الباب العاشر

تحويلات هندسية لا إقليدية

Non Euclidean Geometric Transformation

التحويلات الهندسية الإقليدية هي التحويلات الأكثر شيوعاً واستعمالاً مثل الانعكاس والانتقال والدوران وهي تحويلات تحفظ مقياس الأطوال والزوايا.

في هذا الباب نقدم نوعين من التحويلات إحداهما لا يحافظ على الأطوال ويسمى مغير البعد scaling والآخر لا يحافظ على مقياس الزوايا ويسمى القص shearing.

(١٠.١) مغير البعد والتشابه: Scaling

نفرض أن o نقطة ثابتة في المستوى وأن λ عدد مختلف عن الصفر (موجب أو سالب) ونعرف الراسم $S_o(\lambda)$ في المستوى $\mathbb{R}^2$ كالتالي:

النقطة A وصورتها A' تقع على مستقيم مار بالنقطة o أي أن o, A, A' تقع على استقامة واحدة. وبعبارة أخرى:

أي ثنائي A, A' يحقق العلاقة

$$\left|\overline{oA'}\right| = \lambda \left|\overline{oA}\right|$$

يعرف راسم جديد يسمى تكبير أو تصغير (مغير البعد) ويرمز له بالرمز $S_o(\lambda)$ ، o تسمى مركز التكبير، λ عاملة القياسي. لذا فإن

$$\begin{aligned} \overline{oA} &\longrightarrow \overline{oA'}, \left|\overline{oA'}\right| = \lambda \left|\overline{oA}\right| \\ \overline{oF} &\longrightarrow \overline{oF'}, \left|\overline{oF'}\right| = \lambda \left|\overline{oF}\right| \end{aligned} \qquad (10.1)$$

ومنه يكون:

$\lambda > 0$ هذا يعني أن A', A تقع في جهة واحدة من o.

$\lambda < 0$ هذا يعني أن o تقع بين A', A .

وإذا كانت $\lambda > 1$ فإن $S_o(\lambda)$ يسمى تكبير وإذا كانت $\lambda < 1$ فإن $S_o(\lambda)$ يسمى تصغير.

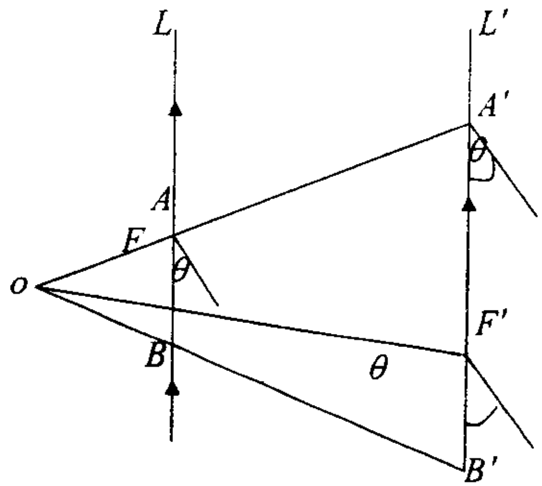
$\lambda=-1$ فإن التكبير $S_o(-1)$ يعادل دوران بزاوية π ومركز الدوران هو مركز التكبير.

عندما $\lambda=1$ فإن $S_o(1)$ تسمى تطابق أي أن الشكلين متطابقين.

إذا علم $A \longrightarrow A'$ فمن السهل إيجاد صورة B وذلك برسم مستقيم من A' موازياً AB ليلاقي oB في B' وعلى ذلك فإن

$$\frac{\left|\overline{oB'}\right|}{\left|\overline{oB}\right|}=\frac{\left|\overline{oA'}\right|}{\left|\overline{oA}\right|}=\lambda$$

إذا علم تكبير يرسل A إلى A' ، B إلى B' فإنه يمكن تعيين مركز التكبير (مغير البعد). في شكل (١٠.١) يتضح أنه إذا كانت F نقطة تتحرك على المستقيم L فإن F' تتحرك على المستقيم L' .



شكل (١٠.١)

ملاحظة (١٠.١):

مغير البعد يتحدد بتحديد مركزه وبمعامله القياسي.

