الباب الحادي عشر

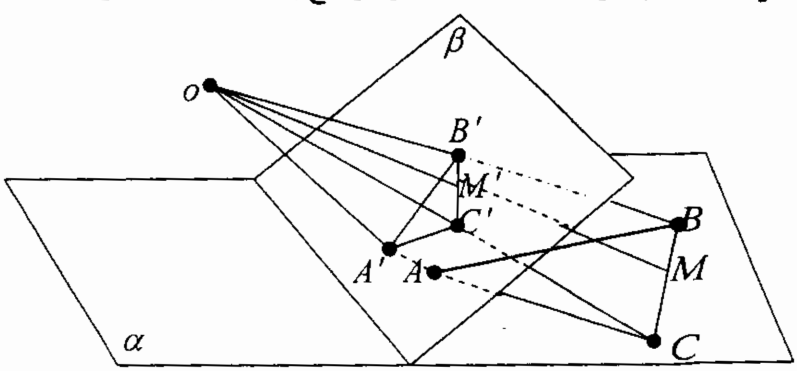
التحويلات الإسقاطية

Projective Transformations

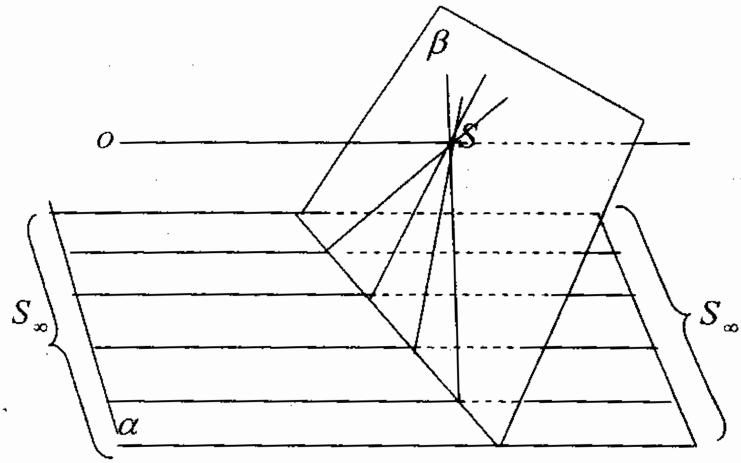
في بداية القرن التاسع عشر بدأ ظهور الهندسة الإسقاطية وكان منبعها الفن المعماري Architecture ويرجع هذا إلى العالم الفرنسي بونكليت Poncelet، وكانت دراسته تعتمد على خصائص هندسية خاصة بالأشكال والتي تسمى إسقاط projective. نحاول في هذا الباب التعرض لأساسيات الهندسة الإسقاطية في كل من المستوى والفراغ الإسقاطي ونركز على التحويلات الإسقاطية والإحداثيات المتجانسة.

(١.١١) مقدمة:

في هذه المقدمة نقدم الخصائص الإسقاطية للأشكال، لذلك نفرض أن لدينا شكل F في المستوى α ومستوى أخر β ونقطة o في الفراغ حيث $o \notin \alpha \, , \, o \notin \beta$ والنقطة o والنقطة $M \in F$ تحدد خط oM. الخط oM يقطع المستوى β في نقطة ما M'، النقطة M' تسمى مسقط projection النقطة M من المركز o على المستوى β. مساقط كل نقاط الشكل F على المستوى β تكون شكل F'، والذي يسمى مسقط الشكل F ويرمز له بالرمز $F' = \underset{\beta}{\mathrm{Proj}} F$، العملية التي أدت إلى الحصول على الشكل F' من الشكل F من المركز o تسمى الإسقاط المركزي central projection. كما هو موضح بالشكل (١.١١) و(٢.١١):



شكل (١.١١)



شكل (٢.١١)

بتغيير المركز o والمستوى β (المُسقط عليه أو مستوى الإسقاط) نحصل على عدد لانهائي من الأشكال، بعض من هذه الأشكال يشبه F ولكن عدد كبير لا يشبه F في كثير من الخصائص. فمثلاً من الممكن أن يكون مسقط دائرة هو قطع ناقص أو مكافئ أو زائد. كذلك مسقط المثلث القائم قد يكون مثلث ليس قائم أي أن كثير من الكميات المرتبطة بشكل ما F قد تتغير نتيجة للإسقاط مثل أطوال القطع المستقيمة والمساحات.

تعريف (١.١١):

الخصائص والكميات التي لا تتغير بتأثير الإسقاط تسمى لا تغيرية (ثوابت) بالنسبة للإسقاط Invariants of projection.

تعريف (٢.١١):

الخصائص التي تظل لا تغيرية تحت تأثير أي إسقاط تسمى خصائص إسقاطية projective properties.

تعريف (٣.١١):

الهندسة الإسقاطية هي دراسة الخصائص الإسقاطية والكميات الإسقاطية.

تعريف (٤.١١):

الأشياء (العناصر) objects في الهندسة الإسقاطية هي عناصر إسقاطية.

مثال (١.١١):

بين أن الخط المستقيم هو عنصر في الهندسة الإسقاطية.

الحل:

نفرض أن $P_1, P_2, ..., P_n \in L$ هي n من النقاط على خط L في شكل F فإن:

إذاً (خط مستقيم) $P_1', P_2', ..., P_n' \in L'$

حيث $P_1', ..., P_n'$ مساقط $P_1, ..., P_n$

أي أن خاصية وضع النقاط على خط مستقيم هي خاصية إسقاطية.

مثال (٢.١١):

بين أن القطع المخروطي عنصر في الهندسة الإسقاطية.

الحل:

نفرض أن $P_1, ..., P_n \in C$ هي n من النقاط على القطع المخروطي C ومساقطها $P_1', ..., P_n' \in C'$ تنتمي إلى قطع مخروطي C'. (أكمل كما في المثال السابق).

ملاحظة (١.١١):

الخصائص التي تميز نوع القطع المخروطي من حيث أنه دائرة أو قطع مكافئ أو قطع زائد ليست خصائص إسقاطية، ولهذا فإنه يوجد اختلاف بين الهندسة الإسقاطية والهندسة الأولية elementary geometry بمعنى أنه في الهندسة الإسقاطية لا يوجد تمايز في نوع القطع المخروطي conic section.

ملاحظة (٢.١١):

بالرغم من أن القطاعات المخروطية هي عناصر في الهندسة الإسقاطية ولكن لا نفرق بين أنواع أشكالها في الهندسة الإسقاطية ولهذا لا نتعامل معها كل على حدة.

تعريف (٥.١١):

الخطوط المستقيمة المتوازية تتقاطع في نقطة ما تسمى نقطة اللانهاية point at infinity أو النقطة المثالية ideal point. المستوى يحتوي عدد لانهائي من النقاط (المختلفة) في اللانهاية.

تعريف (٦.١١):

كل النقاط المثالية لمستوى ما تسمى الخط المثالي (خط في اللانهاية) line at infinity لهذا المستوى. كل النقاط المثالية للفراغ تسمى المستوى المثالي ideal plane أو مستوى اللانهاية plane at infinity.

تعريف (٧.١١):

المستويان المتوازيان لهما نقاط مشتركة في اللانهاية، وهذه النقاط تقع على خط اللانهاية (الخط المثالي).

تعريف (٨.١١):

عناصر الفراغ الإقليدي تسمى عناصر عادية وبإضافة عناصر اللانهاية إليها تسمى عناصر إسقاطية projective objects.

تعريف (٩.١١):

الخط العادي اتحاد نقطة اللانهاية يسمى الخط الإسقاطي projective line، وينظر إلى الخط الإسقاطي كما لو كان منحنى مغلق.

تعريف (١٠.١١):

المستوى العادي اتحاد خط اللانهاية يسمى المستوى الإسقاطي projective plane والفراغ العادي اتحاد مستوى اللانهاية يسمى الفراغ الإسقاطي projective space.

إضافة عناصر اللانهاية للهندسة الأولية (العادية) توضح حقائق معينة، فمثلاً بدلاً من أن نقول الخطوط متوازية نقول أنها تتقاطع في اللانهاية.

مثال (٣.١١):

الأسطوانة هي مخروط رأسه في اللانهاية.

