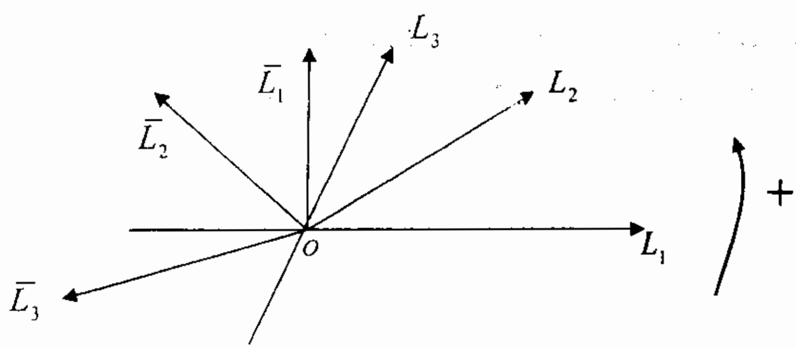
الباب الثامن

الدوران Rotation

في هذا الباب نقدم أحد التحويلات الهندسية التي تحفظ الأطوال (تساوٍ قياسي) وله علاقة بالاتجاه الدوراني والحركة الدورانية. هذا التحويل يسمى الدوران.

(١.٨) مقدمة:

أحضر ورقة رسم P واختر نقطة o عليها ارسم ثلاث مستقيمات L_1, L_2, L_3 مارة بالنقطة o ولون كل خط بلون مختلف. ارسم هذه المستقيمات على ورقة شفافة أو قطعة بلاستيك $\bar{P}$. ضع الورقة P فوق الورقة الشفافة $\bar{P}$ بحيث ينطبق الشكلان. استخدم دبوس لعمل محور عند o عمودي على مستوى الورقة P بحيث تظل ثابتة. أدر الورقة $\bar{P}$ ربع دورة حول o وفي اتجاه ضد عقارب الساعة. إذا رمزنا للمستقيمات في الورقة $\bar{P}$ بالرموز $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ وللنقطة o بالرمز $\bar{o}$ كما هو مبين في شكل (١٨).



شكل (١٨)

فإننا نلاحظ ما يلي:

(١) $o = \bar{o}$ أي أن o ترسم فوق نفسها وهي النقطة الوحيدة التي ترسم فوق نفسها.

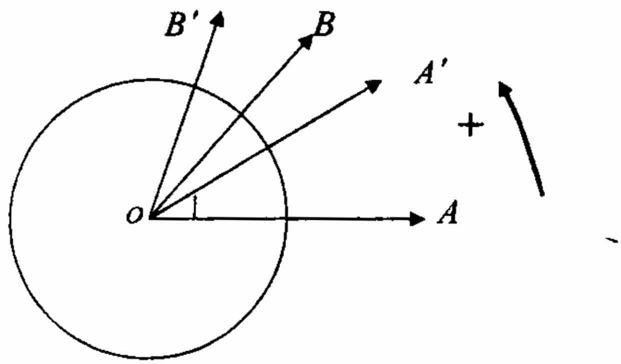
(٢) مقياس الزاوية بين كل خط مستقيم في P ونظيره $\bar{P}$ يساوي $90°$.

إذا كررنا هذه التجربة مع اختيار مراكز مختلفة وزوايا دورانية مختلفة فإننا نلاحظ :

(a) النقطة الوحيدة التي ترسم فوق نفسها هي مركز الدوران.

(b) الزوايا بين الخطوط المستقيمة وصورتها تكون متساوية المقياس.

نفرض أن $A, B \in \mathbb{R}^2$ ، وأن A', B' صورتيهما بالدوران حول نقطة $o \in \mathbb{R}^2$ في اتجاه ضد عقارب الساعة (شكل (٢٨)).



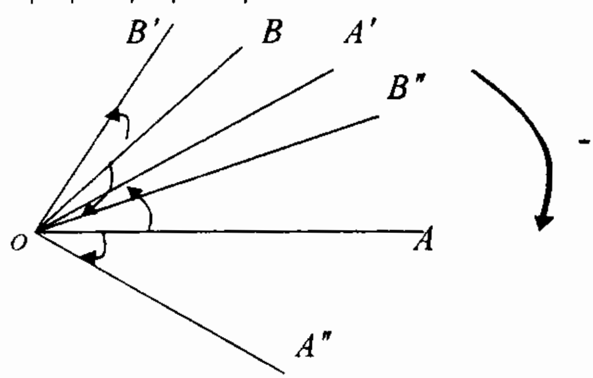
شكل (٢٨)

من هذا الشكل نجد أن:

$$\left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{oA'}\right| , \left|\overline{oB}\right| = \left|\overline{oB'}\right| , \; m \angle AoA' = m \angle BoB'$$

كذلك إذا كانت A'', B'' صورتي نفس النقطتين A, B بالدوران حول o بنفس الزاوية في اتجاه عقارب الساعة (شكل (٣٨)) فإننا نجد

$$\left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{oA''}\right| , \left|\overline{oB}\right| = \left|\overline{oB''}\right| , m \angle AoA'' = m \angle BoB''$$

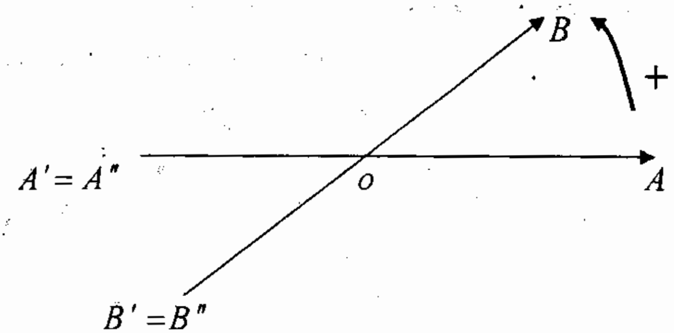


شكل (٣٨)

ويجب ملاحظة أن (من شكل (٣٨))

$$A' \neq A'' \ , B' \neq B''$$

ولكن $A' = A'', B' = B''$ إذا كان وكان فقط الدوران حول o بزاوية مقياسها 180° كما في شكل (٨-٤).



شكل (٨-٤)

(٨-٢) التعريف التحليلي للدوران:

نقدم الآن تعريف للدوران في صياغة جديدة وأكثر وضوحاً كما يلي:

تعريف (٨-١):

يقال لنقطة $A' \in \mathbb{R}^2$ أنها صورة لنقطة $A \in \mathbb{R}$ بدوران مقياسه 2θ حول نقطة $o \in \mathbb{R}^2$ إذا كان

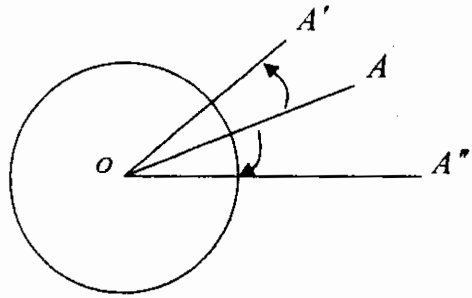
(a) $\left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{oA'}\right|$

(b) $$m\ \angle AoA' = \begin{cases} 2\theta & \text{if} \quad 2\theta \le 180^\circ \\ 360 - 2\theta & \text{if} \quad 2\theta \ge 180^\circ \end{cases}$$

ونتفق دائماً على أن اتجاه الدوران يكون دائماً ضد عقارب الساعة.

