الباب التاسع

الانعكاس الانزلاقي Glide Reflection

في هذا الباب نستعرض نتيجة تحصيل الانعكاس R_L بالنسبة لخط مستقيم L وانتقال $T_{2\lambda}$ مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$.

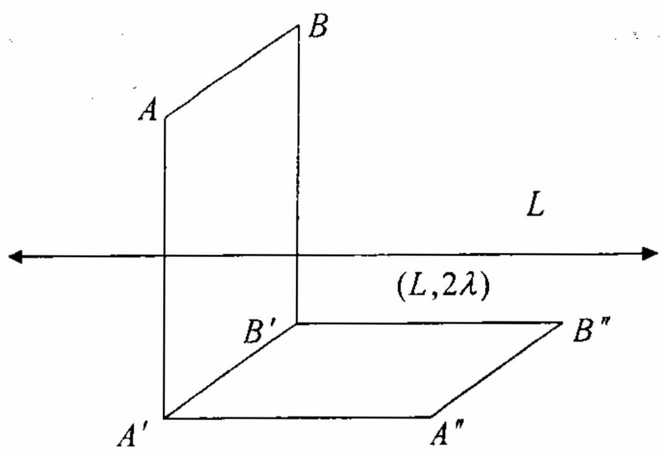
(١.٩) مقدمة:

تعريف (١.٩):

الراسم $T_{2\lambda}\circ R_L$ يسمى انعكاس انزلاقي مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ ويرمز له بالرمز g_R حيث

$$g_R = T_{2\lambda}\circ R_L = R_L\circ T_{2\lambda}$$

أي أن الانعكاس الانزلاقي إبدالي. الخط L يسمى محور الانعكاس الانزلاقي ومقياس الانتقال يسمى مقياس الانعكاس الانزلاقي كما هو موضح في شكل (١.٩).



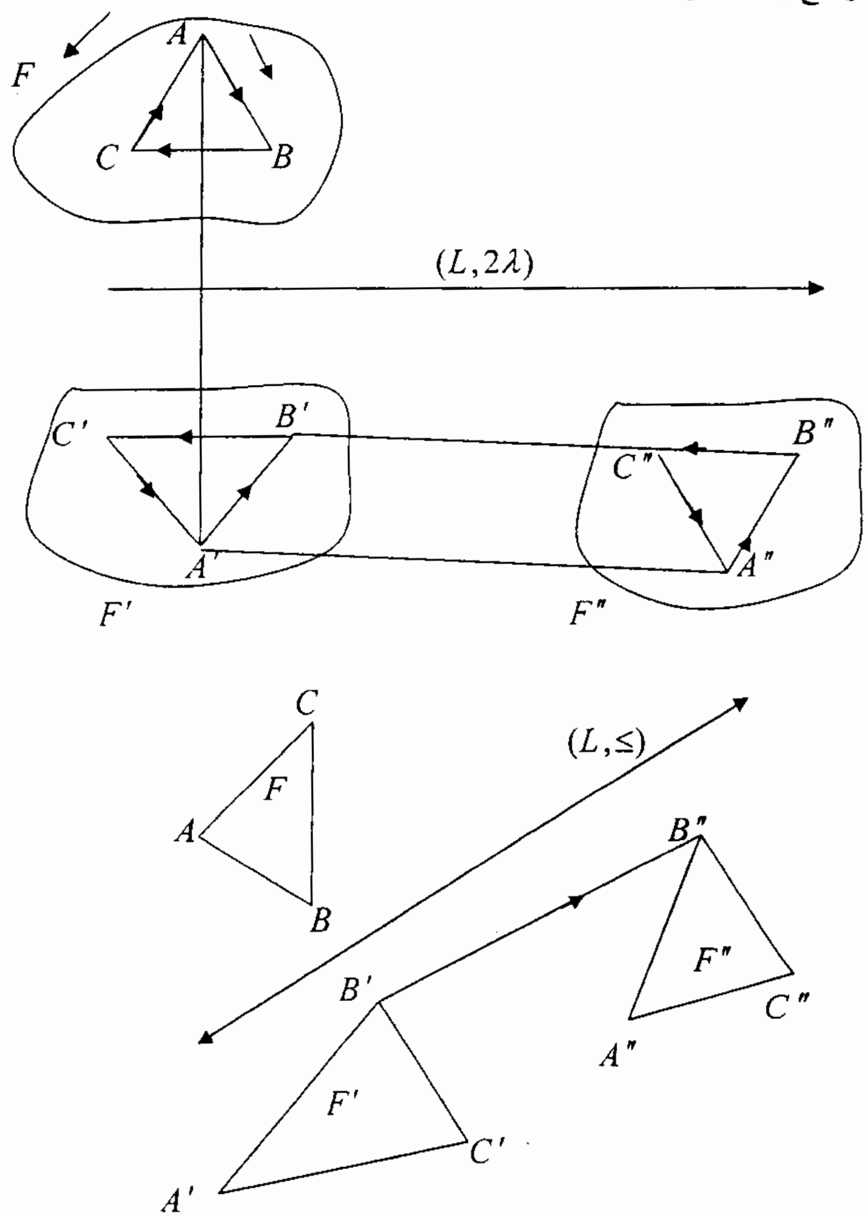
شكل (١.٩)

