الباب السادس

الانعكاس Reflection

في هذا الباب نقدم إحدى التحويلات الهندسية المشهورة وهو الانعكاس بالنسبة لخط مستقيم في المستوى وكذلك خواصه الهندسية.

(١.٦) مقدمة:

نعتبر المستوى الاقليدي $\mathbb{R}^2$ وتعرف تحويل هندسي يسمى الانعكاس من خلال التعريف الآتي:

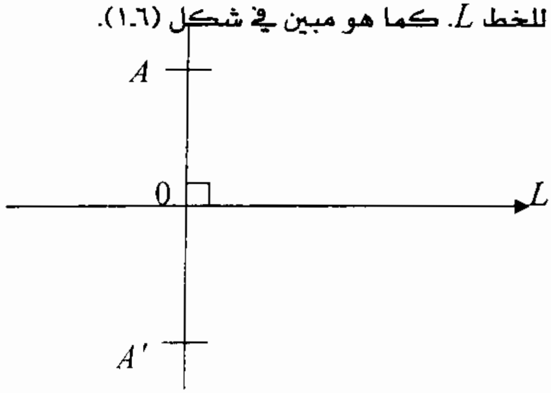
تعريف (١.٦):

يقال لنقطة $A' \in \mathbb{R}^2$ أنها صورة انعكاسية لنقطة $A \in \mathbb{R}^2$ بالنسبة لخط $L \in \mathbb{R}^2$ إذا كان

(١) $\overline{AA'} \perp L$

(٢) L هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة $\overline{AA'}$.

الخط L يسمى محور الانعكاس أو محور التماثل ويقال للمجموعة $\{A, A'\}$ أنها متماثلة بالنسبة للخط L. كما هو مبين في شكل (١.٦).



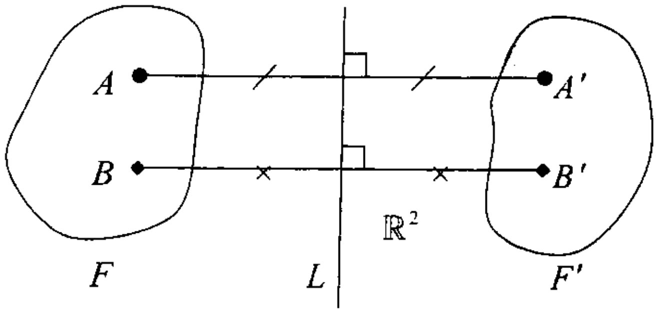
شكل (١.٦)

تعريف (٢.٦):

إذا كانت $F \subset \mathbb{R}^2$ شكل هندسي، $L \subset \mathbb{R}^2$ خط مستقيم فإن المجموعة F' المعرفة كالآتي:

$$F'=\{A':\{A,A'\}\ L \text{ متماثلة حول } ,\forall A\in F\}$$

تسمى صورة انعكاسية للشكل F. كما هو مبين في شكل (٢-٦).



شكل (٢-٦)

تعريف (٣-٦):

إذا كانت $\{A,A'\}\subset\mathbb{R}^2$ مجموعة متماثلة بالنسبة للخط $L\subset\mathbb{R}^2$ فإن الراسم $R_L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ المعرف على أنه $R_L(A)=A'$ يسمى انعكاساً للمستوى $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للخط L.

من هذا التعريف والتعريفات السابقة يمكننا إثبات أن الانعكاس يحقق الخواص التالية (أنظر شكل (٣-٦)).

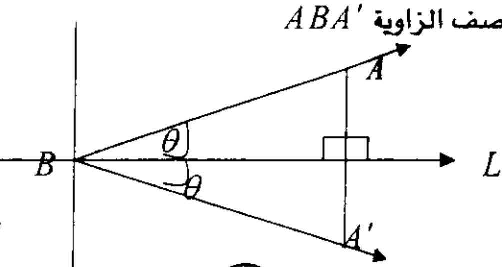
(١) $A'=R_L(A)\Rightarrow A=R_L(A')$

(٢) جميع نقط محور الانعكاس L صوراً لنفسها فهي تبقى ثابتة ويسمى الخط L ثابت الانعكاس (نقاط محور الانعكاس لا تغيرية invariant).

