1',M_2')&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\ \therefore\ d(M_1',M_2')&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}>0\\ &=d(M_1,M_2) \end{aligned}$$

ملاحظة (٧.١٢):

على الطالب أن يتأكد أن دالة المسافة

$$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$(M_1, M_2) \longrightarrow d(M_1, M_2) > 0$$

تحقق الشروط العامة لدالة المسافة وهي :

$$d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) \quad \text{symmetry (التماثل)}$$

متباينة المثلث $d(M_1, M_2) \le d(M_1, M_3) + d(M_3, M_1)$ triangle inequality

حيث $E^2 = \mathbb{R}^2$ يرمز للمستوى المقابل لزمرة التحويلات المتعامدة $OG(2, \mathbb{R})$.

نظرية (١٠،١٢):

المسافة تعتبر لاتغيري أساسي basic invariant لهندسة زمرة التحويلات المتعامدة.

البرهان:

من الواضح أن كل الكميات اللاتغيرية الأخرى يمكن التعبير عنها من خلال دالة المسافة وعلى سبيل المثال كل من الطول والمساحة والزاوية يعبر عنها بدلالة المسافة وهذا كافٍ لبرهان النظرية.

نظرية (١١،١٢):

هندسة زمرة التحويلات المتعامدة هي الهندسة الأولية (الإقليدية).

البرهان:

البرهان طويل ويمكن التحقق من أن كل مسلمات الهندسة الإقليدية محققة في هندسة زمرة التحويلات المتعامدة.

(٥،١٢) مقارنة بين الهندسات:

مما سبق نرى أن

$$OG(2, \mathbb{R}) \subset LnAfG(2, \mathbb{R}) \subset AfG(2, \mathbb{R}) \subset PG(2, \mathbb{R})$$

أي أن زمرة الإسقاطيات والتي تعتبر أساس الهندسة الإسقاطية أوسع وأعم من الزمرة المتعامدة التي تعتبر أساس الهندسة الإقليدية. لكن في نفس الوقت، الهندسة الإسقاطية أفقر الهندسات المذكورة سابقاً والهندسة الإقليدية أغناها بالنسبة للأشياء (العناصر) التي تكونها.

في الهندسة الإقليدية يمكنك الدراسة والتعرف على الأشياء التآلفية (النسبة البسيطة لثلاث نقاط على خط مستقيم، التوازي وهكذا) وأشياء الهندسة الإسقاطية projective objects (النسبة التبادلية لأربع نقاط، وهكذا). على العكس من ذلك فإن الخصائص التآلفية affine properties للأشكال لا يمكن دراستها في الهندسة الإسقاطية. الخصائص المترية metric properties (الخصائص التي تعتمد على القياس للأطوال) لم تأخذ في الاعتبار في الهندسة التآلفية.

في الحالة العامة يمكن صياغة ما سبق في النظرية الآتية :

نظرية (١٢.١٢):

الزمرة الأوسع winder group تعتبر أساس لهندسة أضيق narrower geometry بالنسبة لمجموعة عناصرها الهندسية geometric objects .

البرهان:

البرهان يتضح مما تقدم عرضه بالإضافة إلى أنه كلما قلت عدد البارامترات في الزمرة، اتسعت المفاهيم الهندسية والعكس صحيح بمعنى أن الزمرة التي عدد بارامتراتها أكبر فإن خصائصها الهندسية فقيرة.

(٦.١٢) تمثيل التحويلات الهندسية من خلال تحويلات تآلفية:

نوضح كيف يمكن كتابة التحويلات الهندسية التي قدمناها في الأبواب السابقة من خلال التحويلات التآلفية والإحداثيات المتجانسة.

مثال (٥.١٢):

الانتقال يتحدد من خلال المتجه $[\Delta x, \Delta y, 0]^t$ حيث النقطة $[x, y, 1]^t$ تنقل إلى النقطة $[x+\Delta x, y+\Delta y, 1]$ حيث المتجه لا يتغير تحت تأثير الانتقال وبالتالي تحويل خطي بالنسبة لجميع المتجهات.

الانتقال ليس تحويل خطي بالنسبة لجميع النقاط ونوضح ذلك بالنسبة للنقاط

$$P_1 = [x_1, y_1, 1], P_2 = [x_2, y_1, 1]$$

$$\therefore T(P_1) + T(P_2) = [x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y, 1]^t + [x_2 + \Delta x, y_2 + \Delta y, 1]^t$$

$$= [x_1 + x_2 + 2\Delta x, y_1 + y_2 + 2\Delta y, 2]^t$$

$$T(P_1+P_2)=[x_1+x_2+\Delta x, y_1+y_2+\Delta y, 2]$$

أي أن
$$T(P_1+P_2)\neq T(P_1)+T(P_2)$$

من العرض السابق نجد أن النقطة $[x,y,1]^t$ تحولت إلى النقطة $[x+\Delta x, y+\Delta y, 1]^t$

من خلال التحويل المصفوفي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+\Delta x \\ y+\Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن المتجهات $[x,y,0]$ لا تتغير تحت تأثير المصفوفة $T(\Delta x,\Delta y)$ حيث

$$T(\Delta x,\Delta y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة (١٢.٨):

لاحظ أن $[x,y,1]^t$ هي الإحداثيات المتجانسة للنقطة (x,y) .

