الباب السابع

الانتقال Translation

في هذا الباب تقدم تحويل هندسي يسمى الانتقال يعرف الإزاحة في اتجاه ما ونقوم بإيجاد تعريف هندسي للانتقال من خلال نظام الإحداثيات الكرتيزية للمستوى $\mathbb{R}^2$.

(١.٧) مقدمة:

احضر ورقة بيضاء لتمثيل المستوى $\mathbb{R}^2$ وضع بعضاً من النقاط عليها مثل A, B, C, D كما بالشكل، احضر ورقة من الشفاف وضعها فوق الورقة البيضاء وحدد مكان النقاط A, B, C, D فوق الورقة الشفافة وحرك الورقة الشفافة في اتجاه معين مسافة معينة (دون دوران). عين المكان الجديد للنقاط على الورقة البيضاء.

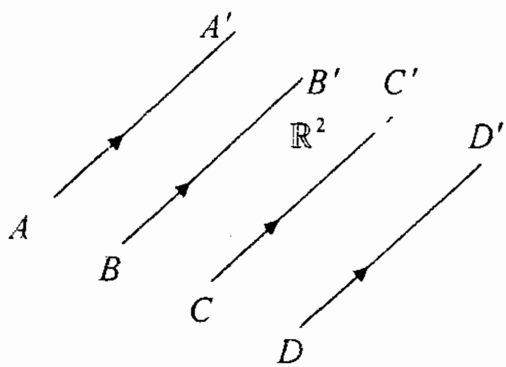
النقطة A تحركت إلى الموضع الجديد A' وكذلك النقطة B تحركت إلى B' هكذا بالنسبة لبقية النقاط.

بهذا نكون قد وضعنا طريقة لتعيين نقطة مناظرة لكل نقطة من نقاط المستوى $\mathbb{R}$ أي أننا قدمنا راسماً من المستوى فوق نفسه ويجب ملاحظة أن:

(١) أن كل نقطة من نقاط المستوى تكون صورة لنقطة وحيدة من نقاط المستوى.

(٢) أن كل نقطة من نقاط المستوى قد تحركت نفس المسافة.

(٣) أن القطع المستقيمة $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}$ جميعها متوازية ومتساوية ولها نفس علاقة الترتيب كما هو موضح في شكل (١.٧).



شكل (١.٧)

(٢.٧) الانتقال كتحويل هندسي:

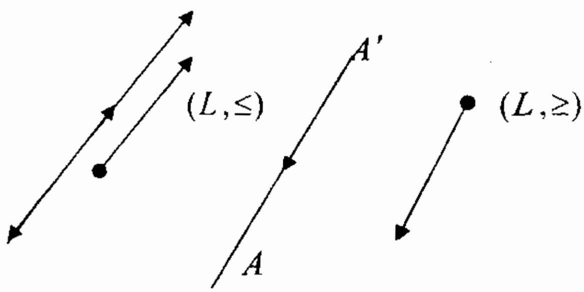
تعريف (١.٧):

يقال لنقطة $A'\in\mathbb{R}^2$ أنها صورة لنقطة $A\in\mathbb{R}$ بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,\leq)$ إذا كان

(١) $L,\overline{AA'}$ متوازيين ولهما نفس علاقة الترتيب.

(٢) $\left|\overline{AA'}\right|=2\lambda$ (الطول الاقليدي).

ويجب ملاحظة أنه إذا كانت A' صورة A بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ فإن A تكون صورة A' بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\geq)$ كما هو موضح في شكل (٢.٧).



شكل (٢.٧)

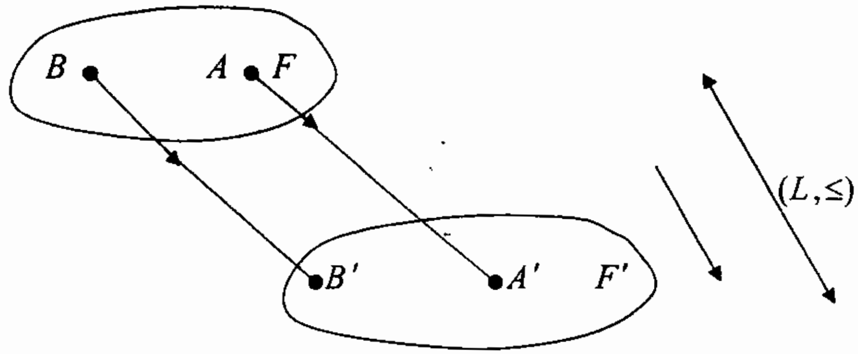
ملاحظة (١.٧):

إذا كانت $A\leq B$ فإننا نعبر عن هذا بطريقة أخرى بأن نكتب $B\geq A$ والعلاقة "$\leq$" علاقة ترتيب قاصرة على الخط L.