ملاحظة (٣.١١):

الهندسة الإسقاطية خالية من القياس (قياس الكميات الهندسية مثل الطول والزاوية والمساحة) وتهتم بدراسة خواص وضع الأشكال في الفراغ.

(٢.١١) الإحداثيات المتجانسة Homogeneous Coordinates

الإحداثيات المتجانسة التي نقدمها الآن تجعل الحسابات ممكنة في الفراغ الإسقاطي تماماً مثل الإحداثيات الكرتيزية في الفراغ الاقليدي:

الإحداثيات المتجانسة لنقطة في الفراغ الإسقاطي ذو البعد n عادة تكتب في شكل متجه صف طوله $n+1$ خلاف نقطة أصل الإحداثيات $O=(0:0:...:0)$ على الصورة

$$(x_1:x_2:x_3:....:x_{n+1})$$

إذاً أي مجموعتين متناسبتين proportional من الإحداثيات تعرف نفس النقطة في الفراغ الإسقاطي. فمثلاً

$$(c\,x_1:c\,x_2:c\,x_3\ :...:c\,x_{n+1})\ ,\ 0\neq c\in F \quad \text{(حقل)}$$

تعرف نفس النقطة.

ولهذا يمكن شرح نظام الإحداثيات كالتالي:

نفرض أن لدينا فراغ اتجاهي V ذو بعد $n+1$ معرف على حقل F وله أساس محدد. أي يمكن تعريف الإحداثيات في الفراغ V عن طريق الأساس، واستخدامها في $P_n(V)$ (الفراغ الإسقاطي ذو البعد n المعرف على الفراغ الاتجاهي V). إذاً $P_n(V)$ يتكون من كل فصول تكافؤ للمتجهات المختلفة عن الصفر والمتناسبة في V.

مثال (١١.٤):

في الفراغ الإسقاطي ثلاثي البعد P_3 توجد إحداثيات متجانسة $(x:y:z:w)$. مستوى اللانهاية عادة يعرف مجموعة النقاط $w=0$. بعيد عن هذا المستوى (الفراغ الإسقاطي المثقوب أي الفراغ بدون مستوى اللانهاية) نستخدم $(x/w\ ,y/w\ ,z/w)$ مثل نظام الإحداثيات الكرتيزي العادي.

الفراغ الإسقاطي المثقوب يسمى الفراغ التآلفي والذي سوف نقدمه في الباب الثاني عشر. ولهذا فإن الفراغ التآلفي مكمل complementary لمستوى اللانهاية ويمثل بإحداثيات مألوفة باستخدام أساس مكون من المتجهات

$$(1:0:0:1)\ ,\ (0:1:0:1)\ ,\ (0:0:1:1)$$

مثال (٥،١١):

نعتبر الفراغ $P_3(\mathbb{R}^3)$ بنظام الإحداثيات المتجانسة $(x:y:z:w)$ والمطلوب إيجاد تقاطع المستويين $x=2w$, $x=w$.

الحل:

نضع $w=0$ أولاً نحصل على $x=0$

إذاً التقاطع موجود في مستوى اللانهائي والتقاطع يتكون من كل النقاط التي لها الإحداثيات $(0:y:z:0)$ أي أن التقاطع خط مستقيم وهو في الحقيقة خط يربط النقاط $(0:0:1:0)$ ، $(0:1:0:0)$.

معادلة الخط المستقيم في هذه الحالة تعطى من

$$(0:y:z:0)=\mu(1-\lambda)(0:1:0:1)+\mu\lambda(0:0:1:0)$$

حيث μ معامل قياس scaling factor.

النقاط في المستوى الإسقاطي P_2 هي مساقط لنقاط في الفراغ $\mathbb{R}^3$ أي هي نقاط على الصورة $(x:y:z)$ ونرمز لمسقط نقطة $(x:y:z)$ على المستوى الإسقاطي P_2 بالرمز $[x:y:z]$. النقطة $[x:y:z]$ يمكن اعتبارها على أنها فصل تكافؤ لنقطة في $\mathbb{R}^3$ (3-dim points) تقع على خط مستقيم في $\mathbb{R}$ ويمر بالنقاط

$$(x:y:z),(0:0:0)$$

إذاً يمكننا القول بأن أي نقطتين في $\mathbb{R}^3$ يكونا متكافئان $(\equiv)$ إذا كانت مساقطهما على المستوى الإسقاطي متساوية $(=)$ أي أن

$$(x:y:z)\equiv(u,v,w)\leftrightarrow[x:y:z]=[u,v,w]$$

حيث $(x:y:z),(u:v:w)\in\mathbb{R}^3$

ملاحظة (٤،١١):

$(x:y:z)\in\mathbb{R}$ تعني نقطة ليست إسقاطية بينما $[x:y:z]$ تعني نقطة مسقطة.

ضرب الإحداثيات المتجانسة في عدد قياسي يعرف كما يلي:

١. في حالة النقاط غير الإسقاطية $(x:y:z)$ يكون

$$a(x:y:z)=(ax:ay:az)$$

مع ملاحظة أن $(x:y:z) \equiv a(x:y:z)$

بالرغم من أن $(x:y:z) \neq a(x:y:z)$

٢. في حالة نقطة إسقاطية $[x:y:z]$ يكون

$$a[x:y:z\} = [ax:ay:az]$$

ولهذا $[x:y:z] \neq a[x:y:z]$

ملاحظة (٥.١١):

بعيداً عن الهندسة الإسقاطية يمكن تعريف الإحداثيات الإسقاطية (x_1,x_2,x_3) لنقطة محددة (x,y) في المستوى $\mathbb{R}^2$ على أنها أي ثلاث أعداد حقيقية تحقق

$$\frac{x_1}{x_3} = x \quad , \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

مثال (٦.١١):

الإحداثيات $(x_1,x_2,0)$ التي تحقق $\frac{x_2}{x_1} = \lambda$ تصف نقطة في اللانهاية في اتجاه ميله λ .

مثال (٧.١١):

معادلة الخط المستقيم $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ في الإحداثيات المتجانسة (x_1,x_2,x_3) تأخذ الصورة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

مثال (٨.١١):

تتطابق identical النقاط $(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)$ إذا كان وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (٩.١١):

يتطابق الخطين المستقيمين

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

إذا كان وفقط إذا كان

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

والخطان يتقاطعان في نقطة (x_1, x_2, x_3) حيث

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ x_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ x_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ملاحظة (٦،١١):

الإحداثيات المتجانسة تسمح بتمثيل أي نقطة (x, y, z) في الفراغ الثلاثي بعدد لانهائي من المتجهات في الفراغ الرباعي على الصورة

$$(T^* x, T^* y, T^* z, T)$$

حيث

$$\frac{T^* x}{T} = x\ ,\ \frac{T^* y}{T} = y\ ,\ \frac{T^* z}{T} = z$$

(٣،١١) هندسة الفراغ الإسقاطي: Geometry of projective space

عرفنا نظام إحداثي لكل من الخط الإسقاطي المثقوب (خط إسقاطي ونقطة اللانهاية) والمستوى الإسقاطي المثقوب والفراغ الإسقاطي المثقوب. بأسلوب آخر، عندما اعتبرنا الخط الإسقاطي عرفنا إحداثيات لكل نقطة فيه ماعدا نقطة اللانهاية. في المستوى الإسقاطي عرفنا لكل نقطة زوج من الإحداثيات ماعدا النقاط التي تقع على خط اللانهاية. بالمثل في الفراغ الإسقاطي عرفنا ثلاثي من الإحداثيات ماعدا النقاط التي تقع في مستوى اللانهاية.

لتعريف وتحديد إحداثيات للخط الإسماطي بأكمله والمستوى الإسقاطي بأكمله والفراغ الإسقاطي بأكمله فإننا نلجأ إلى الإحداثيات المتجانسة.

تعريف (١١،١١):

نفرض نقطة M على الخط a لها إحداثي x العددين x_1, x_2 حيث $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ يقال أنهما إحداثيات متجانسة للنقطة M إذا كانت النسبة x_1 / x_2 تساوي x نقطة اللانهاية لها إحداثيات متجانسة (x_1, x_2) حيث $x_2 = 0$.

نظام الإحداثيات المتجانسة له الخواص الآتية :

١. كل نقطة على الخط الإسقاطي لها إحداثيات متجانسة.