خواص مغير البعد (تكبير أو تصغير) Dilation or homothety

١. راسم تناظري أحادي، يحفظ استقامة الخطوط والتوازي، يحفظ مقياس الزوايا.

٢. النسبة بين القطع المستقيمة المتناظرة هي λ فإذا كانت λ موجب كانت القطع

المستقيمة المتناظرة في نفس الاتجاه، وإذا كانت λ سالبة كانت القطع المستقيمة المتناظرة في اتجاهين متضادين.

٣ـ معكوس التحويل $S_o(\lambda)$ هو $S_o(\frac{1}{\lambda})$ لأن

$$\begin{aligned} &S_o(\lambda): \overline{oA} \longrightarrow \overline{oA'}\ , \left|\overline{oA'}\right| = \lambda\left|\overline{oA}\right| \\ &S_o(\tfrac{1}{\lambda}): \overline{oA'} \longrightarrow \overline{oA}\ , \left|\overline{oA'}\right| = \frac{1}{\lambda}.\lambda\left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{oA}\right| \end{aligned} \qquad (10.2)$$

٤ـ النسبة بين طولي صورتي قطعتين مستقيمتين كالنسبة بين طولي أصليهما ولذا فإن التكبير حافظ لنسب المسافات البينية.

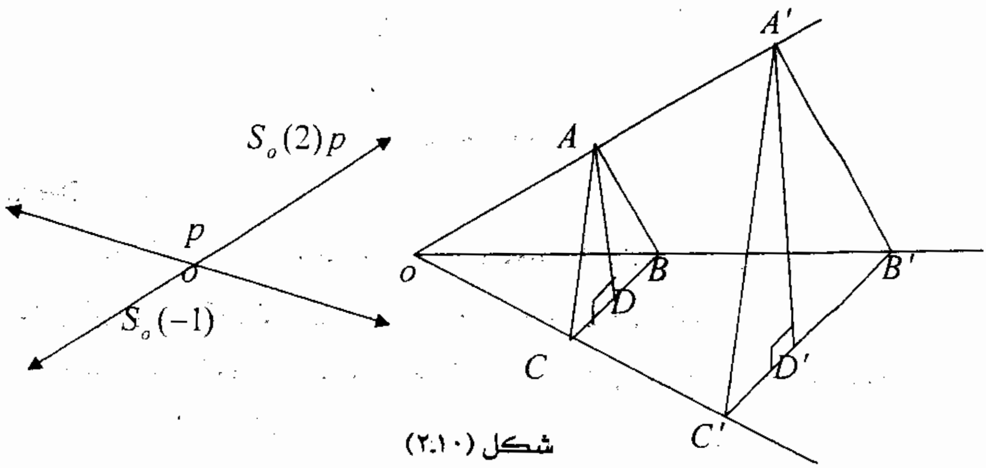
مثال (١٠ـ١):

النسبة بين مساحة المثلث وصورته هي $\frac{1}{\lambda^2}$ بمغير البعد $S_o(\lambda)$ وذلك لأن

$$S_o(\lambda): \Delta ABC \longrightarrow \Delta A'B'C'$$

في الشكل (١٠ـ٢) واضح أن $\overline{AD}$, $\overline{A'D'}$ ارتفاعات المثلث ABC وصورته $A'B'C'$ والقواعد هي $\overline{C'B'}$, $\overline{CB}$ في المثلثان $ABC, A'B'C'$ على الترتيب.

$$\begin{aligned} &S_o(\lambda): \overline{AD} \longrightarrow \overline{A'D'}\ , \left|\overline{AD'}\right| = \lambda\left|\overline{AD}\right| \\ &S_o(\lambda): \overline{CB} \longrightarrow \overline{C'B'}\ , \left|\overline{CB'}\right| = \lambda\left|\overline{CB}\right| \end{aligned}$$



شكل (١٠ـ٢)

$$\frac{\text{مساحة } \Delta ABC}{\text{مساحة } \Delta A'B'C'} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AD} \times \overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{A'D'} \times \overline{B'C'}} = \frac{1}{\lambda^2} \quad \therefore$$

ملاحظة (٢.١٠):

بالراسم $S_o(\lambda)$ يكون الشكل وصورته متشابهان أي أن الشكلين المتشابهين يمكن اعتبار أحدهما تكبير أو تصغير للآخر.