التقرير $A\leq B$ يقرأ "A تسبق أو تنطبق على B" كما أن التقرير $B\geq A$ يقرأ "B تلي أو تنطبق على A".

تعريف (٢.٧):

يقال لشكل F' أنه صورة شكل F بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,\leq)$ إذا كانت F' هي مجموعة جميع صور نقاط F بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ كما هو موضح في شكل (٣.٧).



شكل (٣.٧)

ويجب ملاحظة أنه إذا كانت F' صورة F بانتقال 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ فإن F تكون صورة F' بانتقال 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\geq)$.

تعريف (٢.٧):

إذا كانت $A' \in \mathbb{R}^2$ صورة نقطة $A \in \mathbb{R}$ بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,\leq)$ فإن الراسم (التحويل)

$$T_{2\lambda} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

المعرف بالقاعدة:

$$T_{2\lambda}(A) = A' , \left|\overline{AA'}\right| = 2\lambda \ , \ \forall\, A, A' \in \mathbb{R}^2$$

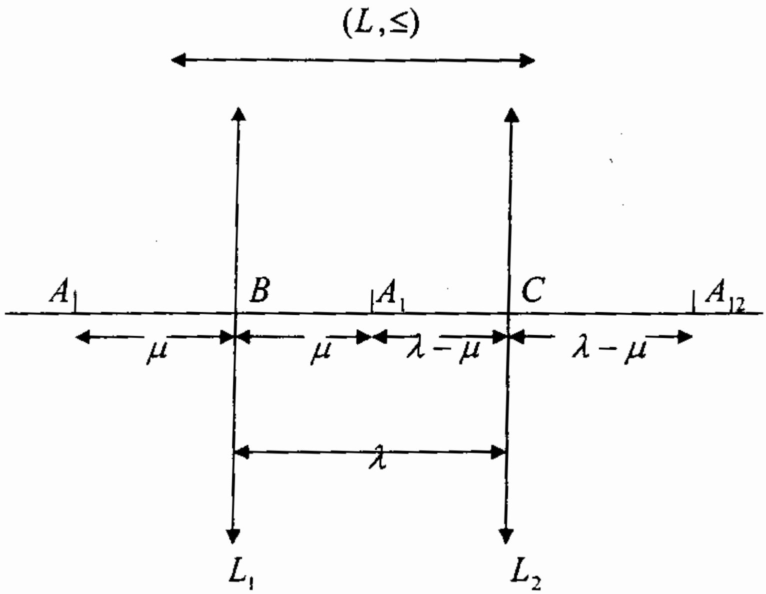
يسمى انتقالاً Translation للمستوى $\mathbb{R}^2$ مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$.

نظرية (١.٧):

الانتقال $T_{2\lambda}$ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ يكافئ تحصيل انعكاسين بالنسبة لخطين مستقيين متوازيين البعد بينهما λ ومتعامدين على الخط L.

البرهان:

نفرض أن $A \in \mathbb{R}^2$ وأن A_{12} صورتها بانتقال مقياسه 2λ وفي اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$. ونفرض أن L_1, L_2 مستقيمان متوازيان البعد بينهما λ وكل منهما متعامد على L بحيث أنه إذا كانت B, C نقطتا تقاطع $\overline{AA_{12}}$ مع L_1, L_2 على الترتيب فإن $B \leq C$.



شكل (٤.٧)

واضح أن R_α هو انعكاس في الخط المستقيم $\alpha=1,2, L_\alpha$.

سنثبت أولاً أنه إذا كانت المجموعة $\{A, A_1\}$ متماثلين بالنسبة للخط المستقيم L_1 فإن المجموعة $\{A_1, A_{12}\}$ تكون متماثلة بالنسبة للخط L_2 .