(٣) إذا علم شعاعان $\overline{BA'},\overline{BA}$ فإنه يوجد انعكاس وحيد R_L بحيث

$$R_L:BA\to BA'$$
$$R_L:BA'\to BA$$

حيث L هو منصف الزاوية ABA'



شكل (٣-٦)

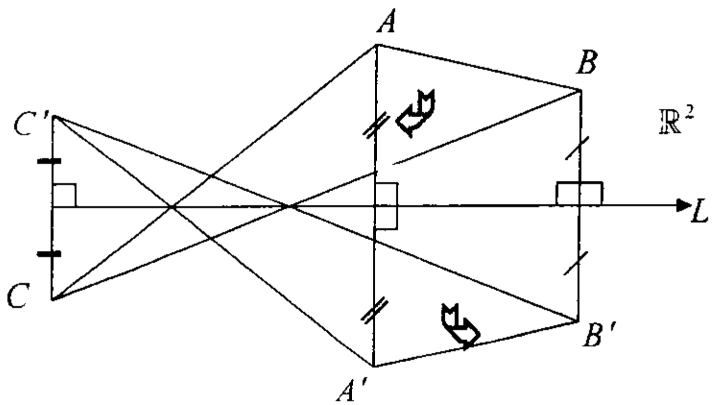
(٤) الانعكاس R_L حافظ للخطوط المستقيمة، بمعنى أن صورة الخط المستقيم بالانعكاس R_L هي أيضاً خط مستقيم.

(٥) إذا كانت A, A' نقطتين مختلفتين فإنه يوجد انعكاس وحيد R_L حيث

$$R_L(A) = A' \,,\, R_L(A') = A$$

(٦) الانعكاس يحفظ كل من (أنظر شكل (٤.٦)) البعد بين نقطتين، مقياس الزوايا، استقامة الخطوط، توازي الخطوط.

(٧) الانعكاس يعكس الاتجاه الدوراني فمثلاً نرى أن اتجاه الدوران حول رؤوس المثلث ΔABC مع عقارب الساعة بينما اتجاه الدوران حول رؤوس المثلث $\Delta A'B'C'$ ضد عقارب الساعة. أي أن اتجاه الدوران للصورة $R_L(\Delta ABC)$ عكس اتجاه الدوران للمثلث (الأصل) ΔABC .



شكل (٤.٦)

(٨) الانعكاس تحويل هندسي؟ (برهن ذلك).

مثال (١.٦):

استخدم الشكل (٤.٦) لإثبات أن الانعكاس يحفظ مقياس الزوايا.

البرهان:

نثبت أن $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}$ ثلاث مجموعات متتالية بالنسبة للخط L، وبالتالي فهما متطابقان (تطابق المثلثات) $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}, \overline{CA} = \overline{C'A'}$ ومنها ينتج أن:

$$m\ \angle ABC = m\ \angle A'B'C'\ ,\ M\ \angle BCA = m\angle\ B'C'A'$$

$$m\ \angle CAB\ =\ m\ \angle C'A'B'$$

حيث m نعني بها مقياس الزوايا و $\angle$ يرمز للزاوية، أي أن الانعكاس يحفظ الزوايا.

مثال (٦.٢):

الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (المركز) يساوي مقدار ثابت (نصف القطر) أي أن الدائرة التي مركزها o ونصف قطرها a هي المجموعة

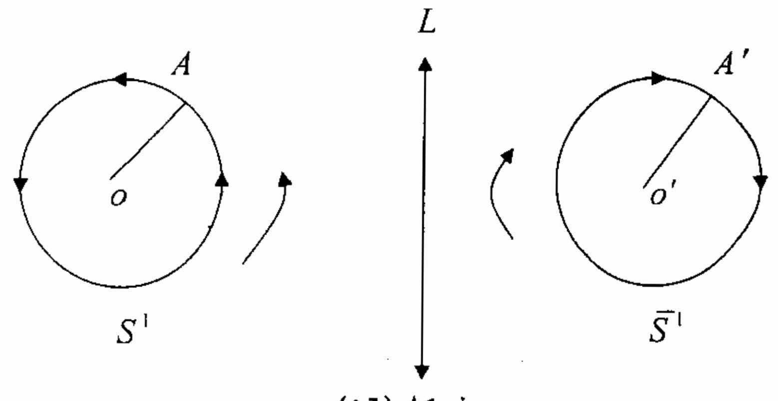
$$S^1 = \{A\ : A\ \in \mathbb{R}^2, \left|\overline{oA}\right| = a\}$$

أوجد صورة الدائرة بالانعكاس ($\left|\overline{oA}\right|$ يعني طول القطعة المستقيمة $\overline{oA}$).