تعريف (٢.٩):

إذا كان F شكل هندسي فإن المجموعة F'' المعرفة بالآتي:

$$F'' = \{A'' : A'' = g_R(A)\,,\ \forall A\in F\}$$

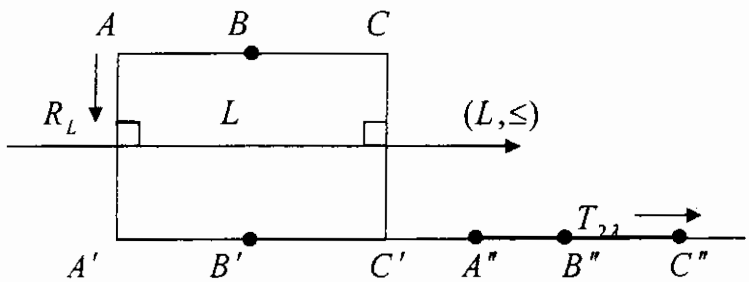
تسمى صورة الشكل F بانعكاس انزلاقي مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,2\lambda)$ كما هو موضح في شكل (٩-٢).



شكل (٩-٢)

من هذا الشكل نستطيع أن نستنتج ما يلي:

الانعكاس الانزلاقي تحويل هندسي، تساوي قياسي، يحفظ مقياس الزوايا، يعكس الاتجاه الدوراني، ويرسم كل مجموعة مستقيمة فوق مجموعة مستقيمة وكذلك فإن الانعكاس الانزلاقي يحفظ البينية والنقاط المتوسطة وليس له نقاط ثابتة ويحفظ التوازي، كما في شكل (٣.٩).



شكل (٣.٩)

وبتفسير أوضح يمكننا أن نكتب

$$g_R : \{A, B, C\} \longrightarrow \{A'', B'', C''\}$$

ويحفظ التوازي حيث المجموعة $F = \{A, B, C\}$ توازي الخط L فمن الشكل السابق نجد أن صورتها هي $F'' = \{A'', B'', C''\}$ وهي مجموعة مستقيمة أيضاً توازي الخط L.

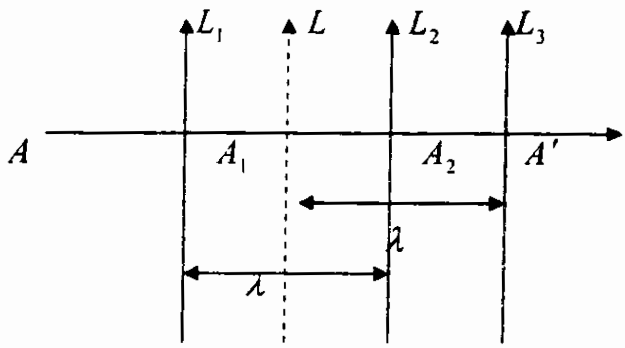
(٢.٩) خواص الانعكاس الانزلاقي:

نظرية (١.٩):

تحصيل ثلاثة انعكاسات بالنسبة لثلاث مستقيمات مختلفة إما أن يكون انعكاساً أو انعكاساً انزلاقياً.

البرهان:

نفرض أن L_1, L_2, L_3 ثلاث مستقيمات متوازية مختلفة وأن $R_{L_1}, R_{L_2}, R_{L_3}$ انعكاسات بالنسبة لهذه المستقيمات على الترتيب كما هو موضح في شكل (٤.٩).



