الباب الخامس

النظرية الكمية للتشتت (أو الإستطارة)

Quantum Theory of Scattering

النظرية الكمية للتشتت (أو الإستطارة)
Quantum Theory of Scattering

(١) يحدث التشتت (أو الإستطارة) بعد عملية التصادم .

(٢) يمكن دراسة تشتت جسيم بواسطة جهد معين ، مثل تشتت (إلكترون بواسطة نواة أو مجال نووي) ، وكذلك تشتت جسيم بواسطة جسيم آخر (إلكترون يصطدم ببروتون) .

(٣) ينقسم التشتت (كنتيجة لعملية تصادم) إلى نوعين :

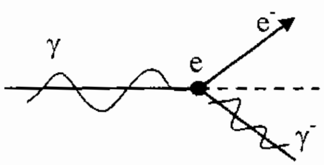
(i) <u>تشتت مرن (Elastic Scatt.)</u>

الجسيمات الناتجة من التصادم هي نفسها الجسيمات المتصادمة .

<u>مثل</u> : تصادم إلكترون مع فوتون

$$e + \gamma \rightarrow e' + \gamma'$$

(طبيعة الجسيمات لا تتغير)



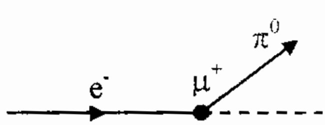
(تشتت كرمتون)

(ii) <u>تشتت غير مرن (Nonelastic Scatt.)</u>

طبيعة الجسيمات تتغير بالتصادم .

$$\begin{array}{ccccc} e^{-} & + & \mu^{+} & \rightarrow & \pi^{0} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

إلكترون   ميزون ميوموجب   ميزون باي متعادل



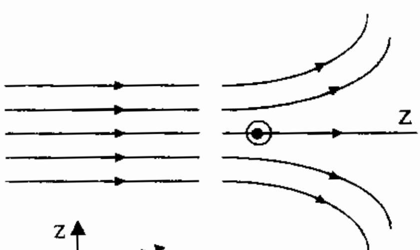
كيفية حل مسائل التشتت في ميكانيكا الكم :

نختار حزمة من الجسيمات ذات الخواص المعروفة (الطاقة ، الأستقطاب ، ......) ونوجهها إلى هدف معين فتحدث عملية التصادم وينتج عنها تشتت للجسيمات خلال زاوية مجسمة معينة ، ويتم قياس خواص الجسيمات المتشتتة بواسطة أجهزة خاصة تقيس شدة هذه الجسيمات (عدد الجسيمات المشتتة) كدالة في زاوية التشتت .

وتشكل حزمة الجسيمات المتشتتة تياراً (Current) من الجسيمات و ويتم عادة حساب هذا التيار عند مسافات بعيدة للغاية عن الهدف ، حيث تكون هذه الجسيمات في حالة حرة (أي بعيدة عن جهد مجال الهدف) .

ومن أجل ذلك تكون دراستنا مهتمة في المقام الأول بما يعرف بالحلول التقاربية (asymptotic Solut.) للمعادلة الموجية أي الحلول عند المسافات البعيدة جداً (حيث $r \to \infty$) .

القطاع المستعرض للتشتت (Cross Section)



إذا كان عدد الجسيمات التي تشتت

خلال الزاوية المجسمة $d\,\Omega$

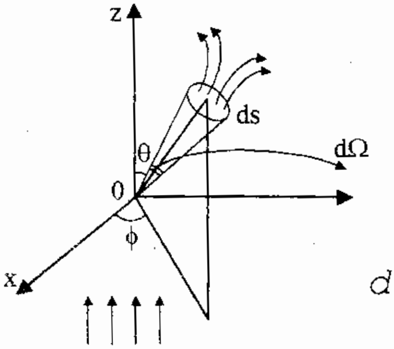
في وحدة الزمن هو :

$$I = (\theta, \phi)$$

وهذا العدد يتناسب مع :

(١) شدة الجسيمات المساقطة (I) .

(٢) الزاوية المجسمة ($d\,\Omega$) حيث :



$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\therefore I(\theta,\phi) \propto I \cdot d\Omega$$

$$\therefore I(\theta,\phi) = \sigma(\theta,\phi) \cdot I d\Omega$$

حيث $\sigma(\theta,\phi)$ ثابت التناسب ويعرف بالقطاع المستعرض التفاضلي للتشتت (Differential cross section)

$$\therefore \frac{I(\theta,\phi)}{I} = \sigma(\theta,\phi)\, d\Omega$$

ويعرف تكامل هذه الكمية على كل الزوايا بالقطاع المستعرض الكلي (Total cross section)

$$\sigma_{tot} = Q = \int \sigma(\theta,\phi)\, d\Omega$$

حالة خاصة :

في حالة الجهود المركزية (Central Potentials) أي الجهود التي تعتمد على المسافة r ، تكون $\sigma(\theta,\phi)$ غير معتمدة على ϕ وتؤول إلى $\sigma(\theta)$.

$$\therefore Q = \int \sigma(\theta)\, \underbrace{d\Omega} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\phi}$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta\, d\theta$$

ملحوظة :

يمكن دراسة عمليات التصادم في ميكانيكا الكم وما يتبعها من عملية تشتت بإستخدام معادلة شرودنجر (غير النسبية) وعدم التعرض لدراسة هذه العمليات بإستخدام معادلة ديراك (النسبية) في تلك المرحلة من الدراسة .

السلوك التقاربي للدالة الموجية :

نعتبر حزمة من الجسيمات الساقطة على هدف ذي جهد متماثل كرياً [الإعتماد على ϕ يكون مهملاً] .

فإذا كانت $V(r)$ هي طاقة الجهد للجسيمات الساقطة فإن معادلة شرودنجر تكون بالصورة :

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\,\psi = 0$$

وبكتابة : $\frac{2m}{\hbar^2} V = u \quad , \quad \frac{2m}{\hbar^2} E = k^2$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \psi + (k^2 - u)\,\psi = 0} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

وتعرف بمعادلة شرودنجر للمسألة التشتتية (Scattering Problem) .

<u>ولإيجاد الحل التقاربي لهذه المعادلة [أي الحل عند المسافات البعيدة جداً أي عند r→∞] :</u>

$$\psi \underset{r\to\infty}{\sim} \psi_{in} + \psi_{sc.}$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

حيث :

$$\psi_{in} = e^{ikz} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_(3)}$$

تمثل الموجة المستوية الساقطة التي هي عبارة عن حزمة الجسيمات الساقطة على الهدف في إتجاه محور z ، وهي جسيمات حرة (لم تصل إلى الهدف بعد) وتمثلها المعادلة الموجية :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_(4)}$$

حيث $u = 0 \leftarrow V = 0$

$$\psi_{sc.} = f(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_(5)}$$

تمثل الموجة الكرية المتشتتة التي هي عبارة عن فيض الجسيمات المتشتتة عن الهدف وتسمى $f(\theta)$ بسعة التشتت (Scattering Amplitude) .

مثال : أوجد الحل التقاربي (2) بإستخدام معادلة شرودنجر للمسألة التشتتية .

الحل :

أولاً : بالنسبة للحزمة الساقطة من الجسيمات .

هذه الحزمة تتحرك في إتجاه محور z وتتحرك كجسيمات حرة وتؤول المعادلة (4) إلى :

$$\frac{d^2\psi_{in}}{dz^2} + k^2\psi_{in} = 0$$

والحل العام لهذه المعادلة هو :

$$\psi_{in} = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}$$

ولما كان e^{-ikz} تمثل الدالة الموجية للموجات المنعكسة وهي لا تهمنا هنا

(بأخذ A = 1) $\therefore \psi_{in} = A\,e^{ikz} \simeq e^{ikz}$

ثانياً : بالنسبة للجسيمات المتشتتة :

نوجد الحل التقاربي (أي عند $r\to\infty$) حيث تكون الجسيمات متحركة بحرية ($u = 0$) وتؤول المعادلة (1) إلى :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(6)$$

وبإستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) مع إهمال الإعتماد على ϕ (بإعتبار الجهد متماثل كرياً) .

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta})$$

[صورة ∇^2 في الإحداثيات القطبية] .

وتصبح المعادلة (6) :

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\sin\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + k^2\psi = 0$$

ولحل هذه المعادلة (بطريقة فصل المتغيرات) : نضع $\psi(r,\theta)=R(r)\cdot\Theta(\theta)$

$$\frac{\Theta}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+k^2R\Theta=0$$

بالضرب في $\frac{r^2}{R\Theta}$:

$$\therefore\ \frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+k^2r^2=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})$$

الطرف الأيسر يعتمد على r فقط والطرف الإيمن يعتمد على θ فقط ، فيكـون كل من الطرفين مساوياً لمقدار ثابت λ ويصبح لدينا معادلتان :

(1) $$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+k^2r^2-\lambda=0$$

(المعادلة القطرية)

(2) $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\lambda\Theta=0$$

(المعادلة الزاوية)

<u>المعادلة القطرية</u> : يمكن كتابتها بالصورة الآتية :

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})\ R=0$$

بوضع $R=\frac{g(r)}{r}$:

$$\frac{d^2g(r)}{dr^2}+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})\ g(r)=0$$

في مسائل التشتت : نهتم بالحل التقاربي (للقيم الكبيرة لـ r) ، حيث $\frac{\lambda}{r^2}\to 0$

$$\therefore\ \frac{d^2g}{dr^2}+k^2g=0$$

وهذه المعادلة هي الصورة التقاربية للمعادلة القطرية .