إذا كانت المجموعة $\{A, A_1\}$ متماثلة بالنسبة للخط L_1 فإن

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{A_1B}\right| = \mu$$

إذاً

$$\left|\overline{A_1C}\right| = \left|\overline{BC}\right| - \left|\overline{A_1B}\right| = \lambda - \mu \qquad (1)$$

وحيث أن كلاً من $\overline{AC}, \overline{AA_{12}}$ متعامدان مع L_2 إذاً المجموعة $\{A, C, A_{12}\}$ مستقيمة (تقع على مستقيم واحد) وبالتالي فإن

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_{12}C}\right| &= \left|\overline{AA_{12}}\right| - \left|\overline{AC}\right| \\ &= 2\lambda - (\mu + \lambda) = \lambda - \mu \qquad (2)\end{aligned}$$

من $(1), (2)$ ينتج أن

$$\left|\overline{A_1C}\right| = \left|\overline{A_{12}C}\right|$$

وأن المجموعة $\{A_1, C, A_{12}\}$ مستقيمة ومتعامدة مع L_2 وبالتالي فإن المجموعة $\{A_1, A_{12}\}$ تكون متماثلة بالنسبة للخط L_2.

سنفرض أن R_{L_1} هو الانعكاس بالنسبة للخط L_1 , R_{L_2} هو الانعكاس بالنسبة للخط L_2 حيث

$$A_1 = R_{L_1}(A) \quad , \quad A_{12} = R_{L_2}(A_1)$$

فإن

$$A_{12} = R_{L_2}(A_1) = R_{L_2}(R_{L_1}(A))$$

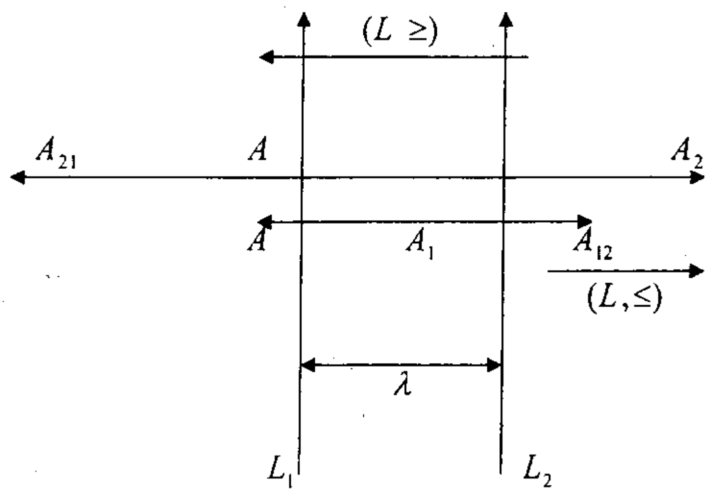
$$= (R_2 \circ R_1)(A)$$

وبما أن النقطة $A \in \mathbb{R}^2$ نقطة اختيارية وأن الانتقال يتعين تماماً متى عرف مقياسه واتجاهه، إذاً

$$T_{2\lambda} = R_{L_2} \circ R_{L_1}$$

ملاحظة (٢.٧):

اتجاه الانتقال يكون من L_1 إلى L_2 والترتيب هنا مهم حيث أنه لو حاولنا إيجاد صورة النقطة A تحت تأثير الراسم $R_1 \circ R_2$ بادئين بالانعكاس بالنسبة لـ L_2 ثم يعقبه الانعكاس بالنسبة للخط L_1 ، فإننا نلاحظ $R_1 \circ R_2$ يكافئ انتقالاً مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L, \geq)$ كما هو موضح في شكل (٥.٧).



شكل (٥.٧)

وبالتالي فإن $$R_{L_1} \circ R_{L_2}(A) \neq R_{L_2} \circ R_{L_1}(A)$$

ملاحظة (٢.٧):

أي انتقال مقياسه 2λ يمكن التعبير عنه على أنه تحصيل انعكاسين بأكثر من طريقة $(A_{12} \neq A_{21})$ ولكن كل نقطة وصورتها تعينان انتقالاً وحيداً.

خواص الانتقال تعطى من النظرية الآتية:

نظرية (٢.٧):

(١) الانتقال تحويل للمستوى (تحويل هندسي لأنه تناظر أحادي).

(٢) الانتقال تساوي قياسي (يحافظ على الأطوال).

(٣) الانتقال يحفظ استقامة النقط (يحفظ استقامة الخطوط).

(٤) الانتقال يحفظ التوازي.

(٥) الانتقال يحفظ مقياس الزوايا.

(٦) الانتقال يحفظ الاتجاه الدوراني.

(٧) لا توجد نقطة ثابتة إلا في حالة الراسم المحايد، وعندئذ تكون كل نقطة صورة نفسها.