٢ـ إذا كانت (x_1,x_2) إحداثيات متجانسة لنقطة M على خط إسقاطي فإن $(\rho x_1,\rho x_2)\ ,\ \rho\neq 0$ هي إحداثيات متجانسة لنفس النقطة.

٣. النقاط المختلفة دائماً يناظرها نسب غير متساوية لإحداثياتها المتجانسة.

٤ـ إذا كان $(x_1,x_2)\longrightarrow(x_1^o,x_2^o)$ فإن النقطة المتغيرة M والتي إحداثياتها المتجانسة (x_1,x_2) تؤدي إلى النقطة M^o والتي إحداثياتها المتجانسة (x_1^o,x_2^o) .

ملاحظة (٧،١١):

الخاصية (٢) للإحداثيات المتجانسة تعني أنه لأي نقطة على الخط الإسقاطي يوجد لها عدد لانهائي من الإحداثيات المتجانسة.

بالمثل يمكن تعريف الإحداثيات المتجانسة لأي نقطة في المستوى الإسقاطي الكامل كالتالي:

تعريف (١٢،١١):

إذا كانت M نقطة لا تقع على خط اللانهاية ∞ فإن الإحداثيات المتجانسة هي (x_1,x_2,x_3) بحيث $x_1/x_3=x$ ، $x_2/x_3=y$ (الإحداثيات x,y هي الإحداثيات الإسقاطية، الأعداد $x_1,\ x_2,x_3$ ليست جميعها أصفار).

تعريف (١٣،١١):

الإحداثيات المتجانسة للنقطة M_∞ على خط اللانهاية هي $(x_1,x_2,0)$ بحيث على الأقل أحد الأعداد x_1,x_2 لا يساوي صفراً.

مثال (١٠،١١):

استنتج معادلة الخط المستقيم في المستوى الإسقاطي في نظام الإحداثيات المتجانسة.

الحل:

من سابقاً معادلة الخط المستقيم في المستوى الإسقاطي هي

$$A\,x+B\,y+C=0$$

حيث x, y هي الإحداثيات الإسقاطية لأي نقطة على الخط الإسقاطي. ومن العلاقة بين الإحداثيات الإسقاطية والإحداثيات المتجانسة (x_1, x_2, x_3) أي أن

$$x_1/x_3 = x\,,\ \ x_2/x_3 = y$$

إذاً معادلة الخط المستقيم في الإحداثيات المتجانسة تصبح على الصورة :

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

ملاحظة (١١.٨):

الخواص الأساسية للإحداثيات المتجانسة في المستوى الإسقاطي تماثل نفس الخواص على الخط الإسقاطي.

بطريقة مماثلة لما سبق فإن أي نقطة في الفراغ الإسقاطي لها إحداثيات متجانسة (x_1, x_2, x_3, x_4) تحقق نفس خواص الإحداثيات المتجانسة على الخط الإسقاطي والمستوى الإسقاطي.

ملاحظة (١١.٩):

الإحداثيات المتجانسة لأي نقطة M_∞ على مستوى اللانهاية ∞ تعطى من $x_4 = 0$ أي هي $(x_1, x_2, x_3, 0)$.

ملاحظة (١١.١٠):

من تعريف الإحداثيات المتجانسة (x_1, x_2, x_3, x_4) نجد أنه لأي نقطة M يكون على الأقل أحد الأعداد x_1, x_2, x_3, x_4 مختلف عن الصفر.

مثال (١١.١١):

معادلة المستوى الإسقاطي في نظام الإحداثيات المتجانسة (x_1, x_2, x_3, x_4) تعطى من

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0$$

الحل :

من تعريف الإحداثيات الإسقاطية وعلاقتها بالإحداثيات المتجانسة وإتباع خطوات المثال السابق كما يلي :

نفرض أن معادلة المستوى في الفراغ الإسقاطي هي

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

وإذا كانت (x_1, x_2, x_3, x_4) هي الإحداثيات المتجانسة للفراغ حيث

$$x = \frac{x_1}{x_4}\ ,\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4},\ x_4 \neq 0$$

وبالتعويض في معادلة المستوى نحصل على المطلوب.

(٤،١١) التناظر الإسقاطي: Projective Correspondence

في الفراغات الإقليدية علمنا أنه باستخدام تحويلات (تناظرات) معينة يتحول الشكل إلى شكل آخر ويحافظ على خواص ، عينة ، من هذه التحويلات الانتقال والدوران والإنعكاس ومغير البعد. هنا نعرض لمفهوم مماثل للذي في الهندسة الإقليدية.

تعريف (١٤،١١):

نفرض أن f راسم تناظر أحادي بين نقاط خطين إسقاطين a, a' بحيث أن لكل نقطة M من a يوجد لها نقطة M' من a' بالارتباط الدالي functional dependence $M' = f(M)$ والعكس $M = \Phi(M')$ حيث Φ هي معكوس f أي أن $\Phi f = f\,\Phi = I$ (I راسم التطابق أو الوحدة).

تعريف (١٥،١١):

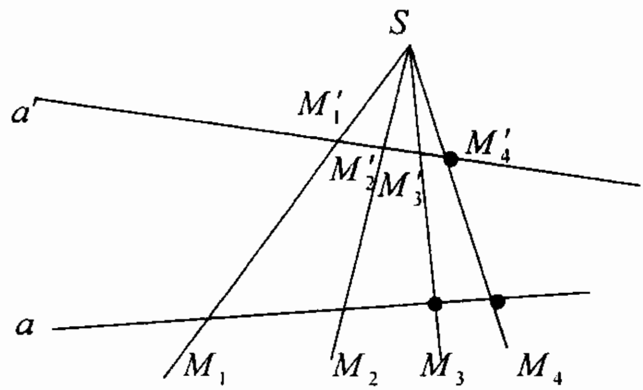
التناظر الأحادي $M' = f(M)$ يسمى إسقاطي projective إذا كان تحويل خطي (يحافظ على ترتيب نقاط الخط a). وفي هذه الحالة نقول أن الخطين a, a' متناظرين إسقاطياً projectively correspondence ويسمى الراسم بالإسقاطية projectivity .

ملاحظة (١١،١١):

إذا كان $(M_1, M_2), (M_3, M_4)$ مجموعة مرتبة من نقاط الخط الإسقاطي a وتكون صورها المتناظرة $(M_1', M_2'), (M_3', M_4')$ أيضاً مرتبة على الخط الإسقاطي a' .

ملاحظة (١٢،١١):

الإسقاطية يمكن التعامل معها على أنها تعميم للإسقاط المركزي central projection كما هو موضح في شكل (١١-٣).



شكل (٣.١١)

حيث a,a' خطان في مستوى واحد وأن S نقطة (مركز الإسقاط) في نفس المستوى، $S \notin a,a'$. باعتبار أن الإسقاطية هي راسم تناظر أحادي معرف بين خطين إسقاطين وباستخدام ما هو معروف في البنى الجبرية (الأنظمة الجبرية) يمكننا إثبات النظريات الآتية:

نظرية (١.١١):

معكوس الإسقاطية هو إسقاطية. وهذا معناه أنه لكل إسقاطية توجد إسقاطية عكسية.

نظرية (٢.١١):

محصلة إسقاطيتين هو إسقاطية. أي أن تحصيل الإسقاطيات هو عملية ثنائية.
بمعنى إذا كان $M'=f_1(M)$ إسقاطية من خط إسقاطي a إلى خط إسقاطي a' وإسقاطية $M''=f_1(M)$ من الخط a' إلى الخط a'' فإن المحصلة $M''=f_2f_1(M)$ هي إسقاطية من a إلى a''.

مما سبق يكون لدينا النظرية الآتية:

نظرية (٣.١١):

مجموعة الإسقاطيات تكون زمرة مع عملية تحصيل الإسقاطيات.

تعريف (١١.١٦):

مجموعة النقاط $M_1,...,M_n$ من الخط الإسقاطي a يقال أنها تكافئ إسقاطياً projectively equivalent مجموعة النقاط $M'_1,...,M'_n$ من خط إسقاطي a' إذا وجدت إسقاطية من الخط a إلى الخط a' والتي تأخذ كل نقطة M_i إلى النقطة M'_i حيث $i = 1, 2,..., n$.

من هذا التعريف والنظريات التي تسبقه يمكن برهنة النظرية الآتية :

نظرية (١١.٤):

خاصية التكافؤ الإسقاطي إبدالية ودامجة.