ملاحظة (٣.١٠):

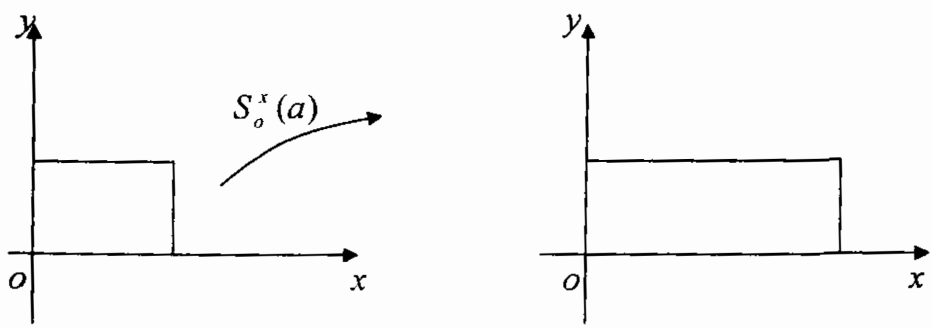
مساحة المثلث $A'B'C'$ تساوي مساحة المثلث ABC مضروباً في مربع العامل القياسي لمغير البعد.

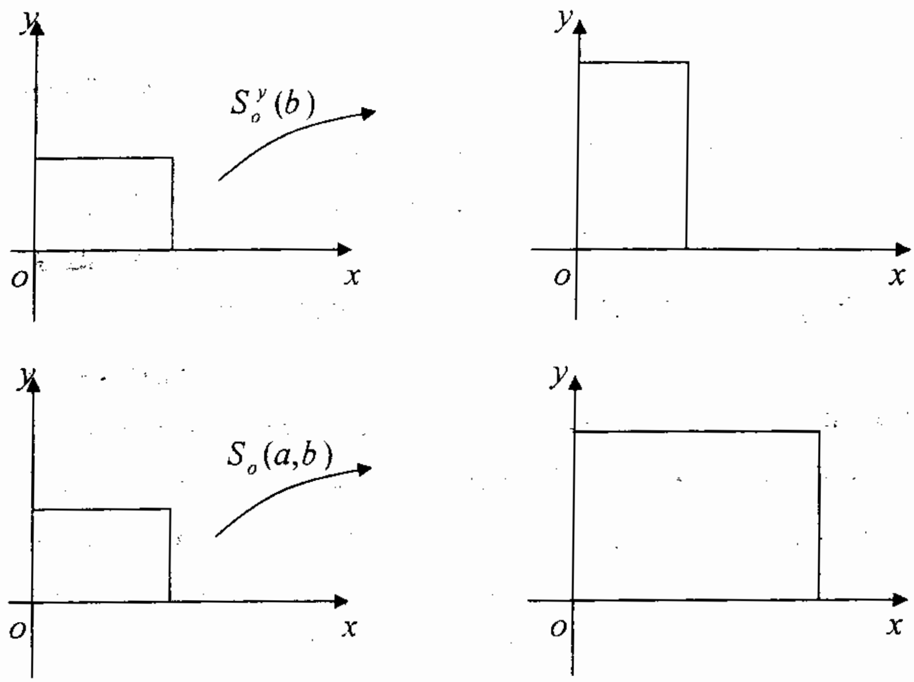
في نظام الإحداثيات الكرتيزي أي نقطة (x, y) ممكن تغير إحداثياتها لتصبح (ax, y) أو (x, by) أو (ax, by) أي أننا نحصل على أشكال مختلفة لمغير البعد على حسب اتجاه التغير هل هو محور x أو محور y أو المحورين معاً. فمثلاً تحويل مغير البعد في الحالات السابقة يأخذ الصور على الترتيب:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{10.3}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

كما هو موضح في شكل (٣.١٠).