الحل:

نفرض أن o' هي صورة المركز o بالنسبة لخط مستقيم L، إذا كانت A أي نقطة على الدائرة وكانت A' صورتها بالانعكاس بالنسبة للخط L فإن $a = \left|\overline{oA}\right| = \left|\overline{o'A'}\right|$ (من الخصائص السابقة) وكذلك نجد أن

$$\bar{S}^1 = \{A' : \left|o'A'\right| = a,\ A' = R_L(A),\ \forall A \in S^1\}$$



شكل (٦.٥)

ومن هنا نرى أن $\bar{S}^1$ دائرة مركزها o' ونصف قطرها a ويجب ملاحظة أن الدائرتان $S^1, \bar{S}^1$ متطابقتان وكذلك يجب ملاحظة أنه إذا كانت النقطة تتحرك في اتجاه مضاد

لعقارب الساعة لترسم الدائرة S^1 فإن النقطة A' تتحرك في اتجاه عقارب الساعة لترسم الدائرة $\bar{S}^1$ (من الخاصية (٦)) كما هو مبين في شكل (٦ـ٥).

(٢ـ٦) تعريف الانعكاس بالإحداثيات:

مثال (٦ـ٢):

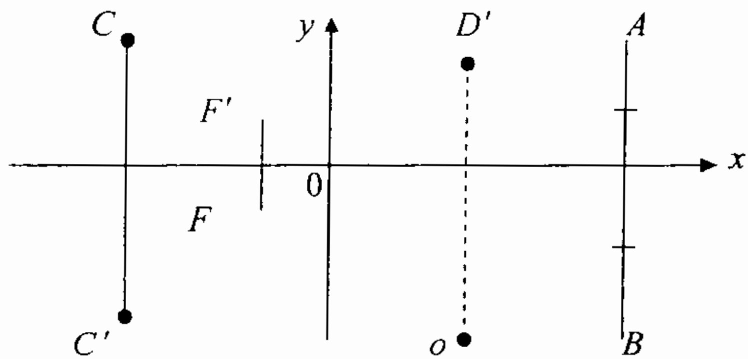
إذا كانت $A=(4,2), B=(4,-2)\in\mathbb{R}^2$ فأوجد محور الانعكاس الذي يحقق $R_L: A \longrightarrow B$ ثم أوجد صور النقط $D=(2,-4), F=(-1,-1), C=(-3,3)$ بالنسبة لهذا المحور (محور الانعكاس).

الحل:

لإيجاد محور الانعكاس نتبع الآتي (شكل (٦ـ٦)).

١ـ نوجد إحداثيات منتصف $\overline{AB}$ وهو $(4,0)$ (نقطة التنصيف).

٢ـ نوجد معادلة العمودي على الخط $\overline{AB}$ المار بالنقطة $(4,0)$ نجد أنها $y=0$ أي أن محور الانعكاس هو محور السينات.



شكل (٦ـ٦)

إذاً صور النقط C، D، F تعطى من

$$C=(-3,3) \longrightarrow C'=(-3,-3)$$
$$D=(2,-4) \longrightarrow D'=(2,4)$$
$$F=(-1,-1) \longrightarrow F'=(-1,1)$$

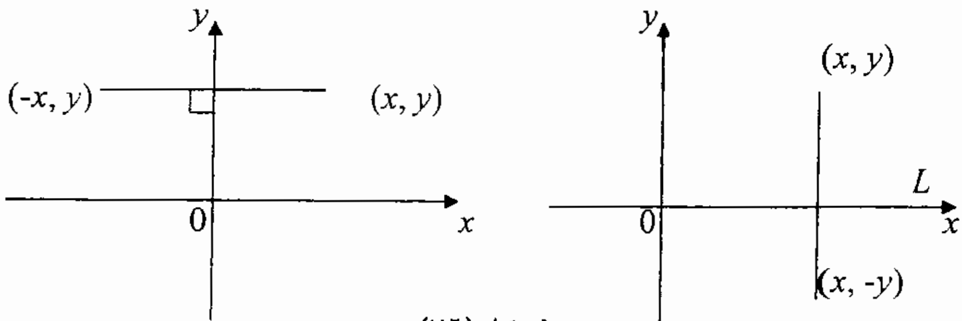
من هذا المثال نلاحظ أن الانعكاس بالنسبة لمحور السينات لا يغير من الإحداثي السيني وإنما يغير فقط من إشارة الإحداثي الصادي للنقطة مع الحفاظ على قيمتها العددية. أي أن الانعكاس بالنسبة لمحور x يعطى بالعلاقة

$$R_x : (x , y) \longrightarrow (x , -y) \qquad (6.1)$$

بنفس الطريقة يمكن إثبات أن الانعكاس بالنسبة لمحور الصادات يعطى بالعلاقة

$$R_y : (x , y) \longrightarrow (-x , y) \qquad (6.2)$$

كما هو مبين في شكل (٧.٦).