مثال (١٢.٦):

مغير البعد بالنسبة لنقطة يتحدد بالمعاملات $S_x, S_y \in \mathbb{R}$ وهو خطي بالنسبة للنقاط والمتجهات. حيث النقطة $[x,y,1]^t$ تتحول إلى $[S_x x, S_y y, 1]^t$ بينما المتجه $[x,y,0]^t$ يتحول إلى $[S_x x, S_y y, 0]^t$ أي أن التحويل المصفوفي لمغير البعد يكتب في الصورة

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_x x \\ S_y y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث 1 يشير إلى حالة النقاط و 0 يشير إلى حالة المتجهات.

مثال (١٢.٧):

الدوران ضد عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاوية θ تحويل خطي عند تأثيره على النقاط والمتجهات والتمثيل المصفوفي لتحوبل الدوران يعطى من

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(\theta)$ هي مصفوفة الدوران.

مثال (١٢.٨):

القص بالمعاملات α, β في اتجاه محور x ، محور y تحويل خطي بالنسبة للنقاط والمتجهات وتمثيله المصفوفي يعطى من

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+\beta y \\ \alpha x+y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

حيث مصفوفة القص هي $\begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Sh(\alpha.\beta)$.

مثال (١٢.٩):

الإنعكاس في خط مستقيم L تحويل خطي بالنسبة للنقاط والمتجهات ويمثل مصفوفياً كما يلي (باعتبار L هو محور x)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ 0 \text{ or } 1 \end{bmatrix}$$

مثال (١٢.١٠):

فيما يلي نكتب التحويلات الهندسية المشهورة في الفراغ الثلاثي باستخدام الإحداثيات المتجانسة وذلك باعتبار نقطة $P = [x, y, z, 1]^t$ تحولت إلى نقطة $P' = [x', y', z', 1]^t$ بتحويل هندسي في الفراغ الثلاثي حيث مصفوفته T تعطى من:

الانتقال ثلاثي الأبعاد:

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مغير البعد ثلاثي الأبعاد:

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الإنعكاس حول المستوى yz:

$$R_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الإنعكاس حول المستوى xz:

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الإنعكاس في المستوى xy:

$$R_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الدوران حول محور x:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الدوران حول محور y:
$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

الدوران حول محور z:
$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال (١١.١٢):

بين أن محصلة دوران وانتقال ليست إبدالية

الحل:

نعتبر دوران $R(\theta)$ حول نقطة أصل الإحداثيات وانتقال $T(h,k)$ حيث

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=T(h,k)R(\theta)\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & h\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & h\\ \sin\theta & \cos\theta & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

بينما
$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=R(\theta)T[h,k]\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & h\cos\theta-k\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & h\sin\theta+k\cos\theta\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

واضح أن

$$T(h,k)R(\theta)\neq R(\theta)T(h,k)$$

ملاحظة (٩.١٢):

بالنسبة للإحداثيات المتجانسة لاحظنا ما يلي:

١- النقطة في المستوى الإسقاطي P_2 تمثل بثلاث إحداثيات على الأقل أحدهما مختلف عن الصفر.

٢- المتجهان $a, \ b$ ثلاثي الأبعاد يمثلان نفس النقطة في P_2 إذا كان وكان فقط $a = hb$ حيث h عدد قياسي مختلف عن الصفر.

٣- النقطة (x, y) ثنائية الأبعاد في المستوى الإقليدي تناظر متجهات (hx, hy, h) ثلاثية البعد في المستوى الإسقاطي P_2 تمثل $(x, y, 1)$.

٤- كل نقطة (x, y) تناظر شعاع في فراغ ثلاثي بدايته نقطة أصل الإحداثيات $O = (0,0,0)$ خلال النقطة $(x, y, 1)$.

تمارين (١٢)

(١) عرف الزمرة ومن ثم عرف زمرة التحويلات.

(٢) عرف كل من زمرة التحويلات الإسقاطية، التآلفية، التآلفية أحادي القياس، المتعامدة.

(٣) وضح بمثال أن الخواص الهندسية التي تحققها زمرة التحويلات التآلفية تتحقق في الزمرة الإسقاطية بينما العكس ليس بالضرورة صحيح.

(٤) وضح بمثال أن الخواص الهندسية التي تحققها زمرة التحويلات التآلفية أحادية القياس تتحقق في كل من الزمرة التآلفية والزمرة الإسقاطية والعكس ليس بالضرورة صحيح.

(٥) وضح بمثال أن خواص الهندسة الإقليدية صحيحة في كل من الهندسة التآلفية وحيدة القياس والهندسة التآلفية والهندسة الإسقاطية والعكس ليس بالضرورة صحيح.

(٦) أذكر أحد الكميات اللاتغيرية في كل من الزمرة الإسقاطية والزمرة التآلفية والزمرة التآلفية أحادية القياس والزمرة المتعامدة.

(٨) وضح العلاقة بين الهندسة المصاحبة لزمرة وعدد البارامترات التي تعرف الزمرة.