برهان هذه الخواص بسيط وذلك باستخدام تعريف الانتقال ومعنى الخاصية المطلوب التحقق من صحتها.

(٣.٧) تعريف الانتقال بالإحداثيات:

١. انتقال مقياسه $2a$ في اتجاه محور السينات:

هذا الانتقال يكافئ تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين موازيين لمحور الصادات. نفرض أن هذين المستقيمان هما $L_1 : x = x_1 \ , L_2 : x = x_2$ وأن $x_2 - x_1 = a$.

نفرض أن (x, y) نقطة في المستوى. إذا كان R_1 الانعكاس بالنسبة للخط L_1 وأن R_2 الانعكاس بالنسبة للخط L_2 فإن

$$R_1 : (x, y) \longrightarrow (2x_1 - x, y) \qquad (7.1)$$

$$R_2 : (2x_1 - x, y) \longrightarrow (2(x_2 - x_1) + x, y) \qquad (2.2)$$

أي أن
$$R_2 : (2x_1 - x , y) = (2a + x , y)$$
$$= R_2 \circ R_1(x , y)$$
$$= T_{2\lambda}(x , y)$$

أي أن الانتقال في اتجاه محور x يعطى من
$$T_{2\lambda}(x , y) = (2a + x , y) \qquad (7.3)$$

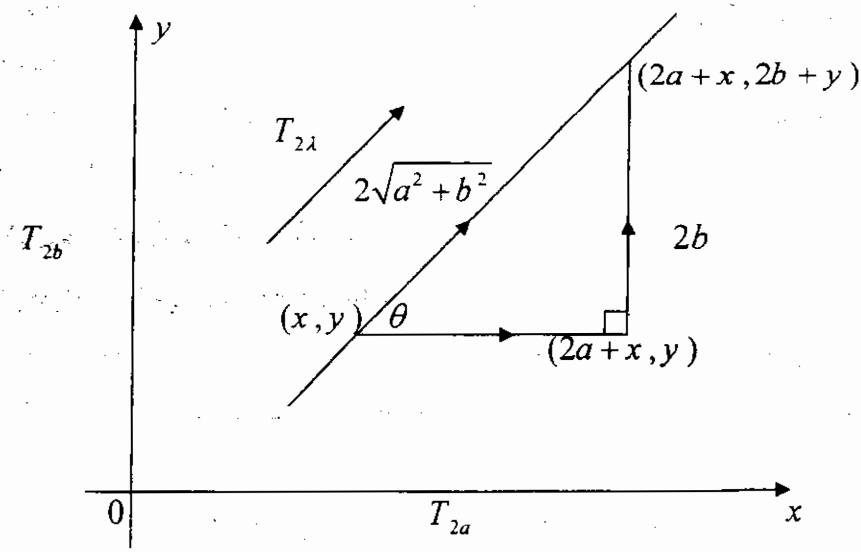
٢. انتقال مقياسه 2b في اتجاه محور الصادات :

بالمثل يمكن إثبات أن الانتقال في اتجاه محور y ومقياسه $2b$ يعطى من
$$T_{2b}(x , y) = (x , 2b + y) \qquad (7.4)$$

نفرض أن T_{2a} انتقال مقياسه $2a$ في اتجاه محور x و T_{2b} انتقال في اتجاه محور y ومقياسه $2b$، أي أن

$$T_{2a}(x , y) = (2a + x , y)$$
$$T_{2b}(2a + x , y) = (2a + x , 2b + y) \qquad (7.5)$$

كما هو موضح في شكل (٦.٧).



شكل (٦.٧)

أي أن
$$T_{2b} \circ T_{2a}(x , y) = (2a + x , 2b + y) \qquad (7.6)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$T_{2a} \circ T_{2b}(x,y) = (2a+x, 2b+y) \qquad (7.7)$$

من (7.6) و (7.7) نحصل على

$$T_{2a} \circ T_{2b}(x,y) = T_{2b} \circ T_{2a}(x,y) \qquad (7.8)$$

وهذا يكافئ انتقالاً $T_{2\lambda}$ مقياسه $\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$ في اتجاه خط مستقيم L ميله يساوي $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال (١.٧):

أثبت أنه إذا كان $T_{2\lambda}$ انتقالاً قاعدته

$$T_{2\lambda} : (x,y) \longrightarrow (2a+x, 2b+y)$$

فإن معكوسه يكون انتقالاً قاعدته

$$T_{2\lambda}^{-1} : (x,y) \longrightarrow (x-2a, y-2b)$$

الحل:

تحصيل الانتقالين يحقق القاعدة

$$T_{2\lambda}^{-1} \circ T_{2\lambda} : (x,y) \longrightarrow (2a-2a+x, 2b-2b+y)$$

أي أن

$$(x,y) \longrightarrow (x,y)$$

إذاً القاعدة

$$T_{2\lambda}^{-1} : (x,y) \longrightarrow (x-2a, y-2b) \qquad (7.9)$$

معكوس الانتقال $T_{2\lambda}$.