والحل العام لهذه المعادلة :

$$g = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$$

لقيم r الكبيرة فإن $B = 0$.

$$\therefore g(r) = Ae^{ikr}$$

$$\therefore R(r) = \frac{g(r)}{r} = A\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (7)$$

أيضاً : من المعادلة الزاوية :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) + \lambda\Theta = 0$$

هذه المعادلة لها الحل :

$$\Theta = f(\theta) \qquad (8)$$

ويصبح الحل الكامل للمعادلة التشتتية :

$$\psi_{sc.} = R(r)\cdot\Theta(\theta) = Af(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \simeq f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (A = 1 \text{ بأخذ})$$

وهو المطلوب .

<u>إيجاد المقطع المستعرض الكلي للتشتت</u> :

يمكن إثبات أن المقطع (أو القطاع) المستعرض الكلي للتشتت يعطى بالعلاقة :

$$Q = \sigma_{tot.} = \int\sigma(\theta)d\Omega = \int|f(\theta)|^2 d\Omega$$

حيث $f(\theta)$ سعة التشتت .

<u>الإثبات</u> :

حيث أن فيض الموجات الساقطة أو المتشتتة يكون على هيئة تيار فيمكن إيجاد هذا الفيض من معادلة كثافة التيار في ميكانيكا الكم وصورتها [سبق دراستها في معادلة الإتصال في الجزء الأول] :

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m}(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi) = \frac{i\hbar}{2m}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{j} = \psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi$$

وتكون شدة الحزمة الساقطة : $I = \left|\vec{j}_{in}\right|$

وكذلك فإن فيض الجسيمات المتشتتة الخارجية من المساحة $dS = r^2 d\Omega$ ، والذي يمثل عدد الجسيمات المتشتتة في وحدة الزوايا المجسمة في وحدة الزمن هو :

$$I(\theta) = \frac{\left|\vec{j}_{sc}\right| dS}{d\Omega} = \frac{\left|\vec{j}_{sc}\right| r^2 d\Omega}{d\Omega} = \left|\vec{j}_{sc}\right| r^2$$

ويصبح المقطع التفاضلي للتشتت :

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I(\theta)}{I} = \lim_{r\to\infty}\frac{\left|\vec{j}_{sc}\right| r^2}{\left|\vec{j}_{in}\right|} \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

وبإعتبار أن :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}$$ [في الإحداثيات القطبية]

$$\psi_{in} = e^{ikz}, \quad \psi^*_{in} = e^{-ikz}, \quad z = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{in} &= \psi_{in}\vec{\nabla}\psi^*_{in} - \psi^*_{in}\vec{\nabla}\psi_{in} \\
&= e^{ikz}\,\vec{\nabla}(e^{-ikz}) - e^{-ikz}\,\vec{\nabla}(e^{ikz}) \\
&= e^{ikr\cos\theta}\,\vec{\nabla}(e^{-ikr\cos\theta}) - \\
&\quad - e^{-ikr\cos\theta}\vec{\nabla}(e^{ikr\cos\theta}) \\
&= e^{ikr\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}\right](e^{-ikr\cos\theta}) \\
&\quad - e^{-ikr\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}\right](e^{ikr\cos\theta})
\end{aligned}$$

$$= e^{ikr\cos\theta}\Big[(-ik\cos\theta)\ e^{-ikr\cos\theta}\,\hat{r} +$$

$$+\frac{1}{r}\,(ikr\sin\theta)\ e^{-ikr\cos\theta}\hat{\theta}\ \Big] -$$

$$-e^{-ikr\cos\theta}\Big[(ikr\cos\theta)\ e^{ikr\cos\theta}\,\hat{r} +$$

$$+\frac{1}{r}\,(-ik\sin\theta)\ e^{ikr\cos\theta}\hat{\theta}\ \Big]$$

$$= -ik\cos\theta\,\hat{r} + ik\sin\theta\,\hat{\theta} - ik\cos\theta\,\hat{r} + ik\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$= -2ik\cos\theta\,\hat{r} + 2ik\sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$= -2ik(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$$

ولكن (من المتجهات) :

$$\hat{i} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\therefore\ \vec{j}_{in} = -2ik\,(\hat{i})$$

$$\therefore \vec{J}_{in} = \frac{i\hbar}{2m}\vec{j}_{in} = \frac{i\hbar}{2m}(-2ik)\ (\hat{i}) = \frac{\hbar k}{m}(\hat{i})$$

$$\therefore \left|\vec{J}_{in}\right| = \frac{\hbar k}{m} \qquad\qquad \left|\hat{i}\right| = 1$$

وبالمثل فإن :

$$\vec{j}_{sc} = \psi_{sc.}\vec{\nabla}\psi^{*}_{sc.} - \psi^{*}_{sc.}\vec{\nabla}\,\psi_{sc.}$$

حيث :

$$\psi_{sc.} = f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad , \quad \psi^{*}_{sc.} = f^{*}(\theta)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

ونحصل على :

$$\vec{J}_{sc.} = \frac{i\hbar}{2m}\,\vec{j}_{sc.} = \frac{k\hbar}{m}\frac{\left|f(\theta)\right|^{2}}{r^{2}}\hat{r} + \frac{i\hbar}{2mr^{3}}\left(f\frac{df^{*}}{d\theta} - f^{*}\frac{df}{d\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\vec{J}_{sc.}r^2 = \frac{k\hbar}{m}|f(\theta)|^2\hat{r} + \frac{i\hbar}{2mr}\left(f\frac{df^*}{d\theta} - f^*\frac{df}{d\theta}\right)\hat{\theta}$$

$$\therefore \quad \left|\vec{J}_{sc.}r^2\right|_{r\to\infty} = \frac{k\hbar}{m}|f(\theta)|^2 \qquad \begin{vmatrix} |f(\theta)|^2 = f^*(\theta)\,f(\theta) \\ |\hat{r}| = 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\left|\vec{J}_{in}\right| = \frac{\hbar k}{m}} \quad , \quad \boxed{\left|\vec{J}_{sc.}r^2\right|_{r\to\infty} = \frac{k\hbar}{m}|f(\theta)|^2}$$

$$\therefore \sigma(\theta) = \lim_{r\to\infty}\frac{\left|\vec{J}_{sc.}r^2\right|}{\left|\vec{J}_{in}\right|} = |f(\theta)|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

ويصبح المقطع المستعرض الكلي :

$$\sigma_{tot} = Q = \int \sigma(\theta)d\Omega = \int |f(\theta)|^2 d\Omega$$

وهو المطلوب .

طرق حل مسائل التشتت في ميكانيكا الكم :

توجد طريقتان أساسيتان لحل مسائل التشتت في ميكانيكا الكم ، وهما :

(١) طريقة الموجات الجزئية (Partial Waves) .

وتستخدم عندما تكون طاقة الجسيمات الساقطة منخفضة .

(٢) طريقة التقريب لبورن (Born Approximation) .

وتستخدم عندما تكون طاقة الجسيمات الساقطة عالية .

أولاً : طريقة الموجات الجزئية :

في هذه الطريقة نستخدم السلوك التقاربي للدالة الموجية وباعتبار أن الجهد $V(r)$ متماثل كرياً فيمكن فصل معادلة شرودنجر التشتتية إلى جزئين أحدهما يعتمد على r والآخر على θ ويصبح حل هذه المعادلة عبارة عن تركيبة خطية من هذين الجزئين بالصورة :

$$\psi = \sum_{\ell=0} A_\ell R_\ell(r) P_\ell(\cos\theta) \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

حيث : $R_\ell(r)$ هي الدالة الموجية المعتمدة على r (الدالة الموجية القطرية)

$P_\ell(\cos\theta)$ هي الدالة الموجية المعتمدة على θ (الدالة الموجية الزاوية)

A_ℓ معامل يمكن حسابه

يسمى المفكوك (1) بمفكوك الموجات الجزئية(Partial Wave Expansion)

أمثلة محلولة :

مثال (١) : أثبت أن الحل العام للمعادلة الموجية

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = 0$$

الذي يمثل الموجة الساقطة $\psi_{in} = e^{ikz}$ يمكن كتابته في الإحداثيات القطبية الكروية بالصورة :

$$e^{ikz} = \sum_{\ell=0} A_\ell\, R_\ell(r) P_\ell(\cos\theta)$$

حيث $R_\ell(r)$ هو حل الجزء القطري ، P_ℓ هو حل الجزء الزاوي ، A_ℓ معمل قيمته هي : $A_\ell = \left(2\ell + 1\right) i^\ell$

حيث : $\ell = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

الحل :

المعادلة الموجية التي تصف عملية التشتت :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_(1)$$

وتمثل هذه المعادلة الموجات الساقطة مع إعتبار أن الجهد $V = 0$.