شكل (٧.٦)

مثال (٤.٦):

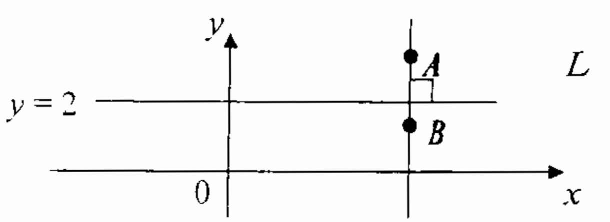
إذا كانت $A = (3,3), B = (3,1)$ بحيث $R_L(A) = B$ أوجد المحور L ثم أوجد صور النقاط $D = (-3,4), O = (0,0), C = (7,-1)$ بالنسبة لهذا المحور.

الحل:

لإيجاد محور الانعكاس نتبع الآتي:

١. نوجد إحداثيات منتصف $\overline{AB}$ وهو $(3,2)$ (نقطة التنصيف $(\frac{3+3}{2}, \frac{3+1}{2})$)

٢. نوجد معادلة العمود $\overline{AB}$ المار بالنقطة $(3,2)$ نجد أنها $y = 2$ أي أن محور الانعكاس هو $y = 2$ كما هو موضح في شكل (٨.٦).



شكل (٨.٦)

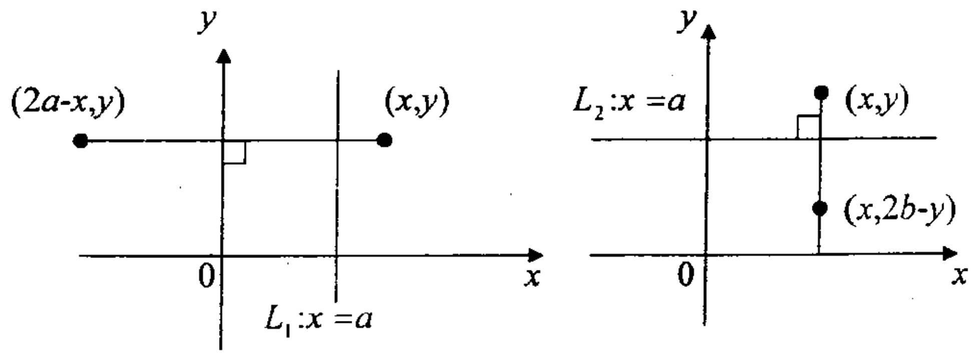
إذاً صور النقاط C, D, O تعطى من

$$C=(7,-1) \longrightarrow C'=(7,5)$$
$$D=(-3,4) \longrightarrow D'=(-3,0)$$
$$O=(0,0) \longrightarrow O'=(0,4)$$

وبإتباع نفس الأسلوب في هذا المثال يمكننا إثبات أن الانعكاس بالنسبة للخط $L: y=b$ يعطى من

$$\begin{aligned} &R_{L_1}(x,y)=(2a-x,y)\,,\; L_1: x=a\,, \\ &R_{L_2}(x,y)=(x,2b-y)\,,\; L_1: y=b \end{aligned} \qquad (6.3)$$

كما هو موضح في شكل (٦-٩).



شكل (٦-٩)

مثال (٦-٥):

أوجد صور النقاط (x, y) بالانعكاس بالنسبة للخطوط المستقيمة L_1, L_2 حيث

١. الخط المستقيم $L_1: y=x$

٢. الخط المستقيم $L_2: y=-x$

الحل:

أولاً: لإيجاد صورة النقطة $A=(x,y)$ بالانعكاس بالنسبة للخط المستقيم $y=x$ فإنه يجب أن نثبت أن

١. القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ عمودي على الخط المستقيم $y=x$ (حيث $B=(x',y')$ هي صورة النقطة A بالانعكاس فرضاً).

٢. الخط المستقيم $y = x$ ينصف $\overline{AB}$

لذلك نفرض أن ميل الخط المستقيم $y = x$ هو m_1 ، ميل AB هو m_2 حيث $m_1 = 1$

$$\therefore\ m_2 = \frac{y'-y}{x'-x} = -1 \Rightarrow y'-y = x - x' \qquad (1)$$

وحيث أن $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ منتصف $\overline{AB}$ وتقع على الخط $y = x$ فهي تحقق معادلته