التعريف على هذا الشكل يوجد به قصور ولكن هل تحديد اتجاه الدوران يزيل القصور الموجود في هذا التعريف للإجابة على هذا السؤال نفرض أنه لدينا دوران مقياسه 2θ والمطلوب تعيين صورة $A \in \mathbb{R}^2$ بهذا الدوران.

من شكل (٨-٥) نلاحظ أن AoA', AoA'' لهما نفس المقياس أي أن النقطتين A', A'' تختار كصورة للنقطة A؟



شكل (٥٨)

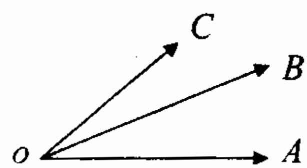
ولهذا السبب نستخدم مفهوم أخر نفرق فيه بين الزاوية AoB و BoA الا وهو الزاوية المّوجهة. وللتفريق بين الزاوية العادية والزاوية الموجهة نقدم الملاحظات الآتية:

$$\angle AoB = \angle BoA = \overrightarrow{oA} \cup \overrightarrow{oB}$$

بينما $\angle \overrightarrow{AoB} = (\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oB})$

ويجب ملاحظة أن $\angle \overrightarrow{AoB} \neq \angle \overrightarrow{BoA}$

ولكنهما تتكونان من نفس المجموعة من النقط كما في شكل (٦٨).

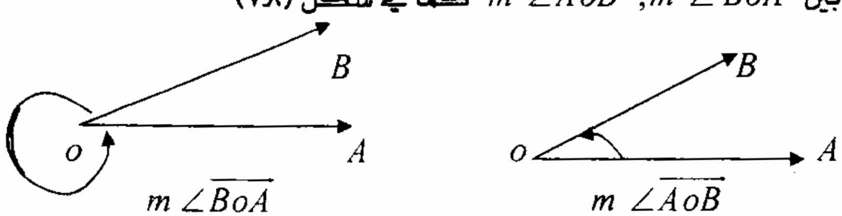


شكل (٦٨)

ونلاحظ أن

$$m\ \angle \overrightarrow{AoB} = (\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oB}),\ m\ \angle \overrightarrow{BoC} = (\overrightarrow{oB}, \overrightarrow{oC}),$$
$$m\ \angle \overrightarrow{AoC} = (\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oC}),\ m\ \angle \overrightarrow{CoB} = (\overrightarrow{oC}, \overrightarrow{oB}),$$

ونفرق في الرسم بين $m\ \angle \overrightarrow{BoA}$, $m\ \angle \overrightarrow{AoB}$ كما في شكل (٧٨)



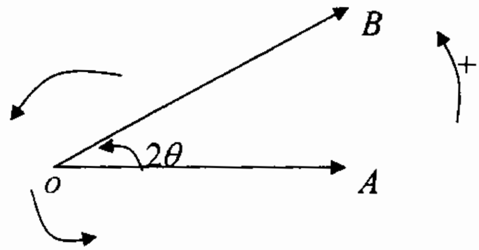
شكل (٧٨)

تعريف (٨-٢):

يعرف مقياس الزاوية الموجهة كما يلي (شكل (٨٨)).

١. إذا كانت النقاط o, A, B مرتبة في اتجاه دوران ضد عقارب الساعة فإن

$$m\ \angle\overrightarrow{AoB} = m\ \angle\ AoB = 2\theta$$



شكل (٨٨)

٢. إذا كانت النقاط o, A, B مرتبة في اتجاه دوراني مع عقارب الساعة فإن

$$m\ \angle\overrightarrow{BoA} = 360 - m\ \angle\overrightarrow{AoB}$$
$$= 360 - 2\theta$$

وعليه فإننا نعطي تعريف آخر للدوران، نرمز له بالرمز $R_{\circ}(2\theta)$ كالآتي:

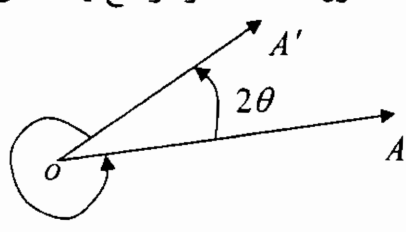
تعريف (٨-٣):

يقال لنقطة $A' \in \mathbb{R}^2$ أنها صورة نقطة $A \in \mathbb{R}^2$ بدوران مقياسه 2θ حول نقطة $o \in \mathbb{R}^2$ ويرمز له بالرمز $R_{\circ}(2\theta)$ إذا كان

$$\left|\overline{oA'}\right| = \left|\overline{oA}\right|\ ,\ m\ \angle\overrightarrow{AoA'} = 2\theta$$

ملاحظة (٨-١):

إذا كانت A' صورة A بدوران مقياسه 2θ فإن A تكون صورة A' بدوران مقياسه $360 - 2\theta$ حول o. كما هو موضح في شكل (٩٨).



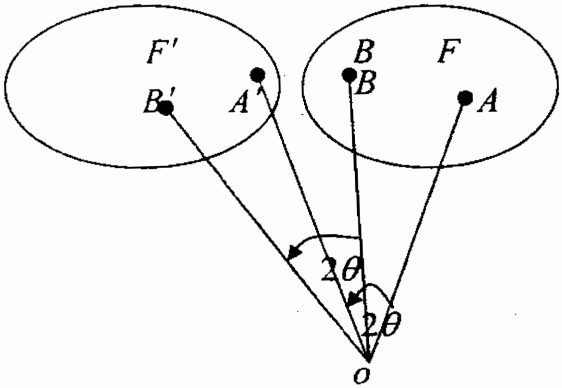
شكل (٩٨)

تعريف (٤.٨):

إذا كان F شكل هندسيس فإن المجموعة F' المعرفة كالآتي:

$$F' = \{\ A' : A' = R_{\circ}(2\theta)(A),\ A \in F\ , o\ \ \}$$

تسمى صورة F بدوران مقياسه 2θ حول o وفي هذه الحالة يقال أيضاً أن F صورة F' بدوران مقياسه $360 - 2\theta$ حول نفس النقطة (شكل (١٠.٨)).



شكل (١٠.٨)

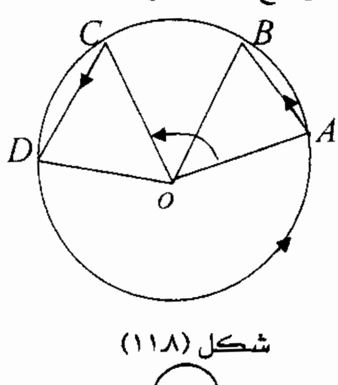
ويكتب الدوران على شكل راسم تناظري أحادي

$$R_{\circ}(2\theta) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ \ , R_{\circ}(2\theta)(A) = A' \qquad (8.1)$$

النقطة o تسمى مركز الدوران.

مثال (١.٨):

إذا كان A, B, C, D أربع نقاط مرتبة وتقع على محيط دائرة مركزها o ، $m\ \angle \overline{AoC} = \theta$ كما هو موضح في شكل (١١.٨).