شكل (٩ـ٤)

أولاً: إذا كانت المستقيمات L_1, L_2, L_3 متوازية. نفرض أن

$$R_{L_1} : A \longrightarrow A_1$$

$$R_{L_2} : A_1 \longrightarrow A_2$$

$$R_{L_3} : A_2 \longrightarrow A'$$

في هذه الحالة نجد أن $R_{L_2} \circ R_{L_1}$ يكافئ انتقالاً $T_{2\lambda}$ مقياسه يساوي ضعف البعد بين L_1, L_2 في اتجاه العمودي من L_1 إلى L_2 .

ولكن حيث أن $T_{2\lambda}$ يكافئ تحصيل انعكاسين بالنسبة لأي مستقيمين يوازيان L_1 ويبعدان عن بعضهما مسافة λ فإننا نستطيع أن نختار L_3 ليكون أحد هذين المستقيمين، ونفرض أن الآخر مستقيم L ويوازي L_3 ويبعد مسافة 2λ في الاتجاه من L_2 إلى L_1 (شكل (٩ـ٤)).

إذا كان R_L الانعكاس بالنسبة للخط L فإن

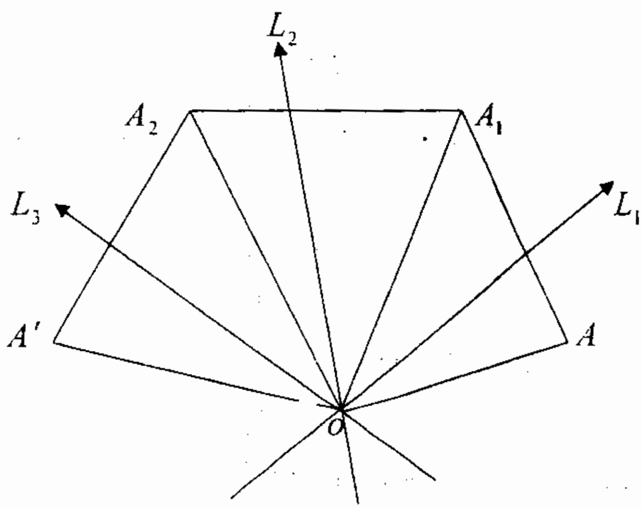
$$T_{2\lambda} = R_{L_2} \circ R_{L_1}$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} &= R_{L_3} \circ T_{2\lambda} \\ &= R_{L_3} \circ (R_{L_3} \circ R_L) \ , \ T_{2\lambda} = R_{L_3} \circ R_L \\ &= R_L \end{aligned}$$

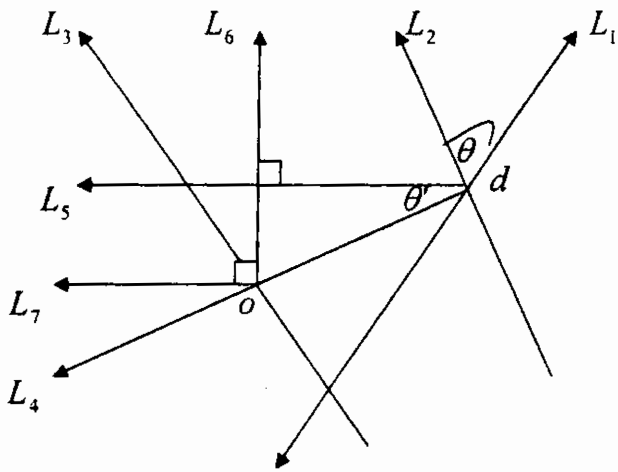
ثانياً: إذا كانت المستقيمات L_1, L_2, L_3 متقاطعة في نقطة o فإن $R_{L_2} \circ R_{L_1}$ مكافئاً لدوران $R_o(2\theta)$ مقياسه 2θ حول o حيث θ تساوي مقياس الزاوية بين L_1, L_2 (شكل (٥.٩)).

بما أن $R_o(2\theta)$ يكافئ تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين في o ويحصران بينهما زاوية مقياسها θ في هذه الحالة نستطيع أن نأخذ L_3 ليكون أحد هذين المستقيمين ونختار مستقيماً آخر L ماراً بالنقطة o ومقياس الزاوية بينه وبين L يساوي θ.



شكل (٥.٩)

ثالثاً: إذا لم يكن L_2, L_3 موازيين المستقيم L_1 فيكون التحصيل انعكاساً انزلاقياً. نفرض أن L_1 يتقاطع مع L_2 في نقطة d فيكون $R_{L_2} \circ R_{L_1}$ مكافئاً لدوران $R_d(2\theta)$ حول d حيث θ تساوي مقياس الزاوية بين L_1, L_2. هذا الدوران يكون مكافئاً أيضاً لتحصيل انعكاسين $R_{L_4} \circ R_{L_5}$ يمران بنقطة d والزاوية بينهما تساوي θ بحيث يكون $L_4 \perp L_3$ (أنظر شكل (٦.٩)).