وحيث أنه لا يوجد إعتماد على ϕ فإن المعادلة (1) تأخذ الصورة :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + k^2\psi = 0$$

ولحل هذه المعادلة : نضع $\psi = R(r)\,\Theta(\theta)$

$$\frac{\Theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+k^2R\Theta=0$$

وبالضرب في $\frac{r^2}{R\Theta}$:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+r^2k^2=-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{\partial\theta}\right)$$

الطرف الأيسر يعتمد على r فقط والطرف الأيمن على θ فقط فيكون كل طرف مساوياً لثابت λ وبإختيار هذا الثابت $\lambda=\ell(\ell+1)$ فيكون لدينا معادلتين :

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+r^2k^2=\ell(\ell+1) \qquad \text{\_\_\_\_(2)}$$

(المعادلة القطرية)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\ell(\ell+1)\Theta=0 \qquad \text{\_\_\_\_(3)}$$

(المعادلة الزاوية)

بالنسبة إلى المعادلة (3) (الزاوية) :

بأخذ : $\mu=\cos\theta$

وكتابة : $\Theta(\theta)=P_\ell(\cos\theta)=P_\ell(\mu)$

نحصل على المعادلة :

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{dP_\ell}{d\mu}\right]+\ell(\ell+1)P_\ell=0$$

وهي معادلة لجندر المعروفة في الدوال الخاصة وحلها هو دالة لجندر :

$$\boxed{\Theta(\theta)=P_\ell(\cos\theta)}$$

بالنسبة للمعادلة (2) (القطرية) :

هذه المعادلة نكتبها بالصورة :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R=0$$

$$\therefore \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R=0$$

وبأخذ $\rho=kr$ فإن هذه المعادلة تصبح :

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(1-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)R=0$$

وهي معادلة بسل المعروفة في الدوال الخاصة وحلها هو دوال بسل من الرتبة $(\ell+\frac{1}{2})$ وصورتها :

$$\boxed{R_\ell=\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}} \qquad \leftarrow \quad J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

الصورة التقاربية للحل R_ℓ هو :

$$R_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{1}{2}\ell\pi\right)$$

ويصبح الحل العام للمعادلة (1) : $\psi(r,\theta)=\sum_{\ell=0} A_\ell\, R_\ell(r)\, P_\ell(\cos\theta)$

وهذا الحل يمثل الحزمة الساقطة :

$$\therefore \boxed{e^{ikz}=\sum_{\ell=0} A_\ell R_\ell\, P_\ell} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

إيجاد الثابت A_ℓ :

بإستخدام الخاصية التعامدية لدوال (أو كثيرات حدود) لجندر وصورتها :

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\,P_\ell(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta=\frac{2}{2n+1}\delta_{n\ell}$$

حيث :

$$\delta_{n\ell} = \begin{cases} 1\,(n=\ell) \\ 0\,(n\neq\ell) \end{cases}$$ هي دلتا كرونيكر

في حالة $n=\ell$

$$\int_0^{\pi} \left[P_n(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}$$

بضرب (4) في $P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$ والتكامل على θ من صفر إلى π

$$\int_0^{\pi} e^{ikr\cos\theta} P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

$$= \sum_{\ell} A_\ell R_\ell \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta \qquad \left|\begin{array}{l} \theta\to 0,\pi \\ \mu=\cos\theta \\ \cos 0,\cos\pi \to 1,-1 \end{array}\right.$$

$$= \sum_{n} A_n R_n \int_0^{\pi} \left[P_n(\cos\theta)\right]^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{2n+1} A_n R_n \qquad \text{\_\_\_\_\_ (5)}$$

وبوضع $\mu=\cos\theta$ ← $d\mu = -\sin\theta\, d\theta$

فإن الطرف الأيسر يصبح :

$$\int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu)\, d\mu = \frac{1}{ikr}\int_{-1}^{1} P_n(\mu)\, d(e^{ikr\mu})$$

وبإجراء التكامل بالتجزئ :

$$= \frac{1}{ikr}\left\{ P_n(\mu) e^{ikr\mu}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n'(\mu)\, d\mu \right\}$$

$$= \frac{1}{ikr}\left[P_n(1)e^{ikr} - P_n(-1)e^{-ikr}\right]$$

$$- \frac{1}{(ikr)^2}\int_{-1}^{1} P_n'(\mu)\, d(e^{ikr\mu})$$

وعندما $r \to \infty$ فإن الحد الثاني المعتمد على $\frac{1}{r^2}$ يمكن إهماله

$$\therefore \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu) d\mu = \frac{1}{ikr}\left[\underbrace{P_n(1)}\, e^{ikr} - \underbrace{P_n(-1)}\, e^{-ikr}\right]$$

وبإعتبار أن :

$$P_n(1) = (1)^n = 1$$

$$P_n(-1) = (-1)^n = (e^{i\pi})^n = e^{i\pi n} \qquad \Big| \; -1 = e^{i\pi}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu) d\mu = \frac{1}{ikr}\left[e^{ikr} - e^{i\pi n}\, e^{-ikr}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}i\pi n}}{ikr}\left[e^{i(kr - \frac{1}{2}\pi n)} - e^{-i(kr - \frac{1}{2}\pi n)}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}i\pi n}}{ikr}\left[2i \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi)\right]$$

$$\Big| \; i^2 = -1 = e^{i\pi}, \quad i^{2\ell} = e^{i\pi\ell}, \quad i^{\ell} = e^{\frac{i\pi\ell}{2}}$$

$$= \frac{2i^n}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi)$$

$$\Big| \; e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin\alpha, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$$

بالتعويض في (5) :

$$\frac{2i^n}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi) = \frac{2}{2n+1} A_n R_n$$

ولكن الصورة التقاربية للدالة R_n

$$\boxed{R_n \xrightarrow[r \to \infty]{} \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi)}$$

$$\therefore \frac{2i^n}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi) = \frac{2}{2n+1} A_n \cdot \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}n\pi)$$

$$\therefore i^n = \frac{1}{2n+1} A_n$$

$$\therefore \boxed{A_n = (2n+1) i^n} \qquad \therefore \boxed{A_\ell = (2\ell+1) i^\ell}$$

ويصبح الحل (4) للمعادلة (1) بالصورة :

$$e^{ikz} = \sum_\ell (2\ell+1) i^\ell R_\ell(r) P_\ell(\cos\theta)$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (2)</u> : <u>الإزاحة الطورية (Phase Shift)</u>

إذا كان الحل التقاربي للمعادلة التشتتية :

$$\nabla^2 \psi + \left[k^2 - u(r) \right] \psi = 0$$

يكتب بالصورة :

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

أثبت أن سعة التشتت $f(\theta)$ تكتب بالصورة :

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_\ell (2\ell+1) \left(e^{2i\eta_\ell} - 1\right) P_\ell(\cos\theta)$$

حيث البارامتر η_ℓ يعرف بالإزاحة الطورية (Phase Shift) .

<u>الحل</u> :

المعادلة الموجية التشتتية :

$$\nabla^2 \psi + \left[k^2 - u(r) \right] \psi = 0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

تتميز بوجود الجهد $u(r)$ ، بينما المعادلة :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

تتميز بغياب هذا الجهد .

الحل التقاربي للمعادلة (1) هو :

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \_\_\_\_(3)$$

حل المعادلة (2) [حسب المثال (1)] :

$$e^{ikz} = \sum_{\ell} (2\ell+1) i^{\ell} R_{\ell}(r) P_{\ell}(\mu) \qquad \_\_\_\_(4)$$

نفرض أن حل المعادلة (1) يكون بالصورة :

$$\psi = \sum_{\ell} B_{\ell}\ L_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos\theta) \qquad \_\_\_\_(5)$$

حيث $L_{\ell}(r)$ هو حل المعادلة القطرية :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dL}{dr}\right) + \left[k^2 - u(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] L = 0 \qquad \_\_\_(6)$$

والحل التقاربي (الصورة التقاربية) للدالة $L_{\ell}(r)$ هي :

$$L_{\ell}(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \eta_{\ell}\right) \qquad \_\_\_\_(7)$$

حيث η_{ℓ} بارامتر يعتمد على $u(r)$ ويسمى بالإزاحة الطورية ويعرف بأنه الفرق في الطور بين الصورة التقاربية للدالة القطرية في حالة وجود الجهد $u(r)$ أي $L_{\ell}(r)$ والدالة القطرية في حالة غياب هذا الجهد أي $R_{\ell}(r)$.

<u>إثبات العلاقة (7)</u> :

بوضع $\rho = kr$ في المعادلة (6) فنحصل على :

$$\frac{d^2L}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dL}{d\rho} + \left[1 - u(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right] L = 0 \qquad \_\_\_\_(8)$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية :

نضع $g_{\ell} = \sqrt{\rho}\, L_{\ell}$ ، $L_{\ell} = \dfrac{g}{\sqrt{\rho}} = g\,\rho^{-\frac{1}{2}}$

$$g = g(\rho)$$

$$g' = \frac{dg}{d\rho}$$

$$\therefore \quad \frac{dL}{d\rho} = g'\rho^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} g \rho^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2L}{d\rho^2} = \underbrace{g''\rho^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}} g'}\ \underbrace{-\frac{1}{2}\rho^{-\frac{3}{2}} g' - \frac{1}{2} g (-\frac{3}{2}\rho^{-\frac{5}{2}})}$$

بالتعويض في (8) :

$$\therefore \quad g''\rho^{-\frac{1}{2}} - g'\rho^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} g\rho^{-\frac{5}{2}} + 2g'\rho^{-\frac{3}{2}} - \rho^{-\frac{5}{2}} g$$

$$+\left[1 - u(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right] g\rho^{-\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dg}{d\rho} - \frac{1}{4\rho^2} g + \left[1 - u - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right] g = 0$$

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dg}{d\rho} + \left[1 - u - \frac{\ell^2 + \ell + \frac{1}{4}}{\rho^2}\right] g = 0$$

$$\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dg}{d\rho} + \left[1 - u - \frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{\rho^2}\right] g = 0$$

وبأخذ $u = 0$ عند قيم r الكبيرة وإعتبار أن $\ell + \frac{1}{2} = n$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2g}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dg}{d\rho} + \left[1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right] g = 0} \qquad \text{\_\_\_\_\_(9)}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة بسل الكرية من رتبة $n = \ell + \frac{1}{2}$.

وحل هذه المعادلة عبارة عن تركيب دالتين هما :

(١) دالة بسل الكرية وصورتها :

$$j_\ell(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(\rho)$$

حيث $J_n(\rho)$ هي دالة بسل العادية من الرتبة $n=\ell+\frac{1}{2}$.