شكل (١١.٨)

(i) أوجد $R_{\circ}(\theta)(A)$

(ii) إذا كان $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ أوجد $R_{\circ}(\theta)(B)$.

الحل:

(i) بما أن $m\ \angle \overline{AoC} = \theta$ ، A، C تقع على محيط دائرة أي أن $\left|\overline{oC}\right| = \left|\overline{oA}\right|$

إذاً $R_{\circ}(\theta)(A) = C$

(ii) تطابق المثلثان AoB، CoD حيث $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$ ، $\left|\overline{oD}\right| = \left|\overline{oB}\right|$ ،

$\left|\overline{oC}\right| = \left|\overline{oA}\right|$. إذاً

$$m\ (\overline{AoB}) = m\ (\overline{CoD})$$

بإضافة $m\ (\overline{BoC})$ للطرفين ينتج أن

$$m\ (\overline{AoB}) + m\ (\overline{BoC}) = m\ (\overline{CoD}) + m\ (\overline{BoC})$$

$$\theta = m\ (\overline{BoD})$$

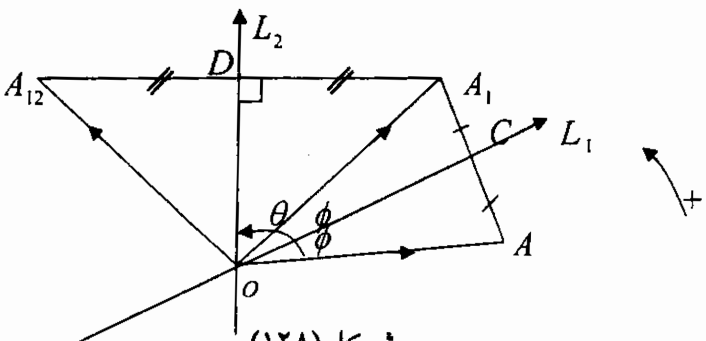
$$\therefore\ B \xrightarrow{R_o(\theta)} D \Rightarrow R_o(\theta)(B) = D$$

نظرية (١٨):

الدوران $R_{\circ}(2\theta)$ يكافئ تحصيل انعكاسين بالنسبة لخطين مستقيمين نقطة تقاطعهما تنطبق على مركز الدوران o ويحصران زاوية مقياسها 2θ .

البرهان:

نفرض أن $A \in \mathbb{R}^2$ وأن A_{12} صورتها بدوران $R_{\circ}(2\theta)$ ونفرض أن L_1, L_2 مستقيمان متقاطعان في o ويحصران بينهما زاوية مقياسها θ شكل (١٢٨).



شكل (١٢٨)

نثبت الآن أنه إذا كانت المجموعة $\{A, A_1\}$ متماثلة بالنسبة إلى الخط L_1 فإن المجموعة $\{A_1, A_{12}\}$ تكون متماثلة حول الخط L_2.

إذا كانت المجموعة $\{A, A_1\}$ متماثلة بالنسبة إلى الخط L_1 وكانت

$$\overline{AA_1} \cap L_1 = \{C\}$$

فإن
$$\left|\overrightarrow{oA}\right| = \left|\overrightarrow{oA_1}\right|, m\ \angle AoC = m\ \angle CoA_1$$

نفرض أن
$$m\ \angle AoC = \phi$$

إذاً
$$m\ \angle A_1oA_{12} = 2\theta - 2\phi$$

ومن الواضح أن (شكل (١٢٨))

$$m\ \angle A_1oD = \theta - \phi$$
$$m\ \angle DoA_{12} = \theta - \phi$$

وبالتالي فإن L_2 ينصف $\angle A_1oA_{12}$ ومن تطابق المثلثين $A_1oD, A_{12}oD$ (زاويتين وضلع) ينتج أن المجموعة $\{A_1, A_{12}\}$ متماثلة بالنسبة للخط L_2.

إذا رمزنا للانعكاسين بالنسبة للمستقيمين L_1, L_2 بالرمزين R_{L_1}, R_{L_2} على الترتيب فإن

$$A_1 = R_{L_1}(A)\ \ , A_{12} = R_{L_2}(A_1)$$

أي أن
$$R_o(2\theta)(A) = A_{12} = R_{L_2}(R_{L_1}(A_1)) = R_{L_2} \circ R_{L_1}(A)$$

وحيث أن النقطة A نقطة اختيارية وأن الدوران يعين تماماً متى علم مركزه ومقياسه فإن الدوران يكون مكافئاً لتحصيل انعكاسين بالنسبة لأي مستقيمين يمران بالنقطة o ويحصران بينهما زاوية مقياسها يساوي نصف مقياس الدوران. واتجاه الدوران يكون من L_1 إلى L_2 والترتيب مهم هنا فمثلاً $R_{L_1} \circ R_{L_2}$ يكافئ دوراناً مقياسه $360 - 2\theta$ حول o وبالتالي فإن

$$R_{L_1} \circ R_{L_2} \neq R_{L_2} \circ R_{L_1} \qquad (8.2)$$

إلا إذا كان L_1, L_2 متعامدان (نظرية (١.٦) في باب الانعكاس).

مثال (٢٨):

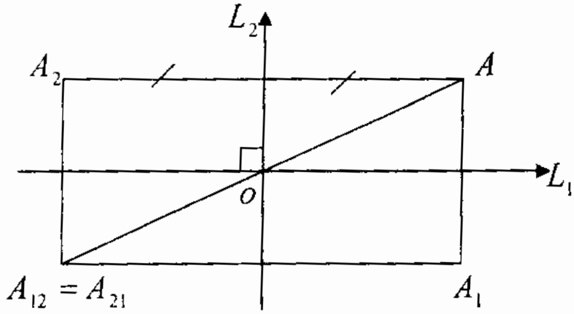
ارسم شكل (١٢٨) في حالة التعامد وبين حالة التعامد كما فهمتها من تحويل الانعكاس (شكل (١٣٨)).

الحل:

نكتب $A_{12} = R_{L_1} \circ R_{L_2}(A)$ إذاً $m \angle AoA_{12} = 2\theta$

إذاً $m \angle \overline{A_{12}oA} = 360 - 2\theta$.

إذا انطبقت $A_{12} = A_{21}$ فإن $2\theta = 360 - 2\theta$ ومنها $\theta = 90^\circ$



شكل (١٣٨)

ومن هنا نستطيع صياغة النظرية التالية:

نظرية (٨-٢):

إذا كان R_{L_1}, R_{L_2} انعكاسين للمستوى بالنسبة لخطين مستقيمين متقاطعين L_1, L_2 فإن $R_{L_1} \circ R_{L_2} = R_{L_2} \circ R_{L_1}$ إذا كان وكان فقط L_1, L_2 متعامدان وسبق أن أثبتناها في تحويل الانعكاس (نظرية (٦-١)).

(٨-٣) خواص الدوران:

(1) إذا كان A' صورة A بدوران مقياسه 2θ حول o فإن A تكون صورة A' بدوران مقياسه $360 - 2\theta$ حول o.

$$R_o(2\theta)(A) = A' \to R_o(360 - 2\theta)(A') = A \qquad (8.3)$$

(2) مركز الدوران هو النقطة الوحيدة الثابتة للراسم (الدوران) $R_o(2\theta)$.