وبالتالي نحصل على:

$$x + x' = y + y' \qquad (2)$$

من $(1), (2)$ نحصل على

$$y' = x \quad , x' = y$$

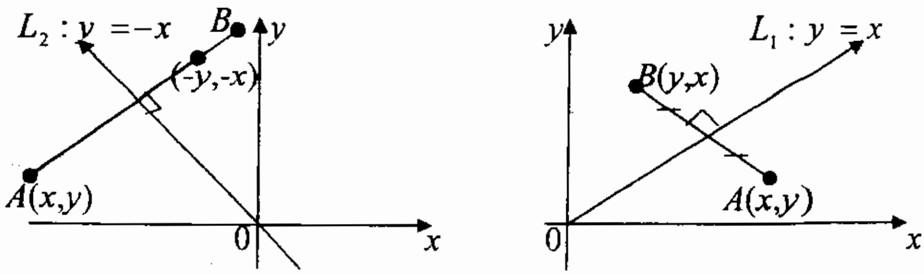
أي أن

$$R_{L_1}(x, y) = (y, x)\ , L_1 : y = x \qquad (6.4)$$

بالمثل بالنسبة إلى $L_2 : y = -x$ نجد أن:

$$R_{L_2}(x, y) = (-y, -x) \qquad (6.5)$$

كما هو مبين في شكل (١٠-٦).



شكل (١٠-٦)

نظرية (١-٦):

إذا كان $R_1 = R_{L_1}\ , R_2 = R_{L_2}$ انعكاسين في المستقيمين L_1, L_2 على الترتيب. اثبت أن

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$$

إلا إذا كان $L_1 \perp L_2$.

البرهان:

نعتبر $A \in \mathbb{R}^2$ نقطة في المستوى $\mathbb{R}^2$ ، $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^2$ خطين مستقيمين في المستوى $\mathbb{R}^2$.

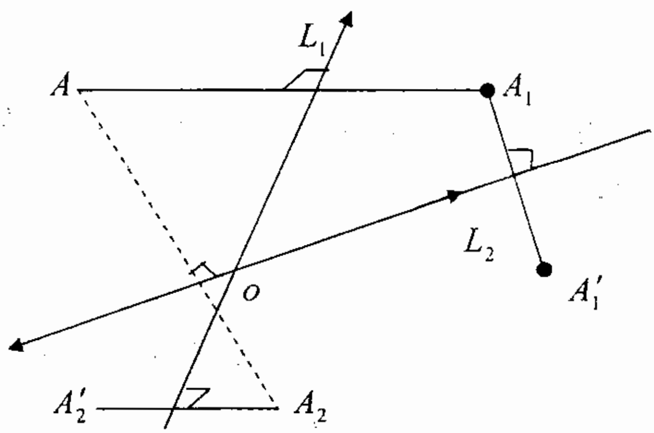
$$\therefore\ R_2 R_1(A) = R_2(R_1(A)) = R_2(A_1)\ \ A_1' \qquad (1)$$

$$R_1 R_2(A) = R_1(R_2(A)) = R_1(A_2) = A_2' \qquad (2)$$

من $(2),(1)$ نجد أن $A_1' \neq A_2'$ (A_1' ، A_2' نقطتان مختلفتان تماماً).

أي أن $$R_1 R_2 \neq R_2 R_1$$

كما هو موضح في شكل (٦ـ١١).

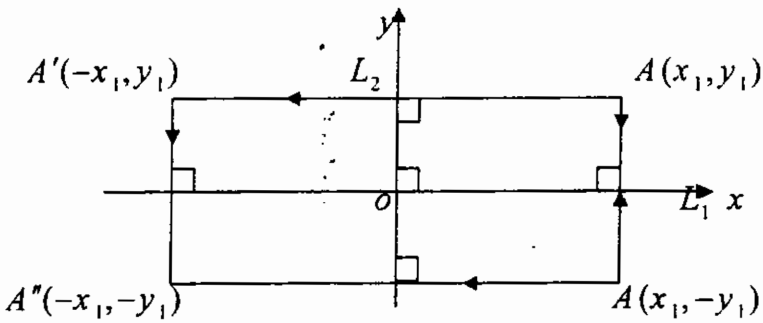


شكل (٦ـ١١)

أما إذا كان $L_1 \perp L_2$ حيث محاور الإحداثيات $ox \equiv L_1$, $oy \equiv L_2$ (باختيار L_1, L_2 منطبقة على محاور الإحداثيات) وباخذ $A = (x_1, y_1)$ ولتكن أي نقطة في المستوى $\mathbb{R}^2$ نجد أن

$$R_1 R_2(x_1, y_1) = R_1(R_2(x_1, y_1))$$
$$= R_1(-x_1, y_1) = (-x_1, -y_1)$$

كما هو مبين في شكل (٦ـ١٢).



شكل (١٢.٦)

$$R_2R_1(x_1,y_1) = R_2(R_1(x_1,y_1))$$
$$=R_2(x_1,-y_1)$$
$$=(-x_1,-y_1)$$

أي أن $R_1R_2 = R_2R_1$ في حالة تعامد محوري الإنعكاس، أي أن تحصيل الانعكاسات غير إبدالي في الحالة العامة أما إذا كان محوري الانعكاس متعامدان فإن تحصيل الانعكاس إبدالي.