شكل (٣.١٠)

وباستخدام الإحداثيات (x,y) يكون $S_o^{(a,b)}(x,y)=(ax,by)$ وبالتالي فإن معكوسه S_o^{-1} يعرف كالآتي:

$$S_o^{-1}(x,y)=(\frac{1}{a}x,\frac{1}{b}y)$$

حيث

$$S_o^{-1}S_o(a,b)(x,y)=S_o^{-1}(S_o(a,b)(x,y))$$

$$=S_o^{-1}(ax,by)=(\frac{1}{a}.ax,\frac{1}{b}.b\ y)$$

$$=(x,y)$$

$$\therefore\ S_o^{-1}(a,b)S_o(a,b)=I$$

بالمثل

$$S_o(a,b)S_o^{-1}(a,b)=I$$

ملاحظة (٤.١٠):

إذا كان $a=b$ فإن مغير البعد يسمى مغير بعد منتظم uniform scale أما إذا كان $a\neq b$ فإنه يسمى غير منتظم non uniform scale.

إذا كان مركز مغير البعد مختلف عن نقطة الأصل نتبع الخطوات الآتية:

١. حول الشكل بالانتقال $T\,(-c_1,-c_2)$ لينطبق مركز مغير البعد على نقطة الأصل.

٢. طبق مغير البعد $S_o(a,b)$ على الشكل.

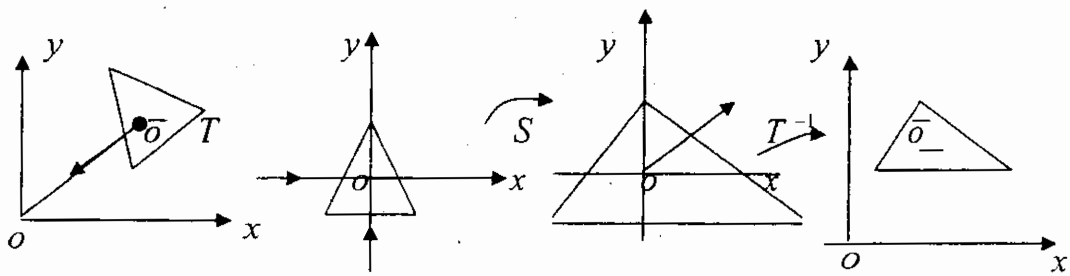
٣. انقل الشكل إلى أصله بالانتقال إلى العكس (معكوس الانتقال)

$$T^{-1}(-c_1,-c_2)=T\,(c_1,c_2)$$

وبالتالي يكون مغير البعد في شكله العام

$$S_o(a,b)=T\,(c_1,c_2)S_o(a,b)T\,(-c_1,-c_2)$$

حيث $\bar{o}(c_1,c_2)$ مركز مغير البعد كما هو موضح في شكل (١٠-٤).



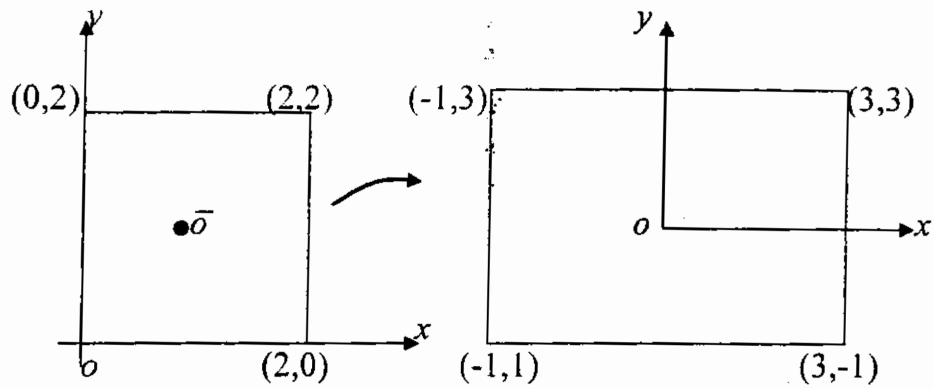
شكل (١٠-٤)

مثال (١٠-٢):

أوجد صورة المربع الذي طول ضلعه 2 cm وأحد رؤوسه عند نقطة الأصل بمغير بعد مقياسه 2 ومركزه $\bar{o}=(1,1)$ في اتجاهي محاور الإحداثيات.

الحل:

مغير البعد حول المركز $\bar{o}$ لا يغير المركز. نختار رؤوس المربع منطبقة على النقاط $(0,0)$، $(2,0)$، $(2,2)$، $(0,2)$ كما هو موضح في شكل (١٠-٥) حيث مغير البعد هو $S_o(2,2)$.