شكل (٦.٩)

وإذاً
$$R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = R_{L_3} \circ R_{L_4} \circ R_{L_5}$$

فإذا تقاطع L_3 , L_4 في o فيمكن استبدالهما بمحورين متعامدين آخرين L_6 , L_7 يمران بالنقطة o بحيث أن

$$L_7 \parallel L_5 \ , \ L_6 \perp L_5$$

إذاً
$$R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = R_{L_3} \circ R_{L_4} \circ R_{L_5}$$
$$= R_{L_7} \circ R_{L_6} \circ R_{L_5}$$

ونعلم أن تحصيل انعكاسين إبدالي في حالة تعامد المحورين

$$\therefore \ R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = R_{L_7} \circ R_{L_5} \circ R_{L_6}$$

إذاً $R_{L_7} \circ R_{L_5}$ راسم انتقال $T_{2\lambda}$ في اتجاه محور الانعكاس L_6

$$R_{L_3} \circ R_{L_2} \circ R_{L_1} = T_{2\lambda} \circ R_{L_6} = g_R$$

= انعكاساً انزلاقياً

نتيجة (١.٩):

تحصيل انعكاسين ودوران إما أن يكون انعكاساً أو انعكاساً انزلاقياً حسب ما كان مركز الدوران على محور الانعكاس أم لا.

نتيجة (٢.٩):

تحصيل انعكاس وانتقال إما أن يكون انعكاساً انزلاقياً حسب ما كان اتجاه الانتقال عمودي على محور الانعكاس أم لا.

مثال (١.٩):

إذا كان g_R انعكاساً انزلاقياً في اتجاه محور السينات مقياسه $2a$ فأوجد قاعدة الإحداثيات له ومن ذلك أوجد صورة النقاط $(1,2), (4,4)$ بالراسم g_R عندما $a=1$.

الحل:

الانعكاس الانزلاقي يكافئ تحصيل انعكاس R_x بالنسبة لمحور x وانتقال مقياسه $2a$ في اتجاه محور x حيث أن

$$R_x : (x, y) \longrightarrow (x, -y)$$

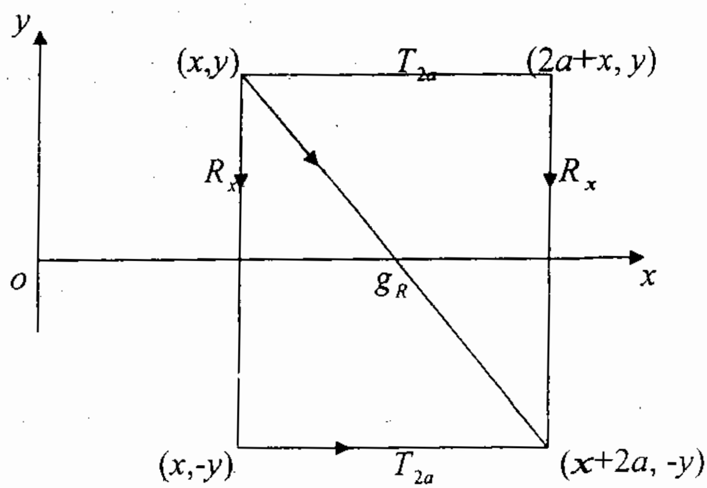
$$T_{2a} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, y)$$

فإن

$$g_R = T_{2a} \circ R_x = R_x \circ T_{2a}$$

$$g_R : (x, y) \longrightarrow (2a + x, -y)$$

كما في الشكل (٧.٩).



شكل (٧.٩)

عندما $a = 1$

$$(1,2) \longrightarrow (3,-2)$$

$$(4,4) \longrightarrow (6,-4)$$

مثال (٢.٩):

إذا كان g_R انعكاساً انزلاقياً في اتجاه محور y مقياسه $2b$ فأوجد قاعدة إحداثيات له، ثم أوجد صورة النقاط $(1,2)$، $(4,4)$ بالراسم g_R عندما $b = 1$.