مثال (٢.٧):

إذا كان $T_{2\lambda}, T_{2\mu}$ انتقالات للمستوى $\mathbb{R}^2$ ، حيث

$$T_{2\lambda} : (x,y) \longrightarrow (2a+x, 2b+y)$$

$$T_{2\mu} : (x,y) \longrightarrow (2c+x, 2d+y)$$

حيث أن $T_{2\lambda} \circ T_{2\mu}$ يكون انتقالاً قاعدته

$$(x,y) \longrightarrow (2a+2c+x, 2b+2d+y)$$

كذلك أثبت أن:

$$T_{2\lambda} \circ T_{2\mu} = T_{2\mu} \circ T_{2\lambda} \qquad (7.10)$$

وبالتالي فإن تحصيل انتقالين يحقق خاصية الإبدال.

الحل:

من تعريف الانتقال نجد أن:

$$T_{2a} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, y),$$

$$T_{2b} : (2a + x, y) \longrightarrow (2a + x, 2b + y),$$

$$T_{2c} : (x, y) \longrightarrow (2c + x, y),$$

$$T_{2d} : (2c + x, y) \longrightarrow (2c + x, 2d + y),$$

$$T_{2\lambda} = T_{2b} \circ T_{2a},$$

$$T_{2\mu} = T_{2d} \circ T_{2c},$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ (T_{2\lambda} \circ T_{2\mu}) &= (T_{2d} \circ T_{2c} \circ T_{2b} \circ T_{2c})(x, y) \\
&= (T_{2d} \circ T_{2c} \circ T_{2b}) T_{2a}(x, y) \\
&= (T_{2d} \circ T_{2c} \circ T_{2b})(2a + x, y) \\
&= (T_{2d} \circ T_{2c}) T_{2b}(2a + x, y) \\
&= (T_{2d} \circ T_{2c})(2a + x, 2b + y) \\
(T_{2\lambda} \circ T_{2\mu})(x, y) &= T_{2d}(T_{2c}(2a + x, 2b + y)) \\
&= T_{2d}(2a + 2c + x, 2b + y) \\
&= (2a + 2c + x, 2b + 2d + y)
\end{aligned}$$

بالمثل يمكن إثبات أن:

$$T_{2\mu} \circ T_{2\lambda} = T_{2\lambda} \circ T_{2\mu}$$

أي أن الانتقال يحقق خاصية الإبدال.

تمارين (٧)

(١) إذا كان T_6 انتقال مقياسه 6 وحدات في اتجاه محور x، T_8 انتقال مقياسه 8 وحدات في اتجاه محور y فأوجد صورة النقطة $(2, 4)$ تحت تأثير $T_8 \circ T_6$، $T_6 \circ T_8$ وبين فيما إذا كان $T_6 \circ T_8 = T_8 \circ T_6$.

(٢) أوجد قاعدة إحداثيات لكل من الانتقالات الآتية:

(i) $(2,3) \longrightarrow (2,3)$

(ii) $(0,0) \longrightarrow (-3,5)$

(iii) $(-3,5) \longrightarrow (0,0)$

(iv) $(\frac{5}{2},3) \longrightarrow (-\frac{5}{2},\frac{4}{3})$

(٣) أكتب تحويل الانتقال في صورة تحويل خطي وأوجد مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد للمستوى $\mathbb{R}^2$.

(٤) أوجد صورة مثلث قائم الزاوية بانتقال مقياسه 2 وحدة في الاتجاه الموجب لمحور x.

(٥) أوجد صورة مثلث متساوي الأضلاع بانتقال مقياسه 3 في الاتجاه الموجب لمحور y.

(٦) أوجد صورة مربع بانتقال مقياسه 10 وحدات في اتجاه الخط المستقيم الذي ميله $\frac{4}{3}$.