(3) الدوران تحويل هندسي وتساوي قياسي (تناظر أحادي ويحافظ على الأطوال).

(4) الدوران يحفظ استقامة الخطوط وتوازيها ومقياس الزوايا كما يحفظ ترتيب النقاط.

(5) كل خط مستقيم مار بمركز دوران نصف دورة $(\theta = 180)$ يرسم فوق نفسه حيث أن $2\theta = 360^\circ$.

(6) الدوران يحفظ الاتجاه الدوراني.

ملاحظة (٢.٨):

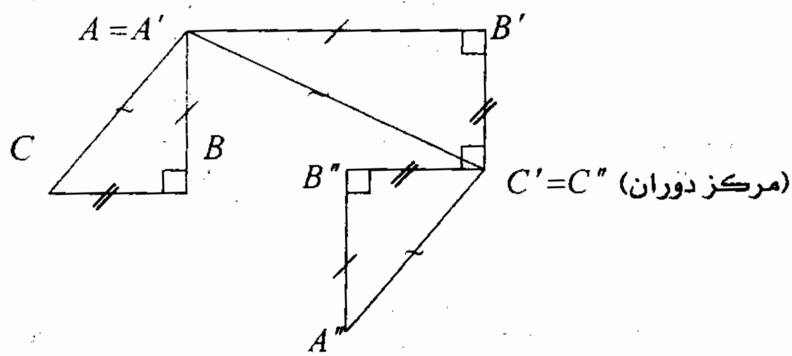
الدوران الذي مقياسه $2\theta=0$ أو $2\theta=360$ ($\theta=180$) يرسم كل نقطة فوق نفسها. أي أن هذا الدوران هو الراسم المحايد. وسنرمز له بالرمز R_e .

مثال (٣.٨):

أوجد صورة المثلث القائم ABC بدوران مقياسه $\frac{\pi}{2}$ حول A وإذا كان المثلث $\Delta=A'B'C'$ صورة المثلث $\Delta=ABC$ فأوجد صورة المثلث $A'B'C'$ بدوران مقياسه $\frac{\pi}{2}$ حول C' .

الحل:

الحل موضح في شكل (١٤.٨).



شكل (١٤.٨)

ملاحظة (٣.٨):

كل خواص الدوران يمكن التأكد منها من خلال شكل (١٤.٨).

(٤.٨) تعريف الدوران بالإحداثيات:

حيث أن الدوران يمكن التعبير عنه على أنه تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين يمران بنقطة (مركز الدوران) فإنه يمكننا استخدام النتائج التي عرضناها سابقاً في الانعكاس لإعطاء قواعد الدوران باستخدام نظام الإحداثيات في حالة خاصة كما في المثال التالي:

مثال (٨-٤): (دوران نصف الدورة أي الدوران بزاوية π):

إذا أخذنا مركز الدوران o منطبق على نقطة أصل الإحداثيات الكرتيزية ومحوري الانعكاس هما ox، oy وإذا كان R_x ، R_y هما انعكاسين في المحورين ox، oy على الترتيب وكذلك رمزنا للدوران بزاوية π ومركزه o بالرمز $R_o(\pi)$ يكون لدينا

$$R_x(x,y)=(x,-y)\ ,\ R_y(x,y)=(-x,y)$$

$$R_o(\pi)=R_x\circ R_y$$

$$R_o(\pi)(x,y)=R_x\circ R_y(x,y)=R_o(R_y(x,y))$$

$$=R_x(-x,y)=(-x,-y)$$

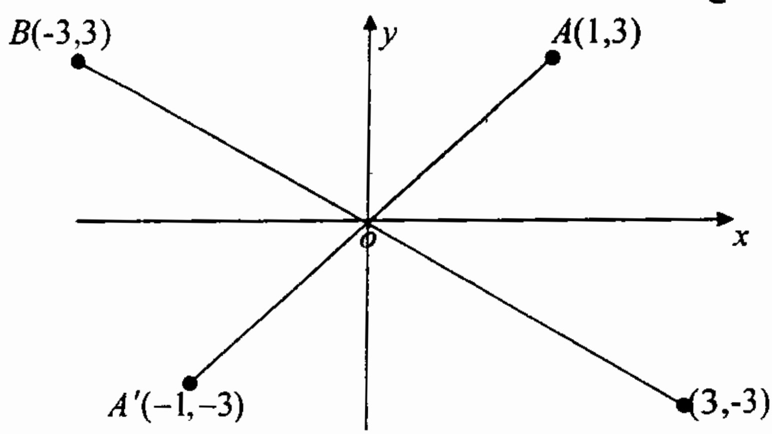
وكذلك

$R_y\circ R_x(x,y)=R_o\circ R_y(x,y)=(-x,-y)$ (محاور متعامدة من نظرية (١-٦))

إذاً القاعدة الإحداثية للدوران $R_o(\pi)$ بزاوية π هي

$$R_o(\pi)(x,y)=(-x,-y) \qquad (8.4)$$

كما هو موضح في شكل (٨-١٥).



شكل (٨-١٥)

مثال (٨-٥):

إذا كانت $o'\equiv(a,b)$ مركز دوران مختلف عن نقطة الإحداثيات أوجد $R_{o'}(\pi)(x,y)$.

الحل:

من الباب السادس والسابع رأينا أنه توجد علاقة بين محصلة انعكاسين وانتقال ولذلك نقوم بنقل نقطة الأصل o إلى نقطة أصل جديدة $o'(a,b)$ أو بعمل انعكاسين R_a, R_b في الخطوط المستقيمة المتعامدة $x = a$ ، $y = b$ على الترتيب والموضح بالقواعد الإحداثية الآتية:

$$R_a(x, y) = (2a - x, y)$$
$$R_b(x, y) = (x, 2b - y)$$

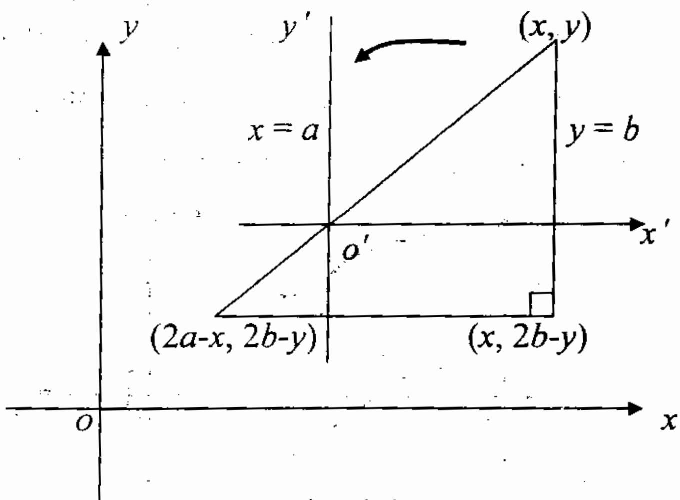
باعتبار أن

$$R_{o'}(\pi) = R_a \circ R_b = R_b \circ R_a \qquad \text{(محاور متعامدة)}$$

إذاً

$$R_{o'}(x, y) = (2a - x, 2b - y) \qquad (8.5)$$

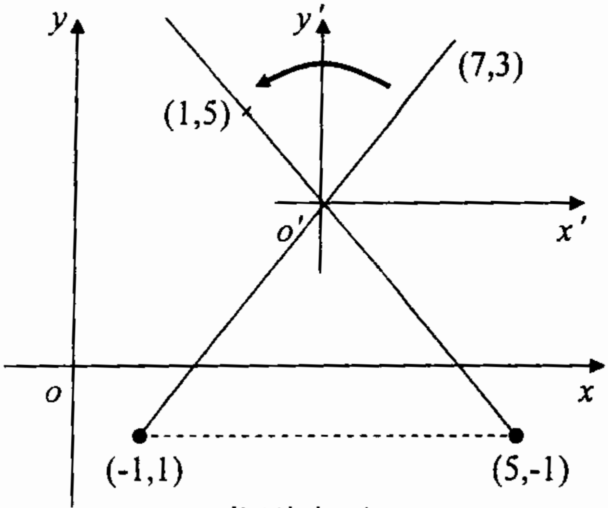
كما هو موضح في شكل (١٦٨).



شكل (١٦٨)

مثال (٨.٦):

شكل (١٧٨) يوضح صور النقاط (1,5)، (7,3) بالدوران $R_{o'}(\pi)$ باستخدام القاعدة الإحداثية (8.5) حيث $o' \equiv (3,2)$.



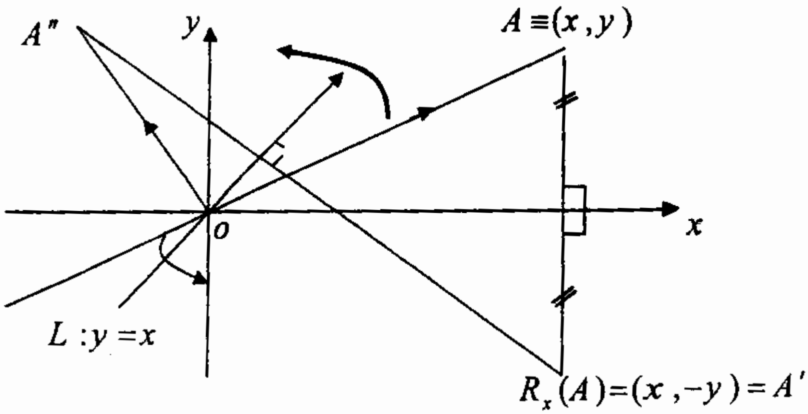
شكل (١٧٨)

مثال (٧-٨): دوران ربع الدورة (الدوران بزاوية $\frac{\pi}{2}$):

الدوران بزاوية $\frac{\pi}{2}$ حول o يمكن اعتباره مكافئاً لتحصيل بالنسبة لمحور السينات أولاً ثم المستقيم $L : y = x$ اي أن:

$$R_o(\tfrac{\pi}{2}) = R_{y=x} \circ R_x :(x,y) \longrightarrow (-y,x), R_o(\tfrac{\pi}{2})A = A'' \quad (8.6)$$

كذلك يمكن التعبير عن هذا الدوران على أنه تحصيل انعكاس بالنسبة للخط المستقيم $y = x$ ثم انعكاس في محور الصادات. كما هو موضح في شكل (١٨٨).



شكل (١٨٨)

واضح أن $A \xrightarrow{R_x} A' \xrightarrow{R_L} A''$

مثال (٨-٨):

أوجد صورة كل من النقاط الآتية:

$$(-7,3),(3,-2),(0,2),(2,-3)$$

بكل من الدورات الآتية:

$$R_o(\pi)\,,R_o(\tfrac{\pi}{2})\,,\,R_{o'}(\pi)\,,\,R_{o''}(\pi)$$

حيث $o'\equiv(1,-2),o''\equiv(-1,3)$

الحل:

$$R_o(\pi):(x\,,y\,)\longrightarrow(-x\,,-y\,)$$

إذاً

$$(3,-2)\longrightarrow(-3,2)$$
$$(2,-3)\longrightarrow(-2,3)$$
$$(-7,3)\longrightarrow(7,-3)$$
$$(0,2)\longrightarrow(0,-2)$$

$$R_o(\tfrac{\pi}{2}):(x\,,y\,)\longrightarrow(-y\,,x\,)$$

إذاً

$$(-7,3)\longrightarrow(-3,-7)$$
$$(3,-2)\longrightarrow(2,3)$$
$$(0,2)\longrightarrow(-2,0)$$
$$(2,-3)\longrightarrow(3,2)$$

نصف دورة حول النقطة (1,-2) أي $R_{o'}$ حيث

$$R_{o'}(\pi):(x\,,y\,)\longrightarrow(2a-x\,,2b\,-y\,),a=1,b=-2$$

إذاً

$$(-7,3)\longrightarrow(9,-7)$$
$$(3,-2)\longrightarrow(-1,-2)$$
$$(0,2)\longrightarrow(2,-6)$$
$$(2,-3)\longrightarrow(0,-1)$$

نصف دورة حول النقطة (-1,3) أي $R_{o''}$ حيث

$$R_{o''}(\pi):(x\,,y\,)\longrightarrow(2a-x\,,2b\,-y\,),a=-1,b=3$$

إذاً
$$(-7,3) \longrightarrow (5,3)$$
$$(3,-2) \longrightarrow (-5,8)$$
$$(0,2) \longrightarrow (-2,4)$$
$$(2,-3) \longrightarrow (-4,9)$$

مثال (٨-٩):

أوجد صورة النقطة $(x,\ y)$ بالدوران $R_o(\pi)$ باستخدام الانعكاس في الخط المستقيم $y = x$.

الحل:

متروك للطالب.

مثال (٨-١٠):

أثبت أن

(a) $(\cos(\theta+\pi)\ ,\sin(\theta+\pi) = (-\cos\theta,-\sin\theta)$

(b) $(\cos(\pi-\theta)\ ,\sin(\pi-\theta) = (\cdot\cos\theta,-\sin\theta)$

(c) $(\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\ ,\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = (\sin\theta,\cos\theta)$

الحل:

نستخدم الدورانات $R_o(\pi),R_o(\frac{\pi}{2})$
$$R_o(\pi):\theta \longrightarrow (\theta+\pi)$$

حيث
$$R_o(\pi):(\cos\theta,\sin\theta) \longrightarrow (\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi)) \qquad (1)$$

لكن الراسم $R_o(\pi)$ معرف سابقاً ومنه يكون
$$R_o(\pi):(\cos\theta,\sin\theta) = (-\cos\theta,-\sin\theta) \qquad (2)$$

من (1)، (2) ينتج صحة (a)

نحن نعلم أن $R_x(\theta) = -\theta$

لذا فإن $\therefore\ R_o(\pi):-\theta \longrightarrow \pi-\theta$

أي أن $R_o(\pi)\circ R_x:\theta \longrightarrow \pi-\theta$

أي أن

$$R_o(\pi)\circ R_x :(\cos\theta,\sin\theta) \longrightarrow (\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta)) \quad (3)$$