نظرية (٢.٦):

أثبت أن مجموعة الانعكاسات في المستوى $\mathbb{R}^2$ مع عملية تحصيلها تكون زمرة ليست إبدالية.

البرهان:

(١) خاصية الانغلاق (العملية الثنائية Binary operation)

نفرض أن R_1, R_2 انعكاسين فإذا كان

$$R_2R_1(A) = R_2(A_1) = A_2$$

أي أن $R_2R_1 : A \longrightarrow A_2$

فإنه يوجد انعكاس وحيد يرسل A إلى A_2 وبديهي فإن محور الانعكاس الجديد هو العمود على $\overline{AA_2}$ من منتصفة.

(٢) خاصية الدمج Associative

فإذا فرضنا أن R_1, R_2, R_2 ثلاث انعكاسات فإن

$$R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3 = R_1R_2R_3$$

وذلك لأن الانعكاسات تتم بالتتابع.

(٣) العنصر المحايد (التحويلة المحايدة للانعكاسات) Identity element

إذا فرضنا أن R هو انعكاس محوره L فإذا تتابعت عملية الانعكاس هذه مرتين أي أن

$$R_L R_L = R_L^2$$

فإن ذلك يعيد كل نقطة في المستوى إلى وضعها الأصلي ومعنى هذا أن الراسم R_L^2 لا يغير الموضع لذا فهو التحويلة المحايدة ونرمز لها بالرمز I والتي تحقق

$$I = R_L^2$$

حيث

$$R_L I = I R_L \ , \forall R_L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(٤) المعكوس (التحويلة العكسية) Inverse

طالما أن الانعكاس هو راسم تناظر أحادي ومعكوس الراسم التناظر الأحادي هو أيضاً راسم تناظر أحادي لذا فإن معكوس هذه التحويلة هو انعكاس أيضاً ، نرمز له بالرمز R_L^{-1} ومن ذلك ينتج أن $R_L R_L^{-1} = R_L^{-1} R_L = I$.

ومن الخواص السابقة ينتج أن

مجموعة set الانعكاسات في المستوى مع عملية تحصيلها تكون زمرة group.

(٥) خاصية الإبدال: غير محققة إلا في حالة المحورين المتعامدين.

نظرية (٢.٦):

إذا كان R_1, R_2, R_3 ثلاث انعكاسات في ثلاث مستقيمات مختلفة أثبت أن

$$R = R_1R_2R_3 \quad , \quad R^{-1} = R_3R_2R_1$$

البرهان:

$$\begin{aligned} R R^{-1} &= (R_1R_2R_3)(R_3R_2R_1) \\ &= R_1R_2(R_3R_3)R_2R_1 \\ &= R_1R_2(I)R_2R_1 && \text{(من تعريف التطابق)} \\ &= R_1(R_2R_2)R_1 \\ &= R_1 I R_1 \end{aligned}$$

$$=R_1 R_1 = I$$

$$\therefore R = R_1 R_2 R_3 \quad , R^{-1} = R_3 R_2 R_1$$

مثال (٨):

أثبت أن التحويل $T : (x , y) \longrightarrow (\frac{x + \sqrt{3y}}{2}, \frac{\sqrt{3x} - y}{2})$

(١) تحويل هندسي تماثلي قياسي (يحافظ على الأطوال).

(٢) انعكاس في الخط المستقيم $L : y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

الحل:

(١) حتى يكون التحويل المعطى T تحويل هندسي يجب أن يكون تناظر أحادي

نكتب العلاقة بين النقطة (x , y) وصورتها $(\bar{x} , \bar{y})$ كالتالي:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x + \sqrt{3} y}{2} \\ \frac{\sqrt{3} x - y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ونجد أن T تحويل خطي ومصفوفته غير شاذة لأن محددها يساوي $-1 \neq$ صفر

إذاً التحويل المعطى تناظر أحادي خطي إذاً فهو تحويل هندسي. ولإثبات أنه تماثلي قياسي Isometric نأخذ نقطتين $A = (x_1 , y_1), B = (x_2 , y_2)$

فتكون صورتهما هي

$$B' = (\frac{x_2 + \sqrt{3} y_2}{2}, \frac{\sqrt{3} x_2 - y_2}{2}) \text{ ، } A' = (\frac{x_1 + \sqrt{3} y_1}{2}, \frac{\sqrt{3} x_1 - y_1}{2})$$

وبحساب الطول الإقليدي Euclidean norm للقطع المستقيمة $\overline{AB}$ ، $\overline{A'B'}$ نجد أن

$$\left| \overline{AB} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\left| \overline{A'B'} \right| = \sqrt{(\frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - y_1))^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) + (-\frac{y_2 - y_1}{2}))^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(x_2 - x_1 + \sqrt{3}(y_2 - y_1))^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{3}(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1))^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(x_2-x_1)^2+3(y_2-y_1)^2}{4}+\frac{3(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}{4}}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\left|\overline{AB}\right|$$

أي أن $\left|\overline{A'B'}\right|=\left|\overline{AB}\right|$ وعليه فإن طول الصورة يساوي طول الأصل أي أن التحويل تساوي قياسي.