شكل (١٠-٥)

نقوم بنقل المركز $\bar{o}$ إلى نقطة الأصل o بالانتقال $T(-1,-1)$ ثم بمغير البعد $S_o(2,2)$ ثم بانتقال $T(1,1)$ إلى الأصل لنحصل على

$$S_{\bar{o}}(2,2)(x,y) = T(1,1)S_o(2,2)T(-1,-1)((x,y))$$
$$= T(1,1)S_o(2,2)((x-1,y-1))$$
$$= T(1,1)((2(x-1),2(y-1))$$
$$= (2(x-1)+1,2(y-1)+1)$$
$$S_{\bar{o}}(2,2)(x,y) = (2x-1,2y-1)$$

وبالتعويض في هذه القاعدة بإحداثيات رؤوس المربع نحصل على:

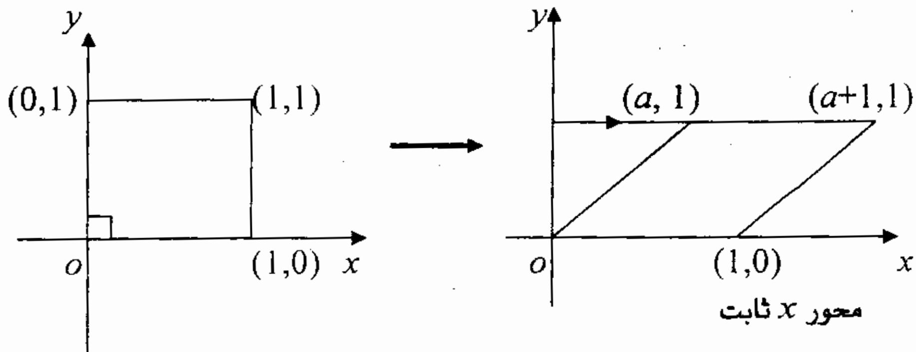
$$S_{\bar{o}}((2,2),((0,0)) = (-1,-1)$$
$$S_{\bar{o}}(2,2)((2,0)) = (3,-1)$$
$$S_{\bar{o}}(2,2)((2,2)) = (3,2)$$
$$S_{\bar{o}}(2,2)((0,2)) = (-1,3)$$

(٢.١٠) القص Shear

القص تحويل هندسي لا يحافظ على مقاييس الزوايا ويعرف على أنه انتقال لأحد الإحداثيات لنقطة في المستوى أو الفراغ بحيث يتناسب مع قيمة الإحداثي الأخر لنفس النقطة.

(١٠.٢.١) القص في المستوى:

إذا اعتبرنا النقطة (x, y) بعد القص في اتجاه y تصبح $(x + ay , y)$ وبعد القص في اتجاه x تصبح $(x , y + bx)$. هذه الانتقالات لإحداثيات النقاط تغير شكل الشيء الهندسي بمعاملات القص a، b في الاتجاهات x، y على الترتيب كما هو موضح في شكل (١٠-٦).



شكل (١٠-٦)

وبالتالي يمكن كتابة التحويل للقص sh_x ، sh_y في اتجاه محور x ومحور y على الترتيب في الصورة المصفوفية كما يلي:

$$sh_x : \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (10.4)$$

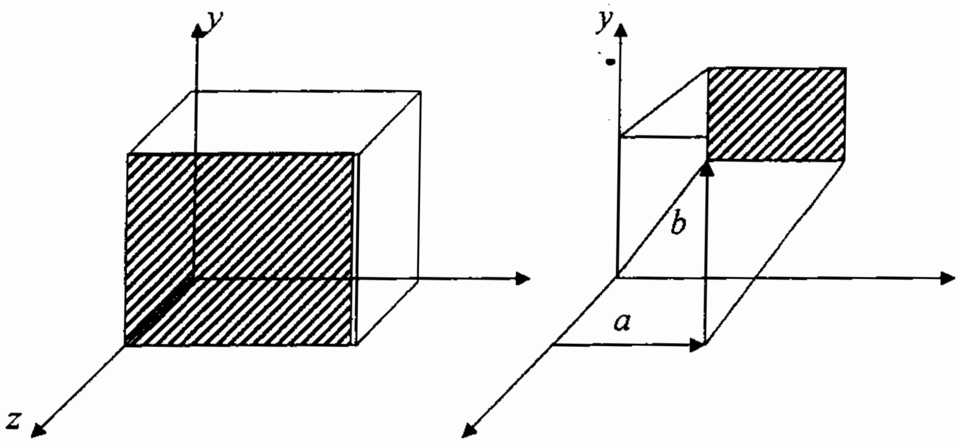
$$sh_y : \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (10.5)$$