لكن من التعاريف السابقة نجد أن

$$R_o(\pi)\circ R_x = (R_x \circ R_y)\circ R_x$$

خاصية الدمج $= R_y \circ (R_x \circ R_x)$

تحصيل انعكاس متكرر $= R_y \circ I$

التحويلة المحايدة $= R_y$

$$\therefore R_y : (\cos\theta,\sin\theta) \longrightarrow (-\cos\theta,\sin\theta) \quad (4)$$

من (3)، (4) ينتج (b)

وأخيراً $R_x : \theta \longrightarrow -\theta \xrightarrow{R_o(\frac{\pi}{2})} (\frac{\pi}{2}-\theta)$

لذا فإن $R_o(\frac{\pi}{2})\circ R_x : \theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\theta$

أي أن

$$R_o(\tfrac{\pi}{2})\circ R_x : (\cos\theta,\sin\theta) \longrightarrow (\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta),\sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta)) \quad (5)$$

فإذا فرضنا R_1 هو انعكاس في الخط المستقيم $y=x$ فإن

$$R_1(x,y)=(y,x)$$

$R_o(\frac{\pi}{2})\circ R_x : (R_1\circ R_x)\circ R_x$ (نظرية (١٨))

أي أن $(R_1\circ R_x)\circ R_x = R_1\circ(R_x\circ R_x)$

$$= R_1\circ I$$

$$= R_1$$

لكن

$$R_1 : (\cos\theta,\sin\theta) \longrightarrow (\sin\theta,\cos\theta) \quad (6)$$

من (5)، (6) تنتج صحة العلاقة (c)

ملاحظة (٤٨):

التحويل $R_1\circ R_x$ محصلة انعكاسين في خطين مستقيمين الزاوية بينهما $\frac{\pi}{4}$ ويكافئ دوران زاويته $2.\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ (نظرية (١٨)).

الدورانات السابقة يمكن الحصول عليها باستخدام الإحداثيات في الهندسة التحليلية ذلك بإيجاد صورة نقطة (x, y) في المستوى $\mathbb{R}^2$ من خلال الدوران بزاوية 2θ ضد عقارب الساعة ولتكن (x', y') حيث

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

حيث المصفوفة

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

تعتمد على الزاوية θ في تحويل الدوران. ونسمي مصفوفة الدوران وهي مصفوفة عمودية محددها الوحدة ومعكوسها هو مدورها (البديلة) أي أن

$$A^{-1}(\theta) = A'(\theta) = A(-\theta) \ , \ |A(\theta)| = 1$$

أما إذا كانت

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

فإنها تمثل دوران مع عقارب الساعة ويكون $|A(\theta)| = -1$

وإذا وضعنا $2\theta = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ نحصل على مصفوفات الدورانات المألوفة وهي التي تم عرضها سابقاً.

(٥-٨) الدوران في الفراغ $\mathbb{R}^3$:

رأينا أن الدوران في المستوى $\mathbb{R}^2$ يتحدد من خلال مصفوفة عمودية orthogonal في الحالة العامة أي من خلال مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

تحقق الشروط $A' = A^{-1}$, $|A| = \pm 1$ أو ما يكافئ

$$\sum_k a_{ki}^2 = 1 \ , \ i = 1,2$$
$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = 0 \ ; \ i \neq j \qquad (8.7)$$

وهذه الشروط تعني أن مجموع مربعات عناصر أي صف أو عمود يساوي الوحدة وحاصل ضرب عناصر صف (عمود) في صف أخر (عمود أخر) يساوي صفر أي أنه يمكن النظر إلى الصفوف (الأعمدة) باعتبارها متجهات وحدة بمفهوم المعيار الاقليدي.

بأسلوب أخر الأعمدة تعتبر جيوب تمام الاتجاه لخطين متعامدين يمرا بنقطة الأصل أي أن A يكون لها الصورة في المستوى

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (8.8)$$

وإذا عممنا ذلك في الفراغ $\mathbb{R}^3$ فإن مصفوفة الدوران يكون لها الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

بشرط أن $A^t = A^{-1}$, $|A| = \pm 1$ أو ما يكافئ

$$\sum_k a_{ki}^2 = 1 \ , \ i = 1,2,3$$
$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = 0 \ , i \neq j \qquad (8.9)$$

الشروط (8.9) تبين أن أعمدة المصفوفة A تمثل جيوب تمام الاتجاه لثلاث خطوط مارة بنقطة الأصل ومتعامدة فيما بينها، وبالتالي يمكن أن نكتب المصفوفة A على الشكل

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \qquad (8.10)$$

في حالة متجهات الوحدة $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ ، $e_3 = (0,0,1)$ على امتداد

محاور الإحداثيات ox_1 ، ox_2 ، ox_3 على الترتيب. فإن جيوب التمام تكون هي جيوب تمام الاتجاه لمحاور الإحداثيات $o\bar{x}_1, o\bar{x}_2, o\bar{x}_3$ بعد الدوران.

نعرف الآن **زوايا أويلر Euler angles** التي تعطي وصف لأي دوران من خلال ثلاث بارامترات مستقلة وفيها نبين كيف يمكننا تغير ثلاث محاور متعامدة ox_i لتصبح ثلاث محاور متعامدة محددة $o\bar{x}_i$ ، أي أننا نقوم بدوران نظام الإحداثيات.

نفرض أن L هو خط تقاطع المستوى الإحداثي x_1x_2 مع المستوى $\bar{x}_1\bar{x}_2$ ونعتبر الدوران $A(\phi)$ بزاوية ϕ حول محور ox_3 الذي يدير المحور ox_1 لينطبق على الخط L حيث

$$A(\phi)=\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8.11)$$

والدوران $A(\theta)$ الذي يدير محور ox_3 ليصبح $o\bar{x}_3$ ويدير أيضاً المحور ox_2 ليصبح واقع في المستوى $o\bar{x}_1\bar{x}_2$ حيث

$$A(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (8.12)$$

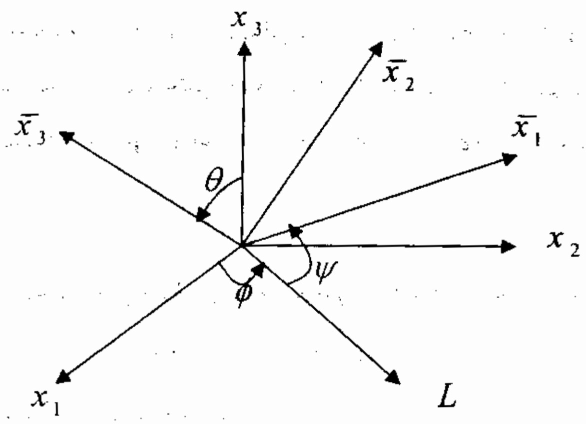
وأخيراً يكون لدينا دوران جديد $A(\psi)$ حول محور $o\bar{x}_3$ يدير الخط L إلى المحور $o\bar{x}_1$ والمحور ox_2 إلى المحور $o\bar{x}_2$ حيث

$$A(\psi)=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (8.13)$$

وبالتالي أي دوران A يمكن تمثيله من خلال زوايا أويلر على أنه محصلة دورانات على الصورة:

$$A = A(\psi)A(\theta)A(\phi) \qquad (8.14)$$

كما هو موضح في شكل (١٩٨).