(٢) دالة نيومان الكرية وصورتها :

$$n_\ell(\rho)=(-1)^{\ell+1}\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\,J_{-(\ell+\frac{1}{2})}(\rho)$$

حيث $J_{-n}(\rho)$ هي دالة بسل العادية من الرتبة $(-n)$.

الصور التقاربية لدوال بسل ونيومان الكرية هي :

$$j_\ell(\rho)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}\frac{1}{\rho}\sin\left(\rho-\frac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$n_\ell(\rho)\xrightarrow[\rho\to\infty]{}-\frac{1}{\rho}\cos\left(\rho-\frac{1}{2}\ell\pi\right)$$

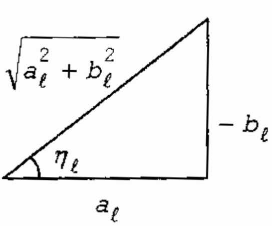
ويأخذ الحل $L_\ell(\rho)$ للمعادلة (8) الصورة :

$$\boxed{L_\ell(\rho)=a_\ell\, j_\ell(\rho)+b_\ell\, n_\ell(\rho)}$$

ويصبح الحل التقاربي للدالة $L_\ell(\rho)$ بالصورة :

$$L_\ell(\rho)\xrightarrow[r\to\infty]{}a_\ell\frac{1}{kr}\sin\left(kr-\frac{1}{2}\ell\pi\right)-b_\ell\frac{1}{kr}\cos\left(kr-\frac{1}{2}\ell\pi\right)$$

وبوضع : $\frac{-b_\ell}{a_\ell}=\tan\eta_\ell$



$$\sin\eta_\ell=\frac{-b_\ell}{\sqrt{a_\ell^2+b_\ell^2}},\quad \cos\eta_\ell=\frac{a_\ell}{\sqrt{a_\ell^2+b_\ell^2}}$$

وبكتابة $\sqrt{a_\ell^2 + b_\ell^2} = A$

$$\therefore \sin\eta_\ell = -\frac{b_\ell}{A} \;,\; \cos\eta_\ell = \frac{a_\ell}{A}$$

$$\therefore L_\ell \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{A\cos\eta_\ell}{kr}\sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi) + \frac{A\sin\eta_\ell}{kr}\cos(kr - \frac{1}{2}\ell\pi)$$

$$\xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{A}{kr}\sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \eta_\ell)$$

$$[\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b]$$

$$\therefore \boxed{L_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi + \eta_\ell)} \qquad (\text{بأخذ } A \simeq 1)$$

والآن : يمكننا كتابة الحل التقاربي للمعادلة (1) وصورته :

$$\psi \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

وبإستخدام (5) ، (4) :

$$\sum_\ell B_\ell L_\ell(r) P_\ell(\cos\theta) \xrightarrow[r\to\infty]{} \sum_\ell (2\ell+1) i^\ell R_\ell P_\ell(\mu) + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\therefore f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \underset{r\to\infty}{\sim} \sum_\ell \left[B_\ell L_\ell - (2\ell+1) i^\ell R_\ell\right] P_\ell$$

وبوضع : $f(\theta) = \sum_\ell D_\ell P_\ell(\mu)$

$$\therefore D_\ell \frac{e^{ikr}}{r} \underset{r\to\infty}{\sim} \left[B_\ell L_\ell - (2\ell+1) i^\ell R_\ell\right]$$

وبالتعويض عن الصور التقاربية لكل من L_ℓ , R_ℓ :

$$R_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin(kr-\frac{1}{2}\ell\pi) \;,\; L_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin(kr-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)$$

$$\therefore \frac{e^{ikr}}{r}D_\ell = B_\ell \frac{1}{kr}\sin(kr-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)-(2\ell+1)i^\ell \cdot$$

$$\cdot\frac{1}{kr}\sin(kr-\frac{1}{2}\ell\pi)$$

$$= B_\ell \frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)} - e^{-i(kr-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)}\right] -$$

$$-(2\ell+1)i^\ell \cdot \frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr-\frac{1}{2}\ell\pi)} - e^{-i(kr-\frac{1}{2}\ell\pi)}\right]$$

$$= \frac{e^{ikr}}{2ikr}\left[B_\ell e^{i(-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)} - (2\ell+1)i^\ell e^{-i(\frac{1}{2}\ell\pi)}\right]$$

$$-\frac{e^{-ikr}}{2ikr}\left[B_\ell e^{-i(-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)} - (2\ell+1)i^\ell e^{i(\frac{1}{2}\ell\pi)}\right] \quad \text{\_\_\_\_(6)}$$

بمساواة معامل e^{-ikr} بالصفر :

$$0 = B_\ell e^{-\cancel{i(-\frac{1}{2}}\ell\pi+\eta_\ell)} - (2\ell+1)i^\ell e^{\cancel{i(\frac{1}{2}}\ell\pi)}$$

$$= B_\ell e^{-i\eta_\ell} - (2\ell+1)i^\ell$$

$$\therefore\; B_\ell e^{-i\eta_\ell} = (2\ell+1)i^\ell$$

$$\therefore \boxed{B_\ell = (2\ell+1)i^\ell e^{i\eta_\ell}}$$

وتصبح الدالة ψ بالصورة :

$$\psi = \sum_\ell B_\ell L_\ell(r)P_\ell(\mu)$$

$$\boxed{\psi = \sum_\ell (2\ell+1)i^\ell e^{i\eta_\ell}\; L_\ell(r)P_\ell(\cos\theta)}$$

<u>ولإيجاد سعة التستت $f(\theta)$:</u>

بمساواة معاملات $\frac{e^{ikr}}{r}$ في طرفي العلاقة السابقة (6) وأســتخدام قيمــة B_ℓ نحصل على :

$$D_\ell = \frac{1}{2ik}\left[B_\ell e^{i(-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)} - (2\ell+1)i^\ell e^{-i(\frac{1}{2}\ell\pi)}\right]$$

$$= \frac{1}{2ik}\left[(2\ell+1)i^\ell e^{i(\eta_\ell-\frac{1}{2}\ell\pi+\eta_\ell)} - (2\ell+1)i^\ell e^{-\frac{1}{2}i\ell\pi}\right]$$

$$= \frac{(2\ell+1)i^\ell}{2ik}\left[e^{-\frac{1}{2}i\pi\ell}(e^{2i\eta_\ell}-1)\right]$$

وبكتابة : $i^{-\ell} = e^{-\frac{1}{2}i\ell\pi}$ [حيث : $i = e^{-\frac{1}{2}i\pi}$]

$$\therefore D_\ell = \frac{(2\ell+1)i^\ell}{2ik}\left[i^{-\ell}(e^{2i\eta_\ell}-1)\right]$$

$$\therefore \boxed{D_\ell = \frac{2\ell+1}{2ik}(e^{2i\eta_\ell}-1)}$$

وتصبح الدالة $f(\theta)$ بالصورة :

$$f(\theta) = \sum_\ell D_\ell\ P_\ell = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{2ik}(e^{2i\eta_\ell}-1)P_\ell(\cos\theta)$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٣)</u> : بإستخدام نتائج المثال رقــم (٢) ، أثبــت أن المقطــع (أو القطــاع) المستعرض الكلي للتشتت يعطي بالعلاقة الآتية :

$$\boxed{\sigma_{tot.} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)\sin^2\eta_\ell}$$

حيث η_ℓ هي الإزاحة الطورية للتشتت .

الحل :

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^{\pi} \left| f(\theta) \right|^2 \sin\theta \, d\theta$$

ومن المثال رقم (٢) :

$$f(\theta) = \sum \frac{2\ell+1}{2ik} (e^{2i\eta_\ell} - 1) P_\ell$$

$$= \sum \frac{2\ell+1}{2ik} e^{i\eta_\ell} \underbrace{(e^{i\eta_\ell} - e^{-i\eta_\ell})} P_\ell$$

$$= \sum \frac{2\ell+1}{2ik} e^{i\eta_\ell} \cdot \underbrace{2i \sin\eta_\ell} \, P_\ell$$

$$= \sum \frac{2\ell+1}{k} e^{i\eta_\ell} \cdot \sin\eta_\ell \cdot P_\ell$$

$$\therefore \left| f(\theta) \right|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum (2\ell+1) P_\ell \cdot e^{i\eta_\ell} \sin\eta_\ell \right|^2$$

وبإستخدام الخاصية التعامدية لدوال لجندر :

$$\int_0^{\pi} [\, P_\ell \,]^2 \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2\ell+1}$$

ووضع : $e^{i\eta_\ell} = \cos\eta_\ell + i \sin\eta_\ell$

$$\therefore \left| f(\theta) \right|^2 = \frac{1}{k^2} \left\{ \left| \sum (2\ell+1) \cos\eta_\ell \sin\eta_\ell P_\ell \right|^2 + \left| \sum (2\ell+1) \sin^2\eta_\ell P_\ell \right|^2 \right\}$$

$$\therefore \sigma_{tot.} = 2\pi \int_0^{\pi} |\, f(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{\pi} \Big\{ \; \Big| \sum (2\ell+1)\cos\eta_\ell \sin\eta_\ell P_\ell \Big|^2$$

$$+ \Big| \sum (2\ell+1) \sin^2\eta_\ell P_\ell \Big|^2 \Big\} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum (2\ell+1)^2 \Big\{ (1-\sin^2\eta_\ell)\sin^2\eta_\ell$$

$$+ \sin^4\eta_\ell \Big\} \int_0^{\pi} P_\ell^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{k^2} \sum (2\ell+1)^2 \Big\{ \sin^2\eta_\ell \Big\} \cdot \left[\frac{2}{2\ell+1}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_\ell (2\ell+1) \sin^2\eta_\ell$$

$$\therefore \sigma_{tot.} = \sum_\ell \sigma_\ell$$

حيث :

$$\boxed{\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\eta_\ell}$$

وهو المطلوب .