(١٠.٢.٢) القص في الفراغ:

في الفراغ الاقليدي $\mathbb{R}^3$ يمكن تعريف القص وليكن في اتجاه محور z ونرمز له بالرمز sh_z (الإحداثي z لا يتغير) ويعطى من

$$sh_z : \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (10.6)$$

هذا القص يوازي المستوى xy بالبارامترات a في اتجاه محور x، b في اتجاه محور y كما هو موضح في شكل (١٠-٧).



شكل (١٠-٧)

ملاحظة (١٠-٥):

اتجاه القص في المستوى يوازي أحد محاور الإحداثيات وفي الفراغ يوازي أحد المستويات الإحداثية أي أن تأثير القص يشبه دفع pushing الشكل الهندسي في اتجاه ما (اختياري). وهذا الاتجاه يحدد بمعامل القص.

مثال (١٠-٣):

في المستوى xy يمكن دفع الشكل الهندسي في اتجاه محور x (سالب أو موجب) مع الحفاظ على اتجاه y ثابت، أو الدفع في اتجاه محور y مع الحفاظ على اتجاه محور x ثابت.

في الفراغ يمكن أن ندفع الشكل في اتجاهين من اتجاهات محاور الإحداثيات مع الاحتفاظ بالاتجاه الثالث ثابت، فمثلاً تحويل القص في كل من اتجاه محور x واتجاه محور y بمعاملات القص a، b على الترتيب مع الحفاظ على الإحداثي z ثابت يعطى من (10.7) أي أن

$$(x, y, z) \longrightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + az, y + bz, z) \quad (10.7)$$

أي أن الإحداثي z لم يتغير بينما (x, y) دفعت في الاتجاه $(a, b, 0)$ بمعامل z.

$$sh_y:\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & c & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},sh_y^{-1}:\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -c & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix} \quad (10.8)$$

وتحويل القص في اتجاه المستوى yz يعطى من

$$sh_x:\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 0\\ c & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},sh_x^{-1}:\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -b & 1 & 0\\ -c & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix} \quad (10.9)$$

مثال (١٠-٤):

- بمغير البعد (a, b) حيث $(x, y) \longrightarrow (ax, by)$. أوجد صورة المثلث ABC حيث $A=(0,0), B=(2,0), C=(2,3)$ بمغير البعد حيث $(a,b)=(2,\frac{1}{3})$.

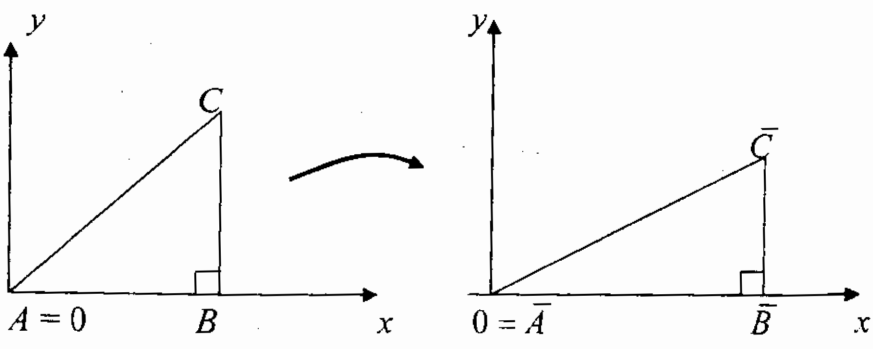
الحل:

نوجد صورة رؤوس المثلث من التعريف المعطى في المثال كما يلي:

$$A=(0.0)\longrightarrow(0.0)=\bar{A}\ ,\ B=(2,0)\longrightarrow(4,0)=\bar{B}$$

$$C=(2,3)\longrightarrow(4,3.\tfrac{1}{3})=(4,1)=\bar{C}$$

لاحظ أن $A\equiv\bar{A}$ لأن A منطبق على مركز مغير البعد (ثابت). ونوضح ذلك من الشكل (١٠-٨).