ملاحظة (١١.١٣):

الإسقاطية مفهوم غاية في الأهمية في الهندسة الإسقاطية لأنها تمكننا من تعريف التكافؤ الإسقاطي لمجموعتين من النقاط.

ملاحظة (١١.١٤):

الإسقاطية تناظر مفهوم تطابق الإزاحات (الحركة) congruent (motion) displacement في الهندسة الأولية.

نظرية (١١.٥):

خاصية تقسيم أزواج النقاط لا تغيرية بالنسبة للإسقاطيات.

تعريف (١١.١٧):

عديد الطيات الإسقاطي projective manifold ذو البعد واحد هو أحد الأشكال الآتية :

١. مجموعة نقاط الخط الإسقاطي.

٢. مجموعة أشعة الحزمة المستوية (مجموعة الخطوط التي تقع في مستوى واحد وتمر بنقطة (مركز الحزمة) في نفس المستوى).

٣. مجموعة المستويات التي تمر خلال خط (المحور) في الفراغ (حزمة المستويات) والخط يسمى محور الحزمة.

وبالتالي مفهوم الإسقاطي الذي عرضناه سابقاً يمكن تطبيقه لمثل هذه الأنواع من عديدات الطيات الإسقاطية.

أكثر من هذا يمكن تعريف الإسقاطية لعديد طيات ثنائية البعد وثلاثية البعد بنفس المفاهيم السابقة، مع استبدال الخط الإسقاطي بالمستوى الإسقاطي أو الفراغ الإسقاطي.

تعريف (١٨.١١):

عديد الطيات الإسقاطي ثنائي البعد هو أحد الأشكال الآتية :

المستوى الإسقاطي أو حزمة bundle المستقيمات أو حزمة المستويات في الفراغ الإسقاطي والتي تمر خلال نقطة (مركز الحزمة) في هذا الفراغ.

تعريف (١٩.١١):

عديد الطيات الإسقاطي ثلاثي البعد هو الفراغ الإسقاطي.

الخصائص الأساسية للإسقاطيات بين عديدات الطيات الإسقاطية ثلاثية البعد هي تعميم طبيعي للخصائص المناظرة في الإسقاطيات لعديدات الطيات ثنائية البعد وبالتالي يمكن صياغة النظريات الآتية :

نظرية (٦.١١):

لأي إسقاطية من فراغ إسقاطي إلى فراغ إسقاطي أخر يتحقق الآتي :

١. كل خط يرسم إسقاطياً إلى خط يناظره في الفراغ الآخر بطريقة التناظر الأحادي.

٢. كل مستوى يرسم عن طريق تناظر أحادي إلى مستوى يناظره في الفراغ الآخر.

مما سبق وبالمثل كما في الإسقاطيات المعرفة بين المستويات الإسقاطية فإننا نصل إلى النظرية الآتية:

نظرية (٧.١١):

مجموعة إسقاطيات الفراغ الإسقاطي تحقق خواص الزمرة أي أنها تكون زمرة.

مفهوم التكافؤ الإسقاطي لجسم فراغي **spatial body** يمكن تعريفه كما في حالة البعد واحد والبعدين من خلال التعريف الآتي:

تعريف (٢٠.١١):

أي شكل فراغي F في فراغ إسقاطي، يقال أنه يكافئ إسقاطياً projectivly equivalent شكل فراغي F' في نفس الفراغ أو فراغ آخر إذا وجدت إسقاطية بين الفراغات الإسقاطية تحول الشكل F إلى الشكل F' .

من هذا التعريف يمكنك إثبات النظرية الآتية:

نظرية (٨.١١):

التكافؤ الإسقاطي علاقة عاكسة reflexive ومتماثلة symmetric وناقلة transitive وبالتالي فهو علاقة تكافؤ equivalent relation.

(٥.١١) التمثيل التحليلي للإسقاطيات:

Analytic Representation for Projectivities :

هدفنا الآن الحصول على صيغ تربط الإحداثيات الإسقاطية للنقاط المتناظرة من خلال إسقاطية. نرمز للخط الإسقاطي والمستوى الإسقاطي والفراغ الإسقاطي بالرموز P_1 ، P_2 ، P_3 على الترتيب.

نفرض أن لدينا مستويان P_2 ، P_2' (ليس من الضروري أن يكونا مختلفين) وأن نظام الإحداثيات المتجانسة على كل منهما هو (x_i) ، (x_i') على الترتيب حيث $i=1,2,3$. إذا كانت النقطة $M \in P_2$ إحداثياتها (x_i) فإن صورتها تحت تأثير الإسقاطية هي $M' \in P_2'$ وإحداثياتها (x_i') والإحداثيات (x_i) ، (x_i') ترتبط من خلال تحويل خطي linear mapping L يأخذ النقطة M إلى النقطة M' أي $M'=L(M)$.

التحويل الخطي L يعطى من خلال العلاقة المصفوفية الآتية:

$$\rho' X' = CX \qquad (11.1)$$

حيث $X=(x_i)$ ، $X'=(x_i')$ مصفوفات أعمدة، $C=(C_{ij})$ مصفوفة 3×3 ، ρ' أي عدد لا يساوي الصفر. المصفوفة C تسمى مصفوفة التحويل الخطي.

التحويل الخطي يقال أنه غير شاذ (مفرد) non-singular إذا كانت مرتبة المصفوفة C تساوي 3 أو محدد المصفوفة C لا يساوي الصفر ($Det\, C \neq 0$) خلاف ذلك يقال أن التحويل شاذ.

ومن الجبر الخطي نعرف أن التحويل الخطي غير الشاذ يكون له معكوس (تناظر أحادي) بالإضافة إلى أن مجموعة التحويلات الخطية غير الشاذة تكون زمرة مع عملية تحصيل التحويلات (الرواسم أو التطبيقات). وكذلك معكوس تحويل خطي هو تحويل خطي.

نظرية (١١.٩):

بفرض أن $M'=L(M)$ هو تحويل خطي غير شاذ من مستوى P_2 إلى مستوى P_2' فإن صور نقاط خط إسقاطي في P_2 هي أيضاً نقاط تقع على خط إسقاطي في P_2'.

البرهان:

بما أن التحويل الخطي غير شاذ، إذاً له معكوس يعطى من

$$\rho X = C^{-1}X' = C'X' \qquad (11.2)$$

حيث C^{-1} معكوس المصفوفة C، $\rho \neq 0$ حيث $C^{-1} = C' = (C'_{ij})$ ، $C\,C' = I$

نفرض أن $M\ (x_1, x_2, x_3)$ نقطة على خط إسقاطي في المستوى P_2 ولتكن معادلة الخط هي

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0 \qquad (11.3)$$

من العلاقات (11.2)، (11.3) نحصل على

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0 \qquad (11.4)$$

حيث

$$U' = C\,U$$

أو

$$U_i' = \sum_{j=1}^{3} C_{ij}' U_j \qquad (11.5)$$

المعادلة (11.4) تمثل معادلة خط مستقيم في المستوى P_2' أي أنه إذا كانت M نقطة تقع على خط في المستوى P_2 معطى بالمعادلة (11.3) فإن M' تقع على خط في المستوى P_2' يعطى بالمعادلة (11.4).

مما سبق عرضه نتوصل إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (١٠.١١):

التحويل الخطي غير الشاذ من المستوى الإسقاطي P_2 إلى المستوى الإسقاطي P_2' هو إسقاطية projectivity من المستوى P_2 إلى المستوى P_2'.

ملاحظة (١٥.١١):

عكس النظرية (١١.١١) صحيح بمعنى أن كل إسقاطية هي تحويل خطي غير شاذ.

في الفراغ P_3 يمكن تعريف الإسقاطية من خلال تحويل خطي غير شاذ على الصورة

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{4} C_{ij}\, x_j \qquad (11.6)$$

حيث $(X_i') = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ هي الإحداثيات المتجانسة للنقطة M' صورة النقطة M التي إحداثياتها (X_i) حيث $Det\ (C_{ij}) \neq 0$.

بالنسبة للخط الإسقاطي، إذا كانت M نقطة على خط إحداثياتها الإسقاطية المتجانسة (x_1, x_2) فإن صورتها M' على خط إسقاطي آخر (أو نفس الخط) لها الإحداثيات الإسقاطية المتجانسة (x_1', x_2').