<u>ملاحظات</u> :

(١) للتشتت عند الطاقات المنخفضة فـإن $\ell = 0$ [الحالـة s (التـي تميـز بـ $\ell = 0$) تكون هي المؤثرة في عملية التشتت] .

ويصبح المقطع المستعرض للتشتت :

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\eta_0$$

وتعرف η_0 بالرتبة الصفرية للإزاحة الطورية .

(٢) إذا كانت الإزاحة الطورية $\eta_\ell = 0$ فإن :

$$\boxed{\sigma_{tot.} = 0} \leftarrow \sigma_\ell = 0 \leftarrow \sin\eta_\ell = 0$$

(٣) القيمة القصوى لـ σ_ℓ [أكبر قيمة ممكنة للقطاع المستعرض التشتتي]

نحصل عليها : بأخذ أكبر قيمة لـ $(\sin^2)$ وهي (1)

$$\therefore \boxed{\sigma_\ell^{\max} = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)}$$

(٤) النظرية البصرية (Optical Theorem)

تربط هذه النظرية بين المقطع المستعرض الكلي للتشتت وسعة التشتت في الإتجاه الأمامي (Forward direction) .

حيث : $\theta = 0$ ، فبأخذ $\theta = 0$ في علاقة $f(\theta)$

$$f(\theta) = \sum \frac{2\ell+1}{k} e^{i\eta_\ell} \sin\eta_\ell \, P_\ell(\cos\theta)$$

$$\therefore f(0) = \sum \frac{2\ell+1}{k} e^{i\eta_\ell} \sin\eta_\ell \qquad \Big| \; P_\ell(\cos 0) = P_\ell(1) = 1$$

$$= \sum \frac{2\ell+1}{k} (\cos\eta_\ell + i\sin\eta_\ell)\sin\eta_\ell$$

وبأخذ الجزء التخلي (Im) للطرفين :

$$\therefore \operatorname{Im} f(0) = \sum \frac{2\ell+1}{k} \sin^2\eta_\ell$$

وبمقارنة هذه العلاقة بالعلاقة :

$$\sigma_{tot.} = \frac{4\pi}{k^2} \sum (2\ell+1)\sin^2\eta_\ell$$

نجد أن :

$$\boxed{\sigma_{tot.} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0)}$$

تعرف هذه العلاقة بالنظرية البصرية ، ويتضح منها أن الجزء التخيلي لسعة التشتت للأمام يقيس النقص في الشدة الذي تعانية الحزمة الساقطة نتيجة التشتت ، بحيث أن شدة الحزمة الساقطة تكون أقل خلف منطقة التشتت (حيث $\theta = 0$) منها أمام هذه المنطقة .

ويشبه هذا نظرية الظل البصري خلف عائق ، ولذلك أطلق على العلاقة السابقة النظرية البصرية (Optical Theorem) .

ثانياً : طريقة التقريب لبورن (Bron Approximation Method)

إيجاد المعادلة التكاملية للإزاحة الطورية (تقريب بورن الأول) :

يمكن إثبات أنه للقيم الصغيرة للإزاحة الطورية η_ℓ فإن المعادلة التكاملية لـ η_ℓ تكون بالصورة :

$$\eta_\ell = -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty r \cdot u(r)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 dr$$

وتعرف هذه العلاقة بتقريب بورن الأول لـ η_ℓ .

الإثبات :

نبدأ بحل المعادلة القطرية للدالة L_ℓ [في وجود $u(r)$] :

$$\frac{d^2 L_\ell}{dr^2}+\left[k^2-u(r)-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]L_\ell=0 \qquad \_\_\_\_(1)$$

بدلالة حل المعادلة :

$$\frac{d^2 g_\ell}{dr^2}+\left[k^2-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]g_\ell=0 \qquad \_\_\_\_(2)$$

الخاصة بحركة الجسيمات في المجال الحر $(u = 0)$ ، حيث :

حل المعادلة (2) هو :

$$g_\ell(r)=\left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

وله الصورة التقاربية :

$$g_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \sin(kr - \frac{1}{2}\ell\pi) \qquad \_\_\_\_(3)$$

بوضع :

$$L_\ell = g_\ell(1+\xi_\ell) = g_\ell + \phi_\ell \qquad \Big| \ \phi_\ell = g_\ell \xi_\ell$$

$$\phi_\ell = g_\ell \xi_\ell \quad , \quad \phi'_\ell = g_\ell \xi'_\ell + g'_\ell \xi_\ell$$

$$\phi''_\ell = g_\ell \xi''_\ell + 2\xi'_\ell \ g'_\ell + \xi_\ell g''_\ell \qquad \_\_\_\_(4)$$

$$\therefore \ L''_\ell = g''_\ell + \phi''_\ell = \frac{d^2 L_\ell}{dr^2}$$

بالتعويض في (1) :

$$[\, g''_\ell + \phi''_\ell \,] + \left[k^2 - u - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] (\, g_\ell + \phi_\ell \,) = 0$$

$$\therefore \left\{ \underbrace{g''_\ell + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g_\ell}_{0''} - u g_\ell \right\}$$

$$+ \left\{ \phi'' + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \phi_\ell - u\phi_\ell \right\} = 0$$

وبإستخدام (2) ، وإهمال الحد $u\phi_\ell$ كتقريب أول نحصل على :

$$\phi''_\ell + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] \phi_\ell = u g_\ell \qquad \_\_\_\_(5)$$

وبالتعويض عن $\phi_\ell = g_\ell \xi_\ell$ وعن ϕ''_ℓ من (4) نحصل على :

$$\left[\ g_\ell \xi''_\ell + 2\xi'_\ell g'_\ell + \xi_\ell g''_\ell \ \right] + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g_\ell \xi_\ell = u g_\ell$$

$$\therefore \left\{ \underbrace{g_\ell'' + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] g_\ell}_{0\ (\text{من } (2))} \right\} \xi_\ell + g_\ell \xi_\ell'' + 2\xi_\ell' g_\ell' = u g_\ell$$

$$\therefore \ g_\ell \xi_\ell'' + 2\xi_\ell' g_\ell' = u g_\ell$$

بالضرب في g_ℓ :

$$\underbrace{g_\ell^2 \xi_\ell'' + 2\xi_\ell' g_\ell' g_\ell} = u g_\ell^2$$

$$\underbrace{\frac{d}{dr}\left[g_\ell^2 \ \xi_\ell' \right]} = u g_\ell^2$$

وبالتكامل بالنسبة إلى r :

$$g_\ell^2 \xi_\ell' = \int_0^r u \, g_\ell^2 \, dr$$

$$\therefore \boxed{\xi_\ell' = \frac{1}{g_\ell^2} \int_0^r u \, g_\ell^2 \, dr}$$

وعندما $r \to \infty$ فإن :

$$g_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi \right)$$

فتصبح الصورة التقاربية لـ ξ_ℓ' :

$$\xi_\ell' \underset{r\to\infty}{\sim} \operatorname{cosec}^2\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi \right) \underbrace{\int_0^r u g_\ell^2 \, dr}$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} A_\ell \operatorname{cosec}^2\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi \right)$$

حيث $A_\ell = \int_0^r u g_\ell^2 \, dr$

$$\therefore \frac{d\xi'_\ell}{dr} \underset{r\to\infty}{\sim} A_\ell \operatorname{cosec}^2\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

وبإجراء التكامل بالنسبة إلى r :

$$\xi_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} A_\ell \int_0^r \operatorname{cosec}^2\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} -\frac{A_\ell}{k}\cot\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)+\underline{\underline{C}} \qquad \left|\ \begin{aligned}&\int \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta\\ &\quad = -\cot\theta + \underline{\underline{C}}\end{aligned}\right.$$

وبوضع الثابت : $C = -\alpha \dfrac{A_\ell}{k}$

$$\therefore \xi_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{-A_\ell}{k}\left[\cot\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)+\alpha\right] \qquad \_\_\_\_(6)$$

وهي الصورة التقاربية لـ ξ_ℓ ، وبمعلومية الصورة التقاربية لـ g_ℓ (المعادلة (3)) يمكن إيجاد الصورة التقاربية للدالة L_ℓ حيث $L_\ell = g_\ell(1+\xi_\ell)$

$$\therefore L_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)\left\{1-\frac{A_\ell}{k}\left[\cot\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)+\alpha\right]\right\}$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)-\frac{A_\ell}{k}\sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)\cot\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$-\frac{\alpha A_\ell}{k}\sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)-\frac{A_\ell}{k}\cos\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$-\frac{\alpha A_\ell}{k}\sin\left(kr-\tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

وبوضع $\eta_\ell = -\frac{A_\ell}{k}$ (الإزاحة الطورية) وإعتبار القيم الصغيرة فقط لـ η_ℓ أي إهمال η_ℓ^2 ووضع $\cos\eta_\ell = 1 \;,\; \sin\eta_\ell = \eta_\ell$

[للقيم الصغيرة للزاوية θ : $\cos\theta = 1 \;,\; \sin\theta = \theta$]

$$\therefore L_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right) + \eta_\ell \cos\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right) + \alpha\,\eta_\ell \sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} (1 + \alpha\,\eta_\ell)\sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right) + \eta_\ell \cos\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

وبإعتبار أن $\alpha\,\eta_\ell$ صغيرة بحيث يمكن إهمالها : $\alpha\,\eta_\ell \to 0$.