شكل (١٠-٨)

مثال (١٠-٥):

أوجد صورة المستطيل $ABCD$ بتحويل القص

$$(x,y) \longrightarrow (x+ay, bx+y)$$

حيث a, b معاملي القص في حالة $(a,b)=(2,3)$

$$A=(0,0), B=(2,0), C=(2,1), D=(0,1)$$

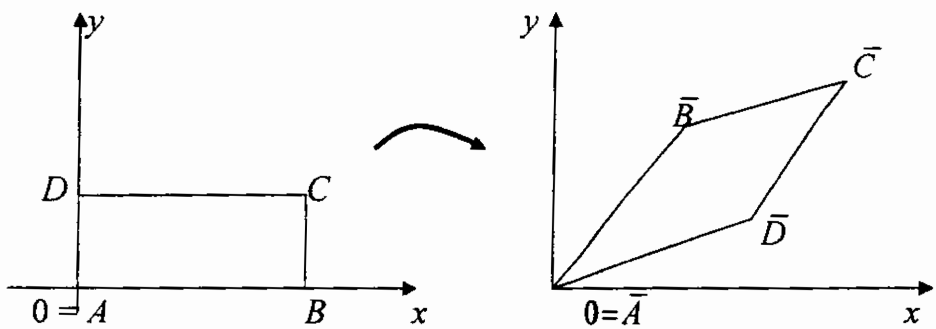
الحل:

باستخدام تحويل القص المعطى نجد أن:

$$\bar{A}=(0,0)=A \;, \bar{B}=(2+0, 3.2+0)=(2,6)$$

$$\bar{C}=(2+2.1, 3.2+1)=(4,7) \;, \bar{D}=(0+2.1, 0+1)=(2,1)$$

ونوضح ذلك في شكل (١٠ـ٩).



شكل (١٠ـ٩)

لاحظ أن زوايا الشكل تغيرت لأن التحويل لا يحافظ على الزوايا.

تعريف (١٠،١٠):

تحويل التشابه (التماثل) في المستوى A plane similarity هو تحويل للمستوى إلى نفسه بحيث إذا كان A, A' ، B, B' نقاط متناظرة فإن $\left|\overline{A'B'}\right| = r\left|\overline{AB}\right|$ ، $r \neq 0$.

نظرية (١،١٠):

مجموعة كل تحويلات التشابه للمستوى تكون زمرة.

تمارين (١٠)

أكتب كل من التحويلات الآتية في صورة علاقات مصفوفية:

(١) مغير البعد في اتجاهي x, y في حالة منتظم وغير منتظم.

(٢) القص في اتجاه محور x وكذلك في اتجاه محور y.

(٣) القص في اتجاه المستوى xy وكذلك في كل من المستويات xz، yz.

(٤) وضح أن مغير البعد (a, b) حيث $a = 1, b = 1$. (حالة خاصة من مغير بعد غير منتظم) هو انعكاس في محور y.

(٥) وضح أن مغير البعد (a, b) حيث $a = 1, b = -1$ هو انعكاس في محور x.

(٦) أوجد صورة المثلث ABC حيث $A=(3,-3), B=(12,-3), C=(6,0)$ بالتحويل

$$T(x, y) = (\tfrac{2}{3}x + 1, \tfrac{2}{3}y + 1)$$

هل T مغير بعد وإذا كان كذلك حدده وإن لم يكن كذلك ماذا يمكنك القول عن T.

(٧) في مثال (١٠-٤) أوجد مقاييس الزوايا للمثلث وصورته وتأكد من عدم تساوي الزوايا.

(٨) أوجد صورة مثلث بمغير بعد اختياري مركزه عند أحد الرؤوس.

(٩) أوجد صورة مثلث قائم الزاوية بقص في اتجاه محور ox واتجاه محور oy ومركزه عند أحد الرؤوس.

(١٠) أوجد النسبة بين مساحة مستطيل وصورته بمغير بعد مركزه عند أحد رؤوس المستطيل.