العلاقة بين إحداثيات M، M' تعطى من:

$$\begin{aligned} \rho' x_1' &= C_{11} x_1 + C_{12} x_2 \\ \rho' x_2' &= C_{21} x_1 + C_{22} x_2 \end{aligned} \qquad (11.7)$$

بالإضافة إلى أن $Det \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \neq 0$

بقسمة المعادلة الأولى على الثانية ووضع $x = \frac{x_1}{x_2}$ ، $\frac{x_1'}{x_2'} = x'$ نحصل على:

$$x' = \frac{C_{11} x + C_{12}}{C_{21} x + C_{22}}, \qquad (11.8)$$

$$C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21} \neq 0$$

هذه العلاقة تربط الإحداثيات غير المتجانسة x, x' للنقاط M' ، M على الترتيب.

التحويـل (11.8) يـسمى التحويل الخطـي الكـسري linear fractional function ومحدده مختلف عن الصفر.

إذاً إذا أعطينا إسقاطية من خط a إلى خط a' فإن الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة لنقاط a' يعبر عنها من خلال الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة لنقاط الخط a.

التمثيل التحليلي للإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة في كل من المستوى والفراغ الإسقاطي يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة كالآتي:

فمثلاً إذا وضعنا

$$\frac{x_1}{x_3}=x \ , \ \frac{x_2}{x_3}=y \ , \ \frac{x_1'}{x_3'}=x', \ \frac{x_2'}{x_3'}=y'$$

فإن صورة النقطة $M \in P_2$ التي إحداثياتها الإسقاطية غير المتجانسة $(x, \ y)$ هي النقطة $M' \in P_2'$ التي إحداثياتها الإسقاطية غير المتجانسة (x', y') واللتان ترتبطان بالعلاقات:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\alpha x + \beta y + \gamma} \ , \ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\alpha x + \beta y + \gamma}. \quad (11.9)$$

حيث

$$Det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \neq 0$$

بالمثل إذا كانت $M'=f(M)$ إسقاطية من الفراغ الإسقاطي P_3 إلى الفراغ الإسقاطي P_3' فإن الإحداثيات الإسقاطية x', y', z' للنقطة M' يعبر عنها من خلال الإحداثيات الإسقاطية x, y, z للنقطة M على الصورة:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta}, \ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta} \\ z' &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta} \end{aligned} \quad (11.10)$$

حيث

$$Det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$$

(٦.١١) الارتداد Involution

نتناول هنا الإسقاطيات التي تحقق أن تأثيرها مرتين يؤدي إلى تحويل التطابق Identity mapping.

تعريف (٢١.١١):

نفرض أن لدينا إسقاطية $P'=f(P)$ من خط إسقاطي إلى خط إسقاطي آخر وإذا كان العنصر $P''=f(P')$ ينطبق على العنصر P فإن الإسقاطية $P'=f(P)$ تسمى ارتداد Involution (واضح أن الارتداد f يحقق $ff=I$).

ملاحظة (١٦.١١):

الارتداد نوع خاص من الإسقاطيات، أي أن كل ارتداد هو إسقاطية.

من التعريف (١٩.١١) يمكن صياغة ما يلي:

نظرية (١١.١١):

الارتداد هو إسقاطية $P'=f(P)$ تحقق:

١- لأي P فإن $f(f(P))=P$.

٢- إذا كان $P'=f(P)$ فإن $P=f(P')$ لأي P.

بمعنى أن معكوس الإسقاطية ينطبق على الإسقاطية نفسها ($f=f^{-1}$).

نفرض أن $M, M' \in a$ نقطتان على خط إسقاطي a حيث $M'=f(M)$ إسقاطية من الخط a إلى نفسه وتمثيلها التحليلي يعطى على الصورة

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\ ,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0 \qquad (11.11)$$

حيث x, x' هي الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة للنقطتين M, M' على الترتيب، فإن التحويل العكسي للتحويل الكسري الخطي (11.11) يعطى من

$$x = \frac{-\delta x' + \beta}{\gamma x - \alpha}\ ,\ \ \alpha\gamma - \beta\gamma \neq 0 \qquad (11.12)$$

كي يكون التحويل (11.11) ارتداد يجب أن ينطبق على معكوسه وذلك من النظرية (١١ـ١١) أي أننا نحصل على $\delta = -\alpha$. إذاً الارتداد هو إسقاطية يمكن التعبير عنها بالصورة:

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \delta}\ ,\ \ \alpha^2 - \beta\gamma \neq 0 \qquad (11.13)$$

ملاحظة (١٧،١١):

إذا كانت $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\delta = \alpha$ فإن الإسقاطية (11.11) تعرف إسقاطية الوحدة $(x' = x)$ وبالتالي العلاقة (11.12) تعرف ارتداد الوحدة (التطابق) Identity involution.

نظرية (١٢،١١):

إذا كان للارتداد من خط إسقاطي إلى نفسه نقاط ثابتة fixed points فإن عددها يساوي أثنين.

البرهان:

نفرض أن لدينا ارتداد ممثل بالعلاقة

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

شرط أن يكون لهذا الارتداد نقاط ثابتة هو أن يتحقق $(x' = x)$:

$$x = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x - \alpha}$$

أو ما يكافئ

$$\gamma x^2 - 2\alpha x - \beta = 0 \qquad (11.14)$$

إذا كانت $\gamma \neq 0$ فإن هذه المعادلة تكون من الدرجة الثانية ومميزها discriminate $\alpha^2 + \beta\gamma \neq 0$ (من تعريف الارتداد). إذاً المعادلة لها جذران إما أعداد مركبة أو أعداد حقيقية وبالتالي الارتداد له نقطتين ثابتتين.

لكن إذا كانت

$$\gamma = 0 \text{ فإن } x' = -x - \frac{\beta}{\alpha}$$

أو

$$x' = -x + a \,,\, a = -\frac{\beta}{\alpha}$$

وفي هذه الحالة الارتداد له نقطتان ثابتتان هما $x = \frac{a}{2}$ ، $x = \infty$ (أي نقطة منطبقة على اللانهاية).

تعريف (٢٢.١١):

الارتـداد يـسمى ارتـداد ناقـصي elliptic أو زائـدي hyperbolic إذا كـان المميز $\alpha^2 - \beta\gamma$ - أكبر أو أصغر من الصفر على الترتيب.

هذا التعريف يمكن صياغته بأسلوب أخر :

تعريف (٢٣.١١):

الارتداد الزائدي هو الارتداد الذي يحافظ على نقطتين ثابتتين، أي له نقطتان لا تغيريتان.

تعريف (٢٤.١١):

الارتداد الناقصي هو الارتداد الذي ليس له أي نقاط لاتغيرية أي أن كل نقاط الخط الإسقاطي تتغير بالارتداد.

تعريف (٢٥.١١):

الارتـداد الـذي يحقـق أن $-\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ يـسمى إرتـداد مكـافئ parabolic involution .

ملاحظة (١٨.١١):

الارتداد المكافئ لا يعتبر ضمن مجموعة الارتدادات التي تحقق أن المميز مختلف عن الصفر، وذلك لأن الارتداد المكافئ ليس أحادي حيث أن مميزه يساوي صفر.

نظرية (١٣.١١):

إذا كـان $M' = f(M)$ ارتداد زائدي لـه نقطتـان ثابتتـان A, B إذاً زوج النقـاط M, M' يقسم الزوج A, B توافقياً.

البرهان:

نختار نظام الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة للخط الإسقاطي بحيث أن A لها الإحداثي $x=0$ والنقطة B لها الإحداثي $x=\infty$ (أي أن B منطبقة على نقطة اللانهاية). ونفرض أن

$$x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x-\alpha}$$

هو التمثيل التحليلي للارتداد $M'=f(M)$ في نظام الإحداثيات المختار.

بما أن A نقطة ثابتة إذاً صورتها يكون لها الإحداثي $x=0$ (الأصل منطبق على الصورة) وهذا يؤدي إلى أن $\beta=0$ (من (11.13)). بالمثل النقطة B ثابتة وهذا معناه أن $x\to\infty$ ومن (11.13) نجد أن هذا يتحقق إذا كانت $\gamma=0$. إذاً الارتداد (11.13) يأخذ الشكل

$$x'=-x$$

وطبقاً لذلك يكون $\frac{x+x'}{2}=0$ ، وهذا معناه أن النقطة A هي مركز إسقاطي للقطعة المستقيمة $[x,x']$ وهذا يؤدي إلى أن الزوج M,M' يقسم الزوج A,B توافقياً.