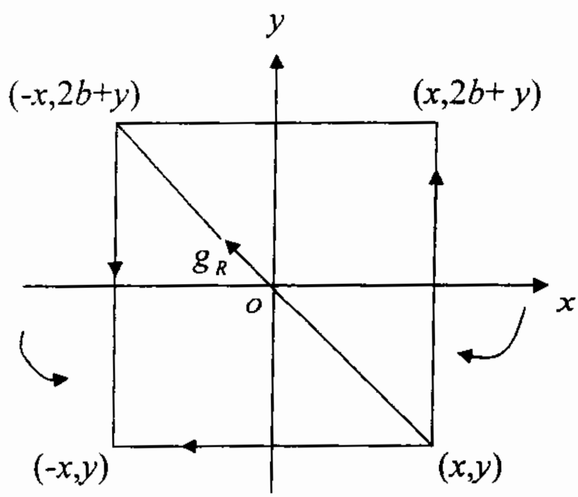
الحل:

بالمثل كما في المثال السابق نجد أن

$$g_R = R_y \circ T_{2b}$$

$$g_R : (x\,, y\,) \longrightarrow (-x\,, 2b + y\,)$$

كما بالشكل (٨.٩).



شكل (٨.٩)

عندما $b = 1$ فإن

$$(1,2) \longrightarrow (-1,4)$$

$$(4,4) \longrightarrow (-4,6)$$

مثال (٣.٩):

أوجد قاعدة إحداثيات للانعكاس الانزلاقي الذي مقياسه $2a$ في اتجاه الخط $y=b$ ومن ثم أوجد صور النقاط $(0,0), (1,1)$ بالراسم g_R في الحالة عندما $a=1$.

الحل:

الانعكاس الانزلاقي يكافئ تحصيل انعكاس $R_{y=b}$ بالنسبة للخط $y=b$ وانتقال T_{2a} مقياسه $2a$ في اتجاه الخط $y=b$ ، حيث أن

$$R_{y=b}:(x,y) \longrightarrow (x,2b-y)$$

$$T_{2a}:(x,y) \longrightarrow (2a+x,y)$$

$$g_R:T_{2a} \circ R_{y=b}:(x,y) \longrightarrow (2a+x,2b-y)$$

عندما $a=1$ ، $b=2$ فإن

$$(1,1) \longrightarrow (3,3)$$

$$(0,0) \longrightarrow (2,4)$$

تمارين (٩)

(١) إذا كان $R_o(\pi)$ دوران (نصف دورة) حول نقطة الأصل o، R_L انعكاس بالنسبة للخط المستقيم $x = 1$ أوجد إحداثيات النقطة (x, y) بكل من التحويلات الآتية:

$$R_x \ , R_L \circ R_o \ \ , R_L \ , R_o(\pi) \ , T_{2\lambda} \circ R_x$$

(٢) إذا كان $R_o(\pi), R_L$ كما في التمرين (١) فأوجد انتقالاً وانعكاساً $R_{L_1}, T_{2\lambda}$ على الترتيب بالنسبة للخط المستقيم بحيث

$$R_L \circ R_o(\pi) = R_{L_1} \circ T_{2\lambda}$$

(٣) إذا كان $R_o(\pi), R_L$ كما في التمرين (١) فأوجد صورة النقطة (x, y) بالراسم $R_o(\pi) \circ R_L$ وأوجد العلاقة بين الراسمين $R_L \circ R_o(\pi), \ R_o(\pi) \circ R_L$.

وأوجد تحويلاً هندسياً مكافئاً للراسم

$$R_o(\pi) \circ R_L \circ R_L \circ R_o(\pi)$$

(٤) أثبت أن الانعكاس الانزلاقي يكافئ تحصيل ثلاث انعكاسات بالنسبة لثلاث مستقيمات إثنان منهم متوازيان والثالث عمودي على كل من المستقيمين الأولين، هل يهم الترتيب الذي نجري فيه تحصيل الانعكاس.

(إرشاد: راجع النظرية (١.٩) الخاصة بذلك الموضوع).

(٥) أثبت أن الانعكاس الانزلاقي يكافئ تحصيل دوران $R_o(\pi)$ وانعكاس بالنسبة لخط مستقيم. هل ترتيب التحصيل مهم.

(٦) أثبت أن تحصيل $R_o(\pi)$ وانعكاساً أو العكس يكافئ انعكاساً انزلاقياً طالما كان مركز الدوران لا يقع على محور الانعكاس.

(٧) أثبت أنه إذا كان g_R انعكاساً انزلاقياً فإن

$$g_R^2 = g_R \circ g_R$$

يكافئ انتقالاً. صف هذا الانتقال.