(٢) لإثبات أن القاعدة المعطاة انعكاس في الخط المستقيم المعطى، نفرض أن ميل الخط المستقيم $L: y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ هو m_1. ميل $\overline{AB'}$ هو m_2 ، $A'=T(A)$

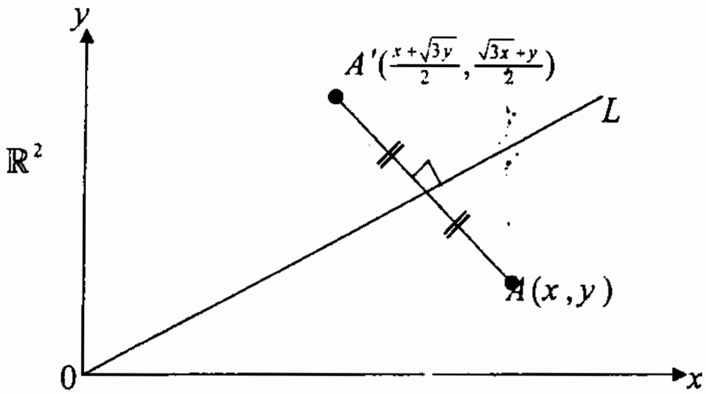
$$\therefore m_2=\frac{(\frac{\sqrt{3x}-y}{2})-y}{(\frac{x+\sqrt{3y}}{2})-x}=\frac{\sqrt{3x}-y-2y}{x+\sqrt{3y}-2x}=\frac{\sqrt{3x}-3y}{\sqrt{3y}-x}=-\sqrt{3}$$

وحيث أن $m_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (من معادلة الخط المستقيم L_1 المعطى).

إذاً واضح أن $\overline{AA'}$ عمودي على الخط المستقيم $L: y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ، منتصف $\overline{AA'}$ هي النقطة $(\frac{\sqrt{3}x+y}{4},\frac{3x+\sqrt{3}y}{4})$ ويحقق $(\frac{3x+\sqrt{3}y}{4})\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}x+y}{4}$

أي أن منتصف $\overline{AA'}$ يقع على المستقيم $L: y=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

إذاً الخط المستقيم $L: y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ ينصف $\overline{AA'}$ وبالتالي فهو محور الانعكاس كما هو موضح في شكل (١٣-٦).



شكل (١٣.٦)

على غرار ما سبق عرضه من حالات الانعكاس R_L حيث

$$L : y = b \ , \ L : x = a \ , \ L : y = \pm x$$

يمكن إيجاد العلاقات التي تربط الانعكاس R_L حيث

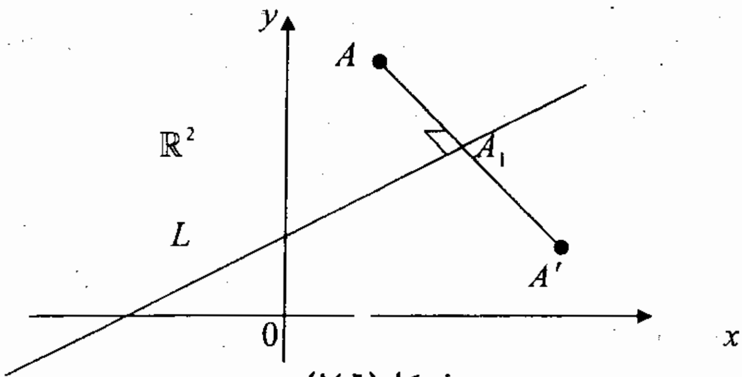
(i) $\quad L : y = m x$

(ii) $\quad L : y = mx + c$

كل العلاقات الخاصة يمكن الحصول عليها من الانعكاس R_L وذلك باختيار قيم خاصة لميل محور الانعكاس m وكذلك الجزء المقطوع c من محور y ولذلك نضع العنوان التالي:

(٣.٦) الانعكاس في خط مستقيم مائل:

نفرض أن $L : y = m x + c$ خط مستقيم (محور الانعكاس) والمطلوب إيجاد صورة النقطة $A(x, \ y)$ بالانعكاس R_L في الخط L ولتكن $A' = (x', y')$ حيث $R_L(x, y) = (x', y')$ كما هو موضح في شكل (١٤.٦).