نظرية (11.14):

أي ارتداد يتحدد بطريقة وحيدة عن طريق زوجين مختلفين من النقاط المتناظرة.

البرهان:

لبرهان هذه النظرية يكفي أن نلاحظ أن الإرتداد $x'=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x-\alpha}$

يتحدد من خلال المعاملات العددية $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ بحيث ثلاثة منهم مستقلين لأن $-\alpha^2-\beta\gamma\neq 0$. بما أن التغير المتناسب في معاملات التحويل الكسري الخطي لا يؤثر في شكل التحويل، وهذا معناه أنه لتحديد الارتداد يكفي أن تكون النسبتين $\alpha/\beta/\gamma$ معروفتين.

هذه الشروط يمكن الحصول عليها بتحديد زوجين من النقاط المتناظرة. إذا كانت إحداثيات النقاط المعطاة هي x_1,x_1' ، x_2,x_2' فإن تناسب البارامترات $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ للارتداد الذي من خلاله تتناظر هذه النقاط يعطى من

$$x_1' = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 - \alpha} \quad , \; x_2' = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 - \alpha}$$

أو ما يكافئ

$$\begin{aligned} \gamma x_1 x_1' - \alpha\,(x_1 + x_1') - \beta = 0 \\ \gamma x_2 x_2' - \alpha(x_2 + x_2') - \beta = 0 \end{aligned} \qquad (11.15)$$

أو

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma}{\beta}\, x_1 x_1' - \frac{\alpha}{\beta}(x_1 + x_1') = 1 \\ \frac{\gamma}{\beta} x_2 x_2' - \frac{\alpha}{\beta}(x_2 + x_2') = 1 \end{aligned} \quad \beta \neq 0 \right\} \qquad (11.16)$$

العلاقات (11.16) هي معادلتين خطيتين في مجهولين $\frac{\alpha}{\beta}$ ، $\frac{\gamma}{\beta}$ ، ويمكن أن نرى أن النسب $\frac{\alpha}{\beta}$ ، $\frac{\gamma}{\beta}$ تبقى غير محددة فقط إذا كانت المحددات

$$\begin{vmatrix} x_1\, x_1' & x_1 + x_1' \\ x_2 x_2' & x_2 + x_2'' \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} x_1 x_1' & 1 \\ x_2 x_2' & 1 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_1' \\ 1 & x_2 + x_2' \end{vmatrix}$$

كلها تساوي أصفار (راجع الجبر الخطي)، وهذا يستلزم أن

$$x_1 + x_1' = x_2 + x_2' \; , \; x_1 x_1' = x_2 x_2' \qquad (11.17)$$

هذه المعادلات تتحقق في حالتين هما

$$x_1' = x_2' \quad ، \quad x_1 = x_2$$

أو

$$x_1 = x_2' \; , \; x_2 = x_1'$$

وهذه الحالات خارجة (مرفوضة) عن فروض النظرية لأنها تؤدي إلى أكثر من زوجين يحققا النظرية.

إذاً، إذا ما أعطينا زوجين مختلفين من النقاط (M_1, M_1') ، (M_2, M_2') فإنه يوجد دائماً إرتداد وحيد يرسم M_1 إلى M_1' ويرسم M_2 إلى M_2' وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (١١.١٩):

في هذه النظرية إذا استبدلنا الخط بعديد طيات بعده واحد والنقطة بعنصر فإن كل النظريات السابقة تتحقق بالنسبة للإرتداد على عديد الطيات أحادي البعد.

(٧.١١) النسب التبادلية: Cross Ratios

نفرض أن M, N نقطتين مختلفتين في الفراغ الإسقاطي P_3 مثلاً الخط الإسقاطي بين M, N يتكون من كل النقاط A التي على الصورة $A = \lambda M + \mu N$ يمكن النظر هنا إلى الزوج (λ, μ) على أنه إحداثيات A في فراغ اتجاهي (خطي) جزئي بعده 2 مولد بالمجهات الإحداثية M, N.

إسقاطياً فإن (λ, μ) تعرف فقط في حدود معامل قياسي ولهذا فإنها تمثل حقيقة إحداثيات متجانسة على خط إسقاطي مجرد P_1 من M إلى N معبر عنه بالأساس الخطي للمتجهات الإحداثية $\{M, N\}$.

نفرض $A_i\ , i = 1,\ldots,4$ أي أربع نقاط على هذا الخط. النسبة التبادلية للنقاط الأربع A_i يرمز لها بالرمز $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ وتعرف كما يلي:

$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = \frac{(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_4 - \lambda_4\mu_2)}{(\lambda_1\mu_4 - \lambda_4\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)}$$
$$= \frac{(\lambda_1\mu_1 - \lambda_3\mu_3)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_4\mu_4)}{(\lambda_1\mu_1 - \lambda_4\mu_4)(\lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3)}$$

ملاحظة (٢٠.١١):

لاحظ أن $a/0=\infty$ قيمة مسموح بها للنسبة التبادلية.

ملاحظة (٢١.١١):

إذا المقام والبسط انعدما بمعنى أنه على الأقل ثلاث قيم من $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ تتساوى تطابقياً فإننا نستخدم قاعدة لوبيتال وهذا يؤدي إلى النسبة التبادلية تؤول إلى الواحد الصحيح.

ونبين بالأمثلة والنظريات أن النسبة التبادلية لا تغيرية تحت تأثير التحويلات الإسقاطية وكذلك تغير الأساس أي أنها خاصية إسقاطية لا تغيرية.

مثال (١٢.١١):

الإسقاطية على الخط الإسقاطي تمثل بمصفوفة غير شاذة 2×2 على الصورة

$$\begin{bmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} , a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

بين أن النسبة التبادلية خاصية إسقاطية.

الحل:

عوض عن $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_i$ في النسبة التبادلية $[\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4]$ وأجري الاختصارات المناسبة نجد أنها تساوي $[A_1, A_2; A_3, A_4]$.

(٨،١١) النسبة التبادلية والتحويلات الإسقاطية:

لنبدأ بالنسبة التبادلية لأربع نقاط على خط إسقاطي ونعتبر التحويلات الخطية للإحداثيات الإسقاطية المتجانسة

$$\rho' X' = CX \quad , \quad Det\ C \neq 0 \qquad (11.18)$$

وتحويل الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \;,\quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (11.19)$$

نفرض أن $M_i \in a$ أربع نقاط تنتمي إلى خط إسقاطي a حيث $i = 1, 2, 3, 4$ وأن إحداثيات هذه النقاط هي t_1, t_2, t_3, t_4 في نظام الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة t على الخط a.

نعتبر الكمية

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} \Big/ \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} \qquad (11.20)$$

ونبين الآن أنها لا تعتمد على اختيار نظام الإحداثيات.

لذلك نعتبر أنه يوجد نظام إحداثيات إسقاطية أخر يرتبط مع النظام السابق على الخط a بالعلاقة

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \;,\quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \qquad (11.21)$$

وبحساب قيم t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 (إحداثيات النقاط M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 في نظام الإحداثيات الجديد من العلاقة (11.21) والتعويض في العلاقة (11.20) نجد أن :

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_3} \Big/ \frac{t_4 - t_1}{t_2 - t_4} = \frac{t'_3 - t'_1}{t'_2 - t'_3} \Big/ \frac{t'_4 - t'_1}{t'_2 - t'_4}$$

أي أن الكمية $\dfrac{t_3-t_1}{t_2-t_3}\Big/\dfrac{t_4-t_1}{t_2-t_4}$

لا تعتمد على نظام الإحداثيات.