فإن :

$$(1 + \alpha\,\eta_\ell) \sim 1 = \cos\eta_\ell$$

وأيضاً $\eta_\ell = \sin\eta_\ell$ [للقيم الصغيرة لـ η_ℓ]

$$\therefore L_\ell \underset{r\to\infty}{\sim} \cos\eta_\ell \sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right) + \sin\eta_\ell \cos\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi\right)$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \sin\left(kr - \tfrac{1}{2}\ell\pi + \eta_\ell\right)$$

وهي الصورة التقاربية للدالة L_ℓ ، وقد سبق إيجادها بإستخدام طريقة الموجات الجزئية .

وتصبح الإزاحة الطورية في هذه الحالة :

$$\eta_\ell = -\frac{A_\ell}{k} = -\frac{1}{k}\int_0^\infty u g_\ell^2\, dr$$

وحيث أن :

$$g_\ell = \left(\frac{\pi kr}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)$$

$$\therefore \eta_\ell = -\frac{1}{k}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\int_0^\infty r\cdot u\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}\right]^2 dr$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty r\cdot u(r)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 dr \quad \text{\_\_\_\_} (\mathrm{I})$$

وهي المعادلة التكاملية لـ η_ℓ وتعرف أيضاً بتقريب بورن الأول لـ η_ℓ .

وهو المطلوب .

<u>**ملحوظة**</u> : هناك صورة أخرى لتقريب بورن الأول لـ η_ℓ .

وذلك حيث أن :

$$u(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)$$

$$\therefore \eta_\ell = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty r\cdot V(r)\cdot\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 dr$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 r\,dr \quad \text{\_\_\_\_\_\_} (\mathrm{II})$$

وهي الصورة المطلوبة .

إيجاد سعة التشتت $f(\theta)$ في تقريب بورن الأول :

في تقريب بورن الأول حصلنا على الصورة التكاملية لـ η_ℓ (الإزاحة الطورية) كما في المعادلة (I) حيث $\sin\eta_\ell \simeq \eta_\ell$.

وبإستخدام العلاقة المعروفة لسعة التشتت :

$$f(\theta)=\sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{k} e^{i\eta_\ell} \underbrace{\sin\eta_\ell} P_\ell(\cos\theta)$$

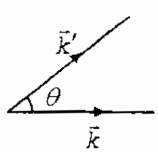
وبإستخدام $\eta_\ell = \sin\eta_\ell$ والتعويض عنها من (I) :

$$f(\theta)\simeq -\frac{\pi}{2k}\sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)\int_0^\infty u(r)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 r\,dr \_(1)$$

وبإستخدام ما يعرف بمحول كمية الحركة (Momentum Transfer) المعرف بالعلاقة : $\vec{q}=\vec{k}-\vec{k}'$

حيث $\vec{k}$ هو المتجه الموجي الإبتدائي (للجسيمات قبل التصادم) ، وبأخذ $\vec{k}'=k\hat{r}=k\frac{\vec{r}}{r}$ (المتجه الموجي للجسيم المتشتت) أي أن $\vec{k},\vec{k}'$ لهما نفس المقدار ولكن في إتجاهين مختلفين .

وطول محول كمية الحركة $\vec{q}$ يعطي من :



$$q=|\vec{q}|=\sqrt{\vec{q}\cdot\vec{q}}=\sqrt{k^2+k'^2-2\vec{k}\cdot\vec{k}'}$$

$$=\sqrt{2k^2(1-\cos\theta)}=\sqrt{2k^2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2k\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k}'=kk'\cos\theta$$

$$=k^2\cos\theta$$

(مقدار $k'=k$)

$$\therefore \boxed{q=2k\sin\frac{\theta}{2}}$$

وبإستخدام نظرية الجمع (Addition Theorem) لدوال بسل بالصورة :

$$\frac{\sin qr}{qr} = \frac{\pi}{2kr}\sum(2\ell+1)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(kr)\right]^2 P_\ell(\cos\theta)$$

فإن العلاقة (1) تصبح :

$$f(\theta) = -\int_0^\infty u(r)\frac{\sin qr}{qr}r^2\,dr \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

وإذا كانت $u(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)$ فإن (2) تصبح :

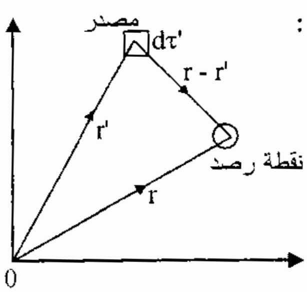
$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr}V(r)\cdot r^2\,dr$$

وهي صورة سعة التشتت $f(\theta)$ لجسيم يصطدم بجهد مركـزي $V(r)$ فـي تقريب بورن الأولى .

<u>إستخدام دالة جرين في حل مسائل التشتت</u> :

بكتابة معادلة شرودنجر لجسيم يتشتت بواسطة جهد $V(r)$ محدود المدى بالصورة :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(r) = u(r)\psi(r) = F(r) \qquad \text{\_\_\_\_ (1)}$$



ويمكن حل هذه المعادلة بإستخدام دالة جرين كالأتي : نفترض وجود مصدر (Source) عند النقطة $\vec{r}'$ ويؤثر عند نقطة الرصد $\vec{r}$ ولتبسيط الحل نفترض الدالة $F(r)$ على شكل دالة ديراك $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ فإن المعادلة (1) تصبح بمعلومية دالة جرين للجسيم الحر (في غياب أي مجال) بالصورة :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

الدالة $G(\vec{r},\vec{r}')$ هي دالة جرين والدالة $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ هي دالة دلتا ديـراك وتعرف بالعلاقة :

$$\int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')F(\vec{r}\,')\,d\tau' = F(\vec{r}) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

ويصبح حل المعادلة (1) الذي نبحث عنه بدلالة دالة جرين له الصورة :

$$\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,')F(\vec{r}\,')\,d\tau' \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

ولإثبات ذلك :

ندخل المؤثر $\left(\nabla^2 + k^2\right)$ على طرفي المعادلة (4) :

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\vec{r}) = \int \left(\nabla^2 + k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}\,')F(\vec{r}\,')\,d\tau'$$

$$= \int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')F(\vec{r}\,')\,d\tau' = F(\vec{r})$$

وذلك بإستخدام (3) .

وبذلك يصبح جل المعادلة (1) بالصورة :

$$\psi(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,')F(\vec{r}\,')\,d\tau'$$

$$= \int G(\vec{r},\vec{r}\,')\,U(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r}\,')\,d\tau' \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(5)$$

هذه المعادلة تعطينا الدالة الموجية $\psi(\vec{r})$ عند نقطة الرصد $\vec{r}$ بدلالة الدالة الموجية عند المصدر $\psi(\vec{r}\,')$.

ويصبح الحل الكامل للمعادلة (1) هو مجموع حلين :

(i) الحل المتمم الإختيـاري للمعادلـة المتجانسـة $\left(\nabla^2 + k^2\right)\phi(\vec{r}) = 0$

وليكن هذا الحل $= \phi(\vec{r})$.

(ii) الحل الخاص للمعادلة غيـر المتجانسـة $\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\vec{r}) = F(\vec{r})$

وهذا الحل يعطي بالمعادلة رقم (5) .

$\therefore$ الحل الكامل يكون :

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \int G(\vec{r},\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r}\,')\,d\tau'$$

$$= \phi(\vec{r}) + \int G(\vec{r},\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r}\,')\,d^3r' \quad \left|\; \begin{aligned} d\tau' &= dV' \\ &= d^3r' \end{aligned}\right.$$

وهو حل المسألة التشتتية بإستخدام دالة جرين (I) .

والآن : نوجد الدالة $G(\vec{r},\vec{r}')$ ونعوض عنها في (I) :

فنوجد بذلك الحل الكامل للمسألة التشـتتية أي $\psi(\vec{r})$ [أي حـل المعادلــة رقم (1)] .

بحل المعادلة (2) [معادلة جرين] $\left(\nabla^2+k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

وذلك بكتابة تحويلات فوريية لكل من الدالتين G,δ بالصورة الآتية :

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\int g(\vec{k}')\, e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, d^3k' \qquad \text{\_\_\_\_\_}(5)$$

حيث $g(\vec{k}')$ هو معامل فوريية للدالة G .

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, d^3k' \qquad \text{\_\_\_\_\_}(6)$$

حيث $\vec{k}'$ هو المتجه الموجي للموجة المصاحبة للجسيم المتشتت .

[ويمكن إعتبار هذه المعادلة كتعريف للدالة $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$]

وبالتعويض في المعادلة (2) :

$$\int \underbrace{(-k'^2+k^2)g(\vec{k}')}\; e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, d^3k' = \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}}\int e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\, d^3k'$$

ومنها نرى أن :

$$(-k'^2+k^2)g(\vec{k}')=\frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\therefore\ g(\vec{k}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{k^2-k'^2}$$

وبالتعويض في (5) نحصل على :

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{k}'\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2-k'^2}\, d^3k' \;\text{\_\_\_\_}(7)$$

ولإيجاد هذا التكامل :

نكتب $d^3k' = k'^2 \sin\theta' dk' d\theta' d\phi'$

[عنصر الحجم في الإحداثيات القطبية الكروية]

حيث θ' هي الزاوية بين $\vec{K}', (\vec{r}-\vec{r}')$

وتصبح (7) :

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\theta'}}{k^2-k'^2} k'^2 dk' \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

$$= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \frac{k'^2 dk'}{k^2-k'^2}$$

ولكن :

$$\int_0^{\pi} e^{iqr\cos\theta} \sin\theta d\theta = 2\frac{\sin qr}{qr}$$

$$\therefore G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} 2\frac{\sin k'|\vec{r}-\vec{r}'|}{k'|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{k'^2 dk'}{k^2-k'^2}$$

$$= \frac{2}{4\pi^2|\vec{r}-\vec{r}'|} \int_0^{\pi} \frac{\sin k'|\vec{r}-\vec{r}'|}{k^2-k'^2} k' dk' \qquad (8)$$

وبإستخدام نظرية البواقي (أو المتبقيات) في نظرية المتغير المركب يكون لهذا التكامل قيمتان طبقاً لكون $k' = \pm k$.