شكل (١٩٨)

وباستخدام قواعد ضرب المصفوفات المتعارف عليها نحصل على مصفوفة $A(\theta,\psi,\psi)$ تعتمد على ثلاث برامترات مستقلة θ,ψ,ϕ وهي زوايا أويلر وبالتالي نحصل على صيغة صريحة للدوران من خلال زوايا أويلر له.

في هذه الحالة نحصل على الدوران العكسي A^{-1} من خلال

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^{-1}(\phi)A^{-1}(\theta)A^{-1}(\psi) \\ &= A(-\phi)A(-\theta)A(-\psi) \end{aligned} \qquad (8.15)$$

لأن كل المصفوفات $A(\phi)$ ، $A(\theta)$ ، $A(\psi)$ متعامدة ويمكن التأكد من $A^{-1}(\phi) = A(-\phi)$ (سبق وأن رأينا ذلك في حالة المستوى حيث $A(\phi)$ مصفوفة 2×2).

(٨-٦) الدوران حول محور اختياري في الفراغ:

نفرض أن محور الدوران له اتجاه $u=(a,b,c)$ ونقطة عليه $p_1=(x_1,y_1,z_1)$ لإيجاد صيغة مناسبة للدوران نتبع الخطوات الآتية:

١ـ انتقال T يحول النقطة p_1 إلى نقطة أصل الإحداثيات o ويكون له الصورة $T(-x_1,-y_1,-z_1)$ حيث

$$\begin{aligned} T(-x_1,-y_1,-z_1)(x_1,y_1,z_1) &= (x_1-x_1,y_1-y_1,z_1-z_1) \\ &= (0,0,0) = O \end{aligned}$$

٢ـ دوران المتجه u لينطبق على محور z ويتم ذلك من خلال خطوتين:

(i) دوران المتجه $u=(a,b,c)$ بزاوية α حول محور x ليصبح متجه $u'=(0,b,c)$ في المستوى xz وليكن الدوران $R_x(\alpha)$ أي أن u' هو مسقط u على المستوى yz بزاوية الدوران α حول محور x حيث الزاوية α يمكن الحصول عليها من $\cos\alpha=\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$.

(ii) دوران المتجه u بزاوية β حول محور y لينطبق على محور z وليكن $R_y(\beta)$ حيث $\cos\beta=\sqrt{b^2+c^2}$ ، $\sin\beta=-a$.

٣ ـ دوران $R_z(\theta)$ بزاوية θ حول محور z.

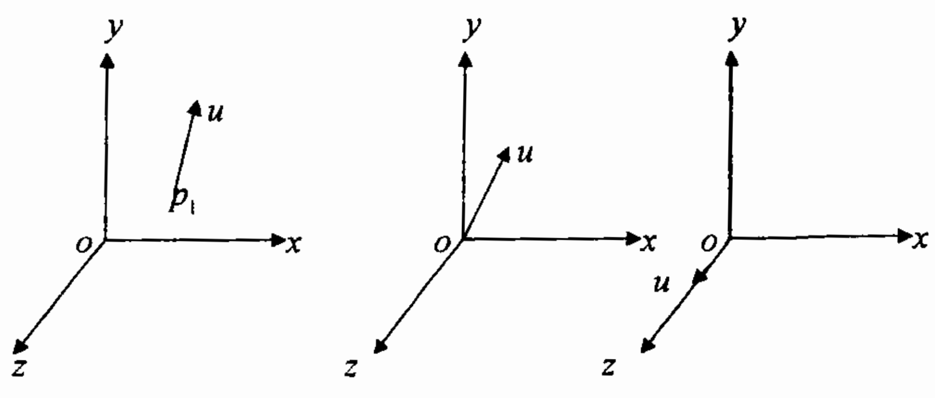
٤ ـ دوران المتجه u بطريقة عكسية إلى التوجيه الأصلي أي بزاوية $-\beta$ من خلال الدوران $R_y(-\beta)$ ثم بدوران $R_x(-\alpha)$.

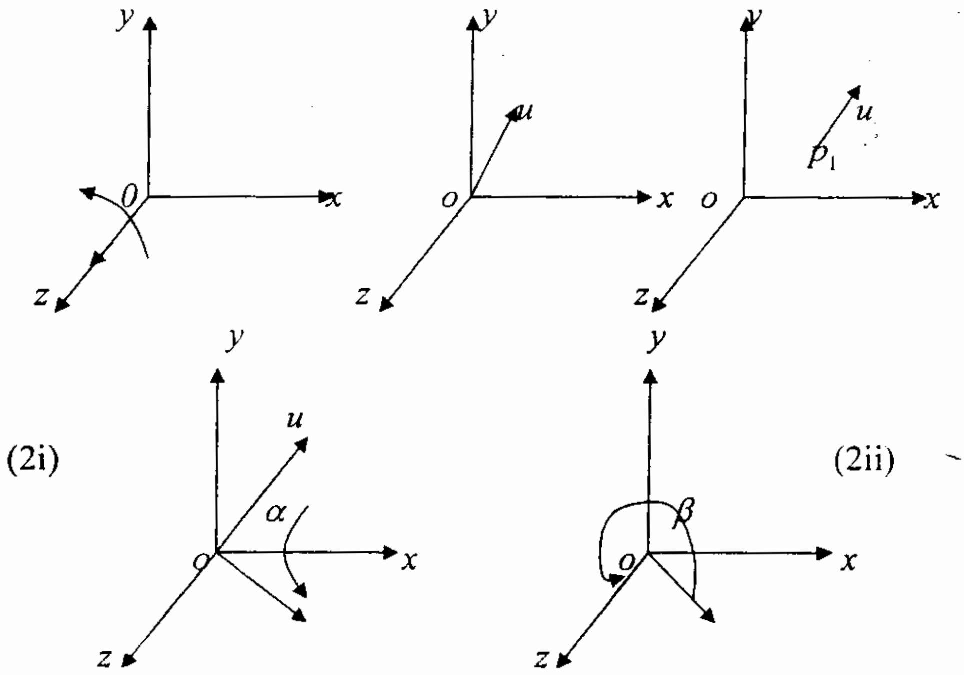
٥ ـ انتقال للنقطة p_1 إلى الخلف (الانتقال العكسي) لتنطبق على الوضع الأصلي بانتقال $T(x_1,y_1,z_1)$.

إذاً مصفوفة الدوران $A(\theta)$ يمكن حسابها من

$$\begin{aligned}R(\theta)&=T^{-1}(-x_1,-y_1,-z_1)R_x^{-1}(\alpha)R_y^{-1}(\beta)\\&\quad R_z(\theta)R_y(\beta)R_x(\alpha)T(-x_1,-y_1,-z_1)\\&=T(x_1,y_1,z_1)R_x(-\alpha)R_y(-\beta)R_z(\theta)\\&\quad R_y(\beta)R_x(\alpha)T(-x_1,-y_1,-z_1)\end{aligned}\tag{8.16}$$

الخطوات السابقة موضحة في شكل (٢٠٨).