هذه الكمية تسمى النسبة التبادلية لأربع نقاط M_1, M_2, M_3, M_4 ونرمز لها بالرمز

$$[M_1\ M_2\ M_3\ M_4] = \frac{t_3-t_1}{t_2-t_3}\Big/\frac{t_4-t_1}{t_2-t_4} \qquad (11.22)$$

من العلاقة (11.22) التي تعطي النسبة التبادلية لأربع نقاط على خط إسقاطي يمكن بسهولة التوصل إلى ما يأتي :

$$\left.\begin{aligned}
[M_1\ M_2\ M_3\ M_4] &= [M_3\ M_4\ M\ \ M_2]\\
[M_2\ M_1\ M_3\ M_4] &= \frac{1}{[M_1\ M_2\ M_3\ M_4]}\\
[M_1\ M_2\ M_4\ M_3] &= \frac{1}{[M_1\ M_2\ M_3\ M_4]}
\end{aligned}\right\} \qquad (11.23)$$

مما سبق عرضه يمكنك إثبات بسهولة النظرية الآتية :

نظرية (١٥.١١):

النسبة التبادلية لأربع نقاط على خط إسقاطي لا تغيرية بالنسبة لأي إسقاطية من خط إسقاطي إلى خط إسقاطي أخر (أو نفسه).

البرهان:

باستخدام العلاقات (11.21)، (11.22) نحصل على المطلوب.

ملاحظة (١٩.١١) :

إذا كان أحد النقاط منطبق على نقطة الأصل o وأحد النقاط منطبق مع نقطة اللانهاية فإننا نستخدم مفهوم النهاية لنعرف النسبة التبادلية

$$[\infty, o, M_3, M_4],$$

وذلك باستخدام العلاقة (11.22).

مثال (١٣.١١):

أوجد النسبة التبادلية $[\infty, o, M_3, M_4]$ في الحالات الآتية :

١. M_3, M_4 إحداثياتها الإسقاطية غير المتجانسة هي x_3, x_4 على الترتيب.

٢. M_3, M_4 إحداثياتها الإسقاطية غير المتجانسة هي $1, k$ على الترتيب.

الحل :

من العلاقة (11.22) يمكن كتابة النسبة التبادلية لأربع نقاط M_1, M_2, M_3, M_4 بدلالة الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة للنقاط على الصورة

$$[M_1\ M_2\ M_3\ M_4] = \frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_1} \cdot \frac{t_2 - t_4}{t_2 - t_3} \qquad (11.24)$$

وباستخدام $\lim_{t_1 \to \infty} \frac{t_3 - t_1}{t_4 - t_1} = 1$ فإننا نحصل على

١. $[\infty, o, M_3, M_4] = \frac{x_4}{x_3}$ ٢. $[\infty, o, 1, k] = k$

مثال (١٤.١١) :

اثبت أن $[M_1\ M_2\ M_3\ M_4] + [M_1 M_3\ M_2\ M_4] = 1$

الحل :

من تعريف النسبة التبادلية وإختصار الحدود والتجميع نحصل على المطلوب.

مثال (١٥.١١) :

إذا كانت $[M_1\ M_2\ M_3\ M_4] = \lambda$

اثبت أن $[M_1\ M_3\ M_4\ M_2] = \frac{1}{1-\lambda}$,

$$[M_1\ M_4\ M_2\ M_3] = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \ [M_1\ M_4\ M_3\ M_2] = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

الحل:

باستخدام تعريف النسبة التبادلية نصل إلى المطلوب.

وأخيراً نقدم تعريف النسبة التبادلية لأربع أشعة rays من حزمة pencil في

المستوى وكذلك النسبة التبادلية لأربع مستويات من حزمة bundle في الفراغ وذلك باستخدام النسبة التبادلية المعرفة سابقاً لأربع نقاط على خط إسقاطي.

تعريف (٢٦.١١):

إذا قطع مستقيم a في مستوى π أي أربع أشعة ولتكن m_1, m_2, m_3, m_4 من حزمة خطوط pencil في نفس المستوى π فإن نقاط التقاطع $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ على الخط a تحقق أن النسبة التبادلية $[M_1\ M_2\ M_3\ M_4]$ لا تتغير بتغير الخط a.

تعريف (٢٧.١١):

النسبة التبادلية cross ratio للأشعة $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$ تعطى من النسبة التبادلية لنقاط تقاطع الأشعة مع خط إسقاطي a أي

$$[m_1\ m_2\ m_3\ m_4] = [M_1\ M_2\ M_3\ M_4] \qquad (11.25)$$

النسبة التبادلية لأربع مستويات من حزمة المستويات pencil of planes يمكن تعريفها بالتماثل كالآتي:

تعريف (٢٨.١١):

إذا كان $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4$ أربع مستويات كل منهم يمر خلال خط مستقيم واحد (محور الحزمة). أي خط مستقيم a في الفراغ يقطع هذه المستويات في أربع نقاط $M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4$ تحقق أن النسبة التبادلية $[M_1\ M_2\ M_3\ M_4]$ لا تتغير بتغير الخط المستقيم a.

تعريف (٢٩.١١):

النسبة التبادلية لأربع مستويات $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4$ يرمز لها بالرمز $[\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4]$ وتعطى من

$$[\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4] = [M_1,M_2,M_3,M_4] \qquad (11.26)$$

تعريف (٣٠.١١):

يقال أن زوج النقاط A, B على خط إسقاطي يقسم زوج النقاط C, D (على نفس الخط) توافقياً harmonically إذا تحقق

$$[A\ B\ C\ D] = -1 \qquad (11.27)$$

مثال (١١.١٦):

أوجد النسبة التبادلية لأربع خطوط مستقيمة m_1, m_2, m_3, m_4 محددة بالبارامترات k_1, k_2, k_3, k_4 على الترتيب في حزمة الخطوط المستقيمة.

الحل:

نعتبر حزمة مركزها $G(x_o, y_o)$. معادلة أي شعاع في الحزمة يمكن أن يعبر عنها في الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة كالآتي:

$$y - y_o = k\,(x - x_o) \qquad (11.28)$$

حيث $k \in \mathbb{R}$ بارامتر يحدد شعاع في الحزمة.

نفرض أن m_1, m_2, m_3, m_4 أربع أشعة من الحزمة المعطاة وأن k_1, k_2, k_3, k_4 هي قيم البارامترات المناظرة لهذه الأشعة والمحددة بالمعادلة (11.28).

نفرض أن محور X قطع الأشعة في النقاط

$$M_1(x_1, 0)\ ,\ M_2(x_2, 0),\ M_3(x_3, 0),\ M_4(x_4, 0)$$

ومن تعريف النسبة التبادلية لأربع أشعة فإن :

$$[m_1\ m_2\ m_3\ m_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \Big/ \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} \qquad (11.29)$$

الإحداثيات x_i على محور x تتحدد بوضع $y = 0$ في المعادلة (11.28) والتي تؤدي إلى

$$x_i = x_o - \frac{y_o}{k_i}, i = 1, 2, 3, 4$$

بالتعويض في النسبة (11.29) نحصل على

$$[m_1\ m_2\ m_3\ m_4] = \frac{k_3 - k_1}{k_2 - k_3} \Big/ \frac{k_4 - k_1}{k_2 - k_4} \qquad (11.30)$$

وهذه العلاقة تعطي النسبة التبادلية لأربع أشعة بدلالة البارامترات المناظرة للأشعة.

(١١.٩) هندسة زمرة التحويلات الإسقاطية:

الهدف الأساسي من هذا الجزء هو دراسة الخواص الهندسية المناظرة لزمر التحويلات الإسقاطية.

درس الطالب في الجبر خواص الزمر وأنواع الزمر وخصوصاً زمرة الرواسم أو زمرة التحويلات وهي مجموعة التحويلات غير الشاذة المعرفة على مجموعة $M \neq \phi$ أي هي مجموعة تحويلات من نوع تناظر احادي bijection (1-1 and onto). وهذه المجموعة لها عنصر محايد هو راسم التطابق أو تحويل الوحدة identity mapping وكل عنصر (تحويل) له معكوس هو أيضاً تناظر أحادي. مجموعة التحويلات لا تحقق خاصة الإبدال بمعنى :

$$f_1, f_2 : M \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} M, x \in M \quad \text{حيث} \quad f_1(f_2(x)) \neq f_2(f_1(x))$$

دعنا الآن ندرس زمرة هندسة ما. ولهذا نفرض أن M مجموعة غير خالية، G زمرة التحويلات غير الشاذة من M إلى M. نسمي المجموعة M بالفراغ وعناصرها بالنقاط وأي مجموعة جزئية من نقاط M تسمى شكل F figure. الشكل F_1 يقال أنه يكافئ أو يطابق الشكل F_2 إذا وجد تحويل في G يرسم F_1 إلى F_2.