وهاتان القيمتان هما :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin k'|\vec{r}-\vec{r}'|}{k^2-k'^2} k' dk' = -\frac{\pi}{2} e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

وبذلك يصبح لدينا دالتان من دوال جرين [بعد التعويض بقيمتي التكامل في (8)] :

$$G^{\pm}(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{\_\_\_\_\_}(9)$$

ويصبح الحل العام للمعادلة التشتتية (I) بعد التعويض عن $G^{\pm}$ من (8) :

$$\psi^{\pm}(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d^3r'$$

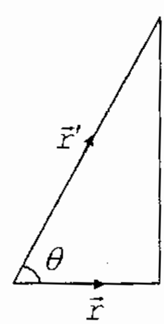
وبأخذ الحل الموجبة والذي يمثل الموجة المتحركة بعيداً (أي الخارجة) والتي من السهل رصدها نحصل على :

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d^3r' \qquad \text{\_\_\_\_}(10)$$

وهي الصورة العامة لحل المسألة التشتتية بإستخدام دالة جرين .

إيجاد الصورة التقاربية للدالة $\psi(\vec{r})$ [تقريب بورن الأول للدالة $\psi(\vec{r})$]

لإيجاد السلوك التقاربي للحل (10) وذلك لقيم r الكبيرة :



$$\begin{aligned}|\vec{r}-\vec{r}\,'| &= \left[r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= r\left[1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &= r\left[1+\frac{r'^2}{2r^2}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}+\cdots\cdots\right]\end{aligned}$$

وذلك بالفك بذات الحدين .

وفي حالة $r\to\infty$ فإن $(\frac{r'}{r})^2\to 0$ ونحصل على :

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| \simeq r\left[1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right] \simeq r-\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,' \simeq r-\hat{n}\cdot\vec{r}\,' \qquad \text{\_\_\_\_}(1)$$

حيث $\hat{n}=\frac{\vec{r}}{r}$ هو متجه الوحدة في إتجاه r ، $\vec{r}'\cdot\vec{n}=r'\cos\theta$

أيضاً :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r\left[1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}'\cdot r'}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{r}\left[1+\frac{r'^2}{r^2}-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{r}\left[1-\frac{r'^2}{2r^2}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}-\ldots\ldots\right]$$

ولقيم $r\to\infty$ فإن :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\simeq\frac{1}{r}\left[1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right]\simeq\frac{1}{r} \qquad \text{\_\_\_\_}(2)$$

بإستخدام (2) ، (1) :

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underset{r\to\infty}{\sim}\frac{e^{ik(r-\hat{n}\cdot\vec{r}')}}{r}$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim}\frac{e^{ikr}}{r}\cdot e^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{r}')}$$

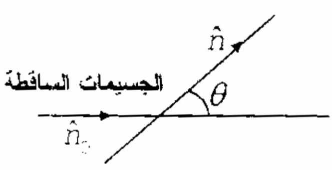
وتصبح العلاقة (10) :

$$\psi(r)\underset{r\to\infty}{\sim}\phi(\vec{r})-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\int e^{-ik(\hat{n}\cdot\vec{r}')}U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')\,d^3r' \text{\_\_}(3)$$

وبإعتبار $\hat{n}_0$ متجه وحدة في إتجـاه الموجـة السـاقطة فـإن $\hat{n}_0\cdot\vec{r}'=z'$

وبأخذ $\psi(\vec{r}')=e^{ikz'}=e^{ik(\hat{n}\cdot\vec{r}')}=e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}$

حيث $\vec{k}=k\,\hat{n}_0$ وبإعتبار أن $\vec{k}'=k\,\hat{n}$



$$\therefore\ \psi(\vec{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \phi(\vec{r}) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{r}')}\cdot e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}U(\vec{r}')d^3r'$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \phi(\vec{r}) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}'}\,U(\vec{r}')d^3r'$$

$$\underset{r\to\infty}{\sim} \phi(\vec{r}) - \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}'}\,U(\vec{r}')d^3r' \quad \_\_\_\_(4)$$

وهي الصورة التقاربية للدالة $\psi(\vec{r})$ وتعرف بتقريب بورن الأول للدالة الموجية $\psi(\vec{r})$.

<u>متسلسلة بورن (Born Series)</u> :

وجدنا أن الدالة الموجية للجسيم المتشتت بواسطة الجهد $V(r)$ يمكن كتابتها بدلالة دالة جرين $G(\vec{r},\vec{r}')$ بالصورة :

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int G(\vec{r},\vec{r}')U(\vec{r}')\,\psi(\vec{r}')d^3r' \quad \_\_\_\_(1)$$

حيث كتبنا $\phi(\vec{r}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}$ للدالة الموجية للجسيم الحر ، وحيث :

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{-1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

العلاقة (1) هي معادلة تكاملية للدالة $\psi(\vec{r})$ ، ويمكن حلها بطريقة التعويضات المتتالية ، فبعد التعويض الأول نحصل على :

$$\psi(\vec{r}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} + \int G(\vec{r},\vec{r}')U(\vec{r}')\ \Big[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')} +$$

$$+\int G(\vec{r}',\vec{r}'')\,U(\vec{r}'')\ \psi(\vec{r}'')\ d^3r''\Big]\,d^3r' \quad \_\_(2)$$

حيث عوضنا عن :

$$\psi(\vec{r}') = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')} + \int G(\vec{r}',\vec{r}'')\, U(\vec{r}'')\, \psi(\vec{r}'')\, d^3 r''$$

$$\therefore\ \psi(\vec{r}) = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} + \int G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}\, d^3 r' + \iint G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, G(\vec{r}',\vec{r}'') \cdot U(\vec{r}'')\, \psi(\vec{r}'')\, d^3 r' d^3 r''$$

وبالتعويض مرة ثانية عن :

$$\psi(\vec{r}'') = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}'')} + \int G(\vec{r}'',\vec{r}''')\, U(\vec{r}''')\, \psi(\vec{r}''')\, d^3 r'''$$

نحصل على :

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}) &= e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} + \int G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}\, d^3 r' \\ &+ \iint G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, G(\vec{r}',\vec{r}'') U(\vec{r}'') \Big[e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}'')} + \\ &+ \int G(\vec{r}'',\vec{r}''')\, U(\vec{r}''') \psi(\vec{r}''')\, d^3 r''' \Big] d^3 r' d^3 r'' \\ &= e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})} + \int G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}')}\, d^3 r' \\ &+ \iint G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, G(\vec{r}',\vec{r}'') U(\vec{r}'')\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}'')}\, d^3 r' d^3 r'' \\ &+ \iiint G(\vec{r},\vec{r}')\, U(\vec{r}')\, G(\vec{r}',\vec{r}'') U(\vec{r}'') G(\vec{r}'',\vec{r}''')\, U(\vec{r}''') \cdot \\ &\cdot \psi(\vec{r}''')\, d^3 r' d^3 r''\, d^3 r'''\end{aligned}$$

وهكذا بالتعويض عن $\psi(\vec{r}''')$ ثم $\psi(\vec{r}'''')$ ، وبعد عدد لا نهائي من الخطوات نحصل على متسلسلة تعرف بمتسلسلة بورن .

إذا كان الجهد $U(\vec{r})$ ضعيفاً فإن المتسلسلة يمكن تقريبها إلى عدد محدد من الحدود .

فإذا أخذنا الحدين الأول والثاني فإننا نحصل على تقريب بورن الأول (First Born approximation) .

وإذا أخذنا الحدود الثلاثة الأولى فإننا نحصل على تقريب بورن الثاني (Second Born approx.) ، وهكذا .

ويعتبر تقريب بورن الأول كتقريب جيد جداً ، في حالة الجهود الضعيفة للغاية .

العلاقة بين تقريب بورن والحل المضبوط (الدقيق) :

(Relation bet. Born approx. and exact solution)

بإستخدام نظرية الجمع لدوال بسل ، وهي عبارة عن المفكوك :

$$\frac{\sin q r'}{q r'}=\frac{\pi}{2 q r'} \sum_{\ell=0}^{\infty}(2 \ell+1)\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(q r')\right]^{2} P_{\ell}(\cos \theta)$$

والتعويض في العلاقة :

$$f_{1B}(\theta)=-\int_{0}^{\infty} \frac{\sin q r'}{q r'} U(r') r'^{2}\, d r'$$

$$f_{1B}(\theta)=-\frac{\pi}{2 q} \sum_{\ell}(2 \ell+1) P_{\ell}(\cos \theta) \cdot$$

$$\cdot \int_{0}^{\infty} U(\vec{r}')\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(q \vec{r}')\right]^{2} r' d r'$$

وبكتابة علاقة η_ℓ للقيم الصغيرة :

$$\eta_{\ell}=-\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\infty} U(\vec{r}')\left[J_{\ell+\frac{1}{2}}(q \vec{r}')\right]^{2} r' d r'$$

$$\therefore\ f_{1B}(\theta)=\frac{1}{q} \sum_{\ell=0}(2 \ell+1) \cdot \eta_{\ell} \cdot P_{\ell}(\cos \theta)$$

وبكتابة $\eta_\ell = \sin\eta_\ell$ للقيم الصغيرة ، $q = kr$

$$\therefore\ f_{1B}(\theta) = \frac{1}{kr}\sum(2\ell+1)\sin\eta_\ell\, P_\ell(\cos\theta)$$

أيضاً بإعتبار η_ℓ صغيرة فيمكن كتابة

$$\eta_\ell = \frac{e^{2i\eta_\ell}-1}{2i}$$

$$\therefore\ f_{1B}(\theta) = \frac{1}{2iq}\sum_\ell(2\ell+1)\,(e^{2i\eta_\ell}-1)\,P_\ell(\cos\theta)$$

وهو الحل المضبوط (الدقيق) لسعة التشتت $f(\theta)$ والذي سبق الحصول عليه .