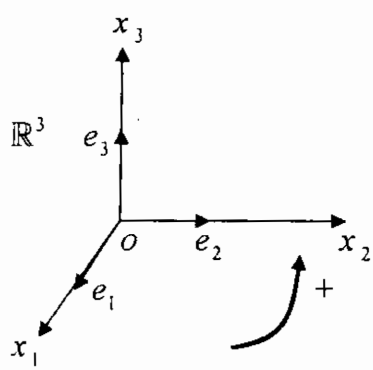




شكل (٢٠٨)

(٢-٨) تأويل هندسي للدوران في الفراغ:

نفرض أن الفراغ الاقليدي $\mathbb{R}^3$ له أساس عياري متعامد e_1,e_2,e_3 (الأساس المعتاد) على امتداد محاور الإحداثيات ox_1,ox_2,ox_3 على الترتيب كما هو موضح في شكل (٢١٨).



شكل (٢١٨) Right-handed system

الدوران في الفراغ أكثر تعقيداً من الدوران في المستوى $\mathbb{R}^2$ ، بسبب أنه يمكننا الدوران حول محور ox_1 أو محور ox_2 أو محور ox_3 . عند الدوران حول محور ox_3 فإن إحداثيات x_1 ، x_2 فقط سوف تتغير بينما إحداثيات x_3 تظل كما هي. في الحقيقة تماماً كما في الدوران حول نقطة الأصل في المستوى x_1x_2 ، فإن تحويل الدوران في هذه الحالة يأخذ الصورة

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (8.17)$$

ومعكوس هذا الدوران نحصل عليه بإيجاد معكوس مصفوفة الدوران وبالتالي يكون لدينا

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \qquad (8.18)$$

إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن المتجه e_1 يدور لينطبق على e_2 و e_2 ينطبق على $-e_1$. ولهذا فإن محور x_1 يدور لينطبق على محور x_2 بينما محور x_2 ينطبق على الاتجاه السالب لمحور x_1 وهذا يفسر تأثير الدوران حول محور x_3 بزاوية $\frac{\pi}{2}$.

بنفس الأسلوب فإن الدوران حول محور x_1 بزاوية θ يعطى من

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$(8.19)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix}$$

وإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن المتجه e_2 يدور ليصبح e_3 ، e_3 يدور ليصبح $-e_2$. إذاً محور x_2 يدور إلى محور x_3 بينما محور x_3 يدور إلى الاتجاه السالب لمحور x_2 .

لكن الدوران حول محور x_2 مختلف بسبب طريقة قياس الزوايا. في نظام الإحداثيات المتعامدة اليميني Right-handed system . إذا كانت يدك اليمنى على امتداد أحد محاور الإحداثيات بحيث يكون إبهام اليد يشير إلى الاتجاه الموجب فإن الأصابع الأربع الباقية تعطي الاتجاه الموجب لقياس الزاوية. أكثر تحديداً الاتجاه الموجب لقياس الزوايا يكون من محور x_3 . وعموماً فإن المألوف في قياس الزاوية هو محور x_1 إلى محور x_3 . إذاً الدوران بزاوية θ حول محور x_2 بنظام قاعدة اليد اليمنى يكافئ دوران بزاوية $-\theta$ من محور x_1 إلى محور x_3 . أي أن الدوران في هذه الحالة يعطى من

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \tag{8.20}$$

فمثلاً إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن e_1 يصبح بعد الدوران المتجه $-e_3$ والمتجه e_3 يصبح e_1 . ولهذا فإن محور x_1 يدور إلى الاتجاه السالب لمحور x_3 ومحور x_3 يدور إلى المحور x_1 الأصلي.

تمارين (٨)

(١) إذا كان

$$R_o(\pi)(x,y)=(x',y')$$
$$R_{o'}(\pi)(x,y)=(x'',y'')$$
$$R_{o''}(\pi)(x,y)=(x''',y''')$$

أوجد صور النقاط $(3,-2), (-2,3), (0,2), (2,-3)$

حيث $o'\equiv(1,-2), o''\equiv(-1,3)$

(٢) أوجد x',y' حيث $R_o(\frac{\pi}{2})(x,y)=(x',y')$ في الحالات الآتية:

(i) باستخدام الانعكاس في محور y والانعكاس في الخط $y+x=0$.

(ii) باستخدام الانعكاس في محور y والانعكاس في الخط $y=x$.

(٣) أوجد (x',y') إذا كانت $R_o(\frac{3\pi}{2})(x,y)=(x',y')$ في الحالات الآتية:

(i) باستخدام الانعكاس في محور x والانعكاس في الخط $y+x=0$

(ii) باستخدام الانعكاس في محور x والخط $y=x$.

(iii) باستخدام الانعكاس في كل من محور y والخط $y=x$.

(iv) باستخدام الانعكاس في كل من محور x والخط $x+y=0$

(٤) أثبت أن التحويل

$$(x,y)\longrightarrow(ax-by,bx+ay)$$

حيث $a^2+b^2=1$ تمثل دوراناً حول نقطة الأصل.

(٥) نفرض أن $ABCD$ مربع حيث o,f منتصف الضلعين $\overline{BC},\overline{CD}$ على الترتيب أوجد ما يأتي:

(i) صورة المربع بالدوران $R_f(\frac{\pi}{2})$.

(ii) صورة المربع بالدوران $R_o(\pi), R_f(\pi)$.

(iii) صورة المربع بالدوران $R_o(\frac{\pi}{2})$.

(iv) صورة المربع بدوران مقياسه $\frac{\pi}{2}$ ومركزه f ثم دوران مقياسه $\frac{\pi}{2}$ ومركزه o.

(٧) صورة المربع بدوران مقياسه π ومركزه مركز المربع، قارن بين الدورانات التي مركزها o, f.

(٦) أثبت أنه إذا كان $R_{o_1}(\pi)$ ، $R_{o_2}(\pi)$ دورانات فإن $R_{o_2}(\pi)\circ R_{o_1}(\pi)$ يكافئ انتقالاً مقياسه $2\overline{o_1o_2}$ في اتجاه الخط المرتب $(\overline{o_1o_2},\leq)$.

هل الانتقال $R_{o_1}(\pi)\circ R_{o_2}(\pi)$ يكون هو نفسه الانتقال المكافئ للتحويل $R_{o_2}(\pi)\circ R_{o_1}(\pi)$.

(٧) اكتب صورة كاملة لتحويل الدوران بزاوية حادة θ ومركز الدوران $o'=(a,b)$.

(إرشاد: استخدم الانتقال إلى نقطة أصل الإحداثيات ثم طبق الدوران حول نقطة الأصل كما في مثال (٥٨)).

(٨) أوجد صورة مربع بدوران حول أحد رؤوسه بزاوية $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(٩) أوجد صورة مثلث قائم الزاوية بدوران حول رأس القائمة بزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(١٠) أثبت أن محصلة دورانين في المستوى هو دوران.

(١١) تأكد من أن معكوس الدوران بزاوية θ هو دوران بزاوية $-\theta$.

(١٢) أثبت أن دوران شبه منحرف متساوي الساقين حول أحد رؤوسه هو شبه منحرف متساوي الساقين أيضاً.