من الشروط الأساسية للزمرة نجد أن :

(١) إذا كان الشكل F_1 يكافئ الشكل F_2 فإن F_2 يكافئ F_1 equivalent (وذلك باستخدام التحويل العكسي).

(٢) إذا كان الشكلان F_1, F_2 يكافئا شكل ثالث F_3 فإن الشكلان F_1 ، F_2 كل منهما يكافئ الآخر (من التحويل والتحويل العكسي وضرب (محصلة) التحويلات).

واضح أن علاقة يكافئ تحقق خاصية أنها عاكسة reflexivity وناقلة transitivity.

الخصائص (١)، (٢) هي الشروط الأساسية لتعريف زمرة التحويلات وهي ضرورية لضمان الخصائص الأساسية لتكافؤ الأشكال. بناءً على هذا فقد أعطى فيلكس كلاين Felix Klein التعريف الآتي:

تعريف (٣١،١١):

الخصائص الهندسية geometrical properties نعني بها تلك الخصائص للأشكال في الفراغ M والكميات المرتبطة بالأشكال والتي لا تتغير invariant تحت أي تحويل من مجموعة تحويلات معطاة G ومعرفة على M.

ملاحظة (١١-٢٠):

التعريف السابق صحيح لكل الأشكال الهندسية المتكافئة بمعنى أن الأشكال المتكافئة لها نفس الخواص الهندسية.

فجر كلاين Felix Klein عمله الشهير حيث تعامل مع الهندسات المختلفة على أنها نظريات للامتغيرات بالنسبة لزمر مناظرة مكنته من تصنيف الهندسات المختلفة وإعطاء العلاقات العميقة بينها. هذا الأسلوب أسماه برنامج كلاين الموسع Klein's Enlarger Program، وأصبح تطبيق الأسلوب النظري للزمرة group-theoretic principles يشمل أفرع الهندسة المختلفة.

زمرة التحويلات التي نعتبرها هنا هي زمرة التحويلات الإسقاطية والتي تم تقديمها في (١١-٤) وبالتالي فإن الدراسة التي نتعرض لها الآن هي هندسة مجموعة التحويلات الإسقاطية أي هي الهندسة الإسقاطية projective geometry.

ولنبدأ الدراسة في حالة المستوى الإسقاطي P_2 (مجموعة النقاط المحددة بثلاثي (x_1, x_2, x_3) من الإحداثيات الإسقاطية المتجانسة). تحويل التناظر الأحادي من المستوى P_2 إلى نفسه والذي يأخذ النقطة $M(x_1, x_2, x_3) \in P_2$ إلى النقطة $M'(x'_1, x'_2, x'_3) \in P_2$ له الصورة:

$$\rho' x'_i = \sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_j \ , \ i = 1,2,3 \qquad (11.31)$$

حيث $\rho' \neq 0$ ، $Det\ (C_{ij}) \neq 0$.

التحويل (11.31) يسمى تحويل إسقاطي أو إسقاطية للمستوى P_2. وأثبتنا كذلك أن معكوس إسقاطية هو إسقاطية وضرب (محصلة) إسقاطيتين هو إسقاطية. هذا يمكننا من أن نقرر أن مجموعة الإسقاطيات (11.31) تكون زمرة تسمى زمرة الإسقاطيات أو الزمرة الإسقاطية projective group.

كل تحويل من زمرة التحويلات (11.31) يتحدد باختيار قيم محددة للثوابت الحقيقية C_{ij}. لكن بما أن العلاقات (11.31) متجانسة، إذاً لتعريف التحويل (11.31) يكفي أن نحدد ثماني نسب من C_{ij}. النسب الثمانية تسمى بارامترات

parameters الزمرة الإسقاطية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية. ولنرمز لهذه الزمرة بالرمز $PG(2,\mathbb{R})$ لتشير إلى زمرة التحويلات الإسقاطية المعرفة على الفراغ الإسقاطي ثنائي البعد (المستوى) والمعرف على الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

في الحالة التي فيها كل تحويل من زمرة تحويلات يتحدد عن طريق تحديد عدد n من البارامترات المستقلة، فإن الزمرة تسمى زمرة n البارامترية n-parameter group. إذاً الزمرة الإسقاطية $PG(2,\mathbb{R})$ على المستوى هي زمرة 8 البارامترية 8-parameter group.

وعليه فإننا نعيد تعريف الهندسة الإسقاطية كالآتي:

تعريف (١١-٣٢):

الهندسة الإسقاطية هي هندسة الزمر الإسقاطية.

من الأساسيات الهامة في دراسة هندسة الزمرة الإسقاطية هو دراسة اللامتغيرات invariants للزمرة. ومن (١١-٨) يمكننا صياغة النظرية الآتية:

نظرية (١١-١٦):

النسبة التبادلية لأربع نقاط على خط إسقاطي واحد collinear لا تغيرية بالنسبة للزمرة الإسقاطية.

تمارين (١١)

(١) عرف مسقط شكل على مستوى ومن ثم عرف كل من الخصائص الإسقاطية - الهندسة الإسقاطية - والكميات الإسقاطية.

(٢) اشرح معنى هذا النص : القطاعات المخروطية هي عناصر في الهندسة الإسقاطية ولكن أنواع أشكالها ليست عناصر في الهندسة الإسقاطية.

(٣) من تعريف الفراغ الإقليدي هل يمكنك تعريف كل من الخط الإسقاطي والمستوى الإسقاطي والفراغ الإسقاطي وذلك باستخدام عناصر اللانهاية (العناصر المثالية).

(٤) اذكر أحد الاختلافات الموجودة بين الهندسة الإقليدية والهندسة الإسقاطية.

(٥) عرف الإحداثيات الإسقاطية لنقطة على خط إسقاطي ومن ثم عرف إحداثياتها المتجانسة.

(٦) عرف الإحداثيات الإسقاطية لنقطة في مستوى إسقاطي ومن ثم عرف إحداثياتها المتجانسة.

(٧) عرف الإحداثيات الإسقاطية لنقطة في الفراغ الإسقاطي ومن ثم عرف إحداثياتها المتجانسة.

(٨) وضح الفرق بين نظام الإحداثيات الإسقاطية ونظام الإحداثيات المتجانسة في الفراغ الإسقاطي.

(٩) وضح ماذا نعني بأن كل نقطة على الخط الإسقاطي (المستوى الإسقاطي والفراغ الإسقاطي) يوجد لها عدد لانهائي من الإحداثيات المتجانسة.

(١٠) اكتب معادلة القطع المخروطي العام في المستوى بدلالة الإحداثيات المتجانسة.

(١١) اكتب معادلة سطح الدرجة الثانية (السطح التربيعي) في الفراغ بدلالة الإحداثيات المتجانسة.

(١٢) عرف الإسقاطية من خط إسقاطي إلى خط إسقاطي أخر.

(١٣) عرف الإسقاطية من مستوى إسقاطي إلى مستوى إسقاطي أخر.

(١٤) بين أن معكوس الإسقاطية هو إسقاطية.

(١٥) بين أن محصلة إسقاطيتين هي إسقاطية.

(١٦) وضح مدى التشابة بين الإسقاطية والحركة في الفراغ الإقليدي.

(١٧) بين أن الإسقاطية تحويل خطي.

(١٨) بين أن الإسقاطية في الإحداثيات الإسقاطية غير المتجانسة يمكن تمثيلها بدالة كسرية خطية.

(١٩) عرف الإرتداد وبين أنه يختلف عن راسم الوحدة في الحالة العامة.

(٢٠) أوجد النقاط اللا تغيرية للإرتداد.

(٢١) بين أن النسبة التبادلية لا تغيرية بالنسبة للإسقاطيات.

(٢٢) استنتج الصيغ التي تعطي النسبة التبادلية لأربع مستويات.

(٢٣) بين أن الإرتداد هو تحويل خطي.

(٢٤) بين أن مجموعة الإرتدادات تكون زمرة مع عملية تحصيل التطبيقات.

(٢٥) بين أن مجموعة التحويلات الكسرية الخطية تكون زمرة مع عملية تحصيل التطبيقات.