إذن تقريب بورن يتفق مع الحل المضبوط في حالة η_ℓ صغيرة جداً .

يلاحظ أن تقريب بورن ينطبق في حالة إذا كان الجهد ضعيف وطاقة الجسيمات الساقطة عالية ، بينما طريقة الموجات الجزئية تنطبق في حالة التصادمات ذات الطاقات المنخفضة .

أمثلة محلولة على نظرية التشتت :

مثال (١) : التشتت بواسطة فجوة جهد (Potential Well)

في حالة التشتت بواسطة فجوة جهد حيث الجهد يعطي بالعلاقة

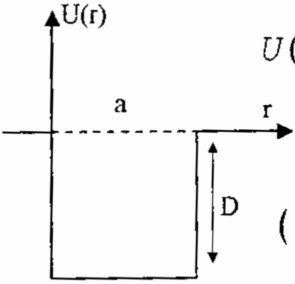
$$\begin{aligned} U(r) &= -D \qquad (r<a) \\ &= 0 \qquad (r>a) \end{aligned}$$

أثبت أن المقطع المستعرض للتشتت يؤول إلى القيمة

$4\pi a^2\left(\dfrac{\tan k_0 a}{k_0 a}\right)^2$ ، حيث $k_0 = \dfrac{\sqrt{2mU}}{\hbar}$

وذلك في حالة السرعات المنخفضة (Low Velocity Limit)

<u>الحل</u> :



الجهد $U(r)=-D \quad (r<a)$

$\qquad\qquad =0 \quad (r>a)$

بإستخدام حد السرعة المنخفض فإن :

(الطول الموجي) $\lambda >> a$

وبذلك فإن كل الأطوار يمكن إهمالها ماعدا η_0

(الإزاحة الطورية من الرتبة صفر) ولإيجاد قيمة η_0 :

نستخدم معادلة شرودنجر بالصورة :

$$\frac{d^2F}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)F=0$$

وبوضع $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$ ، $k_0^2=\frac{2m}{\hbar^2}U$ ، حيث $k^2>k_0^2$

$$\therefore \frac{d^2F}{dr^2}+(k^2-k_0^2)\ F=0$$

وبوضع $k'^2=k^2-k_0^2$

$$\therefore \frac{d^2F}{dr^2}+k'^2\ F=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_ (1)}$$

هذا في حالة $r<a$.

أما في حالة $r>a$ حيث $U(r)=0 \leftarrow K_0=0$ فإن :

$$\therefore \frac{d^2F}{dr^2}+k^2\ F=0 \qquad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

<u>الشروط الحدية</u> :

$$F(0)=0\ ,\ F\underset{r\to\infty}{\sim}\frac{1}{k}\sin(kr+\eta_0) \qquad [\ \text{حيث}\ \ell=0\ ]$$

أيضاً فإن : F,F' تكون متصلة عند $r=a$.

<u>حل المعادلة (1)</u> : هو :

$$F = A\sin k'r \qquad \_\_\_\_(3) \quad (r<a)$$

<u>حل المعادلة (2)</u> : هو :

$$F = A\sin(kr+\eta_0) \qquad \_\_\_\_(4)$$

ومن الشروط الحدية فإن (4) ، (3) يكونان متساويان عند $r=a$

$$\therefore A\sin k'a = A\sin(ka+\eta_0)$$

$$\therefore \sin k'a = \sin(ka+\eta_0) \qquad \_\_\_\_(5)$$

أيضاً فإن F' تكون متصلة عند $r=a$

$$\therefore k'\cos k'a = k\cos(ka+\eta_0) \qquad \_\_\_\_(6)$$

من (6) ، (5) بالقسمة :

$$\therefore \frac{1}{k'}\tan k'a = \frac{1}{k}\tan(ka+\eta_0)$$

$$\therefore \tan(ka+\eta_0) = \frac{k}{k'}\tan k'a$$

$$\therefore (ka+\eta_0) = \tan^{-1}\left(\frac{k}{k'}\tan k'a\right)$$

$$\therefore \eta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{k}{k'}\tan k'a\right) - ka \qquad \_\_\_\_(\mathrm{I})$$

وبإستخدام حد السرعة المنخفضة (حيث $\ell = 0 \leftarrow \eta_\ell = \eta_0$) .

ويكون المقطع المستعرض للتشتت :

$$\therefore \sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\eta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{k'}\tan k'a\right) - ka\right]$$

وبأخذ النهاية عندما $k \to 0$ حيث $k' \to k_0$ فإن :

$$\sigma_0 = \lim_{k\to 0} \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\left[\frac{k}{k'}\tan k'a - ka\right]$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{4\pi}{k^2} \sin^2\left[ka\left(\frac{\tan k'a}{k'a} - 1\right)\right]$$

$$= \lim_{k\to 0} 4\pi a^2\left(\frac{\tan k'a}{k'a} - 1\right)^2 = 4\pi a^2\left(\frac{\tan k_0 a}{k_0 a} - 1\right)^2$$

حيث $\lim_{k\to 0} k' = k_0$.

مثال (٢) : التشتت بواسطة حاجز جهد (Potential Barrier)

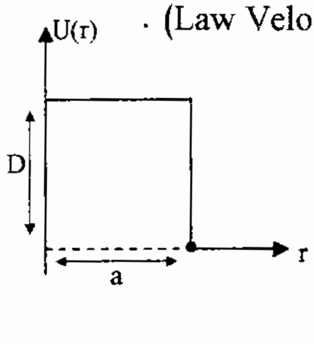
في حالة التشتت بواسطة حاجز جهد ، حيث الجهد يعطي بالعلاقة

$$U(r) = D \qquad (r < a)$$
$$= 0 \qquad (r > a)$$

أثبت أن المقطع المستعرض للتشتت يؤول إلى القيمة :

$$4\pi a^2\left(\frac{\tanh\ k_0 a}{k_0 a}\right)^2 \text{ ، حيث } k_0 = \frac{\sqrt{2mU}}{\hbar}$$

وذلك في حالة السرعات المنخفضة (Law Velocity Limit) .



الحل :

معادلة شرودنجر في هذه الحالة تأخذ الصورة :

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)F = 0$$

$$\therefore \frac{d^2F}{dr^2} + (k^2 - k_0^2)\ F = 0$$

حيث

$$k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2}U \quad ، \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \quad \text{وحيث} \quad k_0^2 > k^2$$

وبوضع $k'^2 = k_0^2 - k^2$

$$\frac{d^2F}{dr^2} - k'^2 \; F = 0 \qquad \_\_\_\_\_(1) \quad (r<a)$$

أما في حالة $r>a$ حيث $U(r)=0 \leftarrow K_0 = 0$ فإن :

$$\frac{d^2F}{dr^2} + k^2 \; F = 0 \qquad \_\_\_\_\_(2)$$

<u>حل (1)</u> : هو :

$$F = A \sinh k'r$$

<u>حل (2)</u> : هو :

$$F = A \sin(kr + \eta_0)$$

ومن شرط تساوي F عند $r=a$

$$\therefore \; \sinh k' = \sin(kr + \eta_0) \qquad \_\_\_\_(3)$$

ومن شرط تساوي F' عند $r=a$

$$\therefore \; k' \cosh k'a = k \cos(ka + \eta_0) \qquad \_\_\_\_(4)$$

من (4) ، (3) بالقسمة :

$$\frac{1}{k'} \tanh k'a = \frac{1}{k} \tan(ka + \eta_0)$$

$$\therefore \; \tan(ka + \eta_0) = \frac{k}{k'} \tanh k'a$$

$$\therefore (ka+\eta_0)=\tan^{-1}\left[\frac{k}{k'}\tanh k'a\right]$$

$$\therefore \eta_0=\tan^{-1}\left[\frac{k}{k'}\tanh k'a\right]-ka \qquad \text{\_\_\_\_}(5)$$

وفي حالة السرعات المنخفضة فإن :

$$\sigma_0=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\eta_0=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{k'}\tanh k'a\right)-ka\right]$$

وحيث أن : $\lim\limits_{k\to 0} k'=k_0$.

$$\sigma_0=\lim_{k\to 0}\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\tan^{-1}\left(\frac{k}{k'}\tanh k'a\right)-ka\right]$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[\frac{k}{k'}\tanh k'a-ka\right]$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\left[ka\left(\frac{\tanh k'a}{k'a}-1\right)\right]$$

$$=\lim_{k\to 0}4\pi a^2\left(\frac{\tanh k'a}{k'a}-1\right)^2=4\pi a^2\left(\frac{\tanh k_0a}{k_0a}-1\right)^2$$

وهو المطلوب .