شكل (٦-١٤)

من تعريف الانعكاس نجد أن (A_1 منصف القطعة المستقيمة $\overline{AA'}$)

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}\right)$$

وميل القطعة المستقيمة $\overline{AA'}$ يعطى من

$$\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{m}$$

($\overline{AA'}$ عمودي على الخط L)

وبما أن $A_1 \in L$ (نقطة التنصيف) إذاً فهي تحقق معادلة L أي أن

$$y_1 = m x_1 + c$$

وبالتالي يكون لدينا العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} &\frac{x + x'}{2} = x_1, \frac{y + y'}{2} = y_1 \\ &\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{1}{m}, \ y_1 = m x_1 + c \end{aligned} \qquad (1)$$

ومنها نحصل على

$$\begin{aligned} &y' + \frac{1}{m} x' = y + \frac{1}{m} x \\ &y' - m x' = -y + m x + c \end{aligned} \qquad (2)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على x' ، y' على الصورة

$$x' = \frac{(1-m^2)x + 2my - mc}{1+m^2}, y' = \frac{(2mx - (1-m^2)y + c)}{1+m^2} \quad (6.6)$$

حيث (x', y') هي إحداثيات صورة النقطة (x,y) بالانعكاس في الخط المائل $L : y = mx + c$ ومنها يمكن الحصول على كل الحالات السابقة وذلك بأخذ قيم خاصة للبارامترات m, c كالتالي:

(i) $m = 0 , c = 0$ ، انعكاس في محور x

(ii) $m = 0 , c = b$ ، انعكاس في محور يوازي محور x

(iii) $c = 0 , m \to \infty$ ، انعكاس في محور y

(vi) $c = a , m \to \infty$ ، انعكاس في محور يوازي محور y

(v) $c = 0 , m = 1$ ، انعكاس في الخط $y = x$

(vi) $c = 0 , m = -1$ ، انعكاس في الخط $y = -x$

(vii) $c = 0 , m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، (المثال السابق) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ انعكاس في الخط

وإذا كان لدينا محور انعكاس يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية θ مع محور السينات فيكون ميله $m = \tan\theta$ ، $c = 0$ وبالتعويض عن m, c في العلاقات (6.6) واستخدام المتطابقات المثلثية

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad ، \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad ، \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

نحصل على:

$$x' = \cos 2\theta x + \sin 2\theta y \ , \ y' = \sin 2\theta x - \cos 2\theta y$$

أو في الصورة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

وهو دوران مع عقارب الساعة لأن محدد مصفوفته يساوي 1-.

تمارين (٦)

(١) إذا كانت $A=(-1,3),B=(2,3),C=(5,0)$ فعين صور هذه النقاط بالانعكاس في الخط المستقيم $y=-x$ وأوجد نقطة D بحيث يكون الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع لانعكاس وأوجد صورة D.

(٢) أثبت أن التحويل الهندسي $(x,y)\longrightarrow(ax+by,bx-ay)$ يمثل انعكاس بالنسبة للخط $y=\dfrac{b}{a+1}x$ حيث $a^2+b^2=1$ ، $a+1\neq 0$.

(إرشاد: نفس خطوات حل مثال (٦-٦)).

(٣) إذا كان $A_1,A_2,A\in\mathbb{R}^2$ صورتها بالانعكاس بالنسبة لمستقيمين متعامدين L_1,L_2 وإذا كانت A_{12} هي صورة A_1 بالنسبة للخط L_2 ، A_{21} صورة A_2 بالنسبة للخط L_1 فاجب عما يأتي:

(a) ماذا يمثل الشكل $AA_1A_{12}A_{21}$.

(b) ما العلاقة بين A_{12},A_{21} وهل هذه العلاقة صحيحة إذا كان L_1,L_2 غير متعامدين؟

استنتج من ذلك ما إذا كان تحصيل الانعكاسات يحقق خاصية الابدال أم لا؟

(c) هل تستطيع أن تجد انعكاساً بالنسبة إلى خط مستقيم تكون فيه A_{12} صورة A بهذا الانعكاس.

(إرشاد: راجع النظرية (٦-١) التي تعطي هذه النتائج مباشرة).

(٤) أوجد صورة مثلث متساوي الأضلاع بانعكاس في خط مستقيم مائل.

(٥) أوجد صورة مربع بانعكاس في خط مستقيم مائل.

(٦) أوجد صورة شبه منحرف متساوي الساقين بالنسبة لخط مستقيم مائل.