الباب السادس

الأسس الرياضية لميكانكيا الكم (II)

الأسس الرياضية لميكانيكا الكم (II)

في هذا الباب نواصل ما بدأناه في الباب الثاني عن المؤثرات وتطبيقاتها في ميكانيكا الكم فندرس الموضوعات التالية : دالة مؤثر ، بعض المؤثرات الخاصة ، أمثلة عامة على المؤثرات .

[١] دالة مؤثر (Function of operator):-

نعتبر الدالة $F(z)$ والتي يمكن فكها في صورة متسلسلة في قوي المتغير z أي أن :

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$$

تعتبر دالة مؤثر $F(\hat{A})$ أو الدالة المناظرة للمؤثر $\hat{A}$ بأنها المؤثر $F(\hat{A})$ الذي يمكن كتابته علي هيئة متسلسلة لها نفس المعاملات α_n أي أن :

$$F(\hat{A})=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \hat{A}^n$$

وكمثال فإن المؤثر $e^{\hat{A}}$ الذي يمكن كتابته بالصورة :

$$e^{\hat{A}}=1+\hat{A}+\frac{\hat{A}^2}{2!}+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}$$

يعتبر دالة في المؤثر $\hat{A}$ أو دالة المؤثر $\hat{A}$ ويكتب: $F(\hat{A})=e^{\hat{A}}$

مشتقة دالة مؤثر:

تعرف مشتقة دالة المؤثر $F(\hat{A})$ بالعلاقة الآتية :

$$F'(\hat{A})=\frac{d\hat{F}}{dt}=\sum_n n a_n \hat{A}^{n-1}$$

حيث :

$$F(\hat{A})=\sum_n a_n \hat{A}^n$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) : أثبت أنه لأي مؤثرين خطيين $\hat{A},\hat{B}$ فإن الدالـة $F(k)=e^{\hat{B}k}\hat{A}e^{-\hat{B}k}$ يمكن كتابتها بالصورة :

$$F(k)=\hat{A}+k[\hat{B},\hat{A}]+\frac{k^2}{2!}[\hat{B}[\hat{B},\hat{A}]]+\frac{k^2}{3!}[\hat{B},[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]]+......$$

أدرس الحالتين الخاصتين : (١) عندما k = 1 (٢) عندما $\hat{A}=\hat{I}$

الحـل : بكتابة $e^{\hat{B}k}$ في صورة متسلسلة :

$$e^{\hat{B}k}=\hat{I}+\hat{B}k+\frac{(\hat{B}k)^2}{2!}+\frac{(\hat{B}k)^3}{3!}+\quad ....$$

[مفكوك e^{xk} هو : $e^{xk}=1+xk+\frac{(xk)^2}{2!}\ ......$]

فإن الدالة F (k) تصبح

$$F(k)=e^{\hat{B}k}\hat{A}\,e^{-\hat{B}k}$$

$$=\left(\hat{I}+\hat{B}k+\hat{B}^2\frac{k^2}{2!}+....+\hat{B}^n\frac{k^n}{n!}+....\right)\hat{A}\left(\hat{I}-\hat{B}k+\hat{B}^2\frac{k^2}{2!}-....+\hat{B}^n\frac{(-k)^n}{n!}+....\right)$$

$$=\left(\hat{I}+\hat{B}k+\hat{B}^2\frac{k^2}{2!}+....+\hat{B}^n\frac{k^n}{n!}+....\right)\left(\hat{A}-\hat{A}\hat{B}k+\hat{A}\hat{B}^2\frac{k^2}{2!}-....+\hat{A}\hat{B}^n\frac{(-k)^n}{n!}+....\right)$$

$$=\hat{A}+(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})k+\frac{k^2}{2!}(\hat{A}\hat{B}^2+\hat{B}^2\hat{A}-2\hat{B}\hat{A}\hat{B})+\frac{k^2}{3!}(.............)+......$$

$$=\hat{A}+k[\hat{B},\hat{A}]+\frac{k^2}{2!}(\hat{A}\hat{B}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{B}\hat{A}-\hat{B}\hat{A}\hat{B})+.........\ ....$$

$$=\hat{A}+k[\hat{B},\hat{A}]+\frac{k^2}{2!}\{\hat{B}(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})-(\hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B})\hat{B}\}+.........\ ....$$

$$=\hat{A}+k[\hat{B},\hat{A}]+\frac{k^2}{2!}[\hat{B},[\hat{B},\hat{A}]]+.........\ ....\ ....\ ....\ ....$$

حالة خاصة (١) : عندما k = 1

$$F(1)=e^{\hat{B}}\hat{A}e^{-\hat{B}}=\hat{A}+[\hat{B},\hat{A}]+\frac{1}{2!}[\hat{B}[\hat{B},\hat{A}]]+...........$$

حالة خاصة (٢) : عندما $\hat{A}=\hat{I}$ فإن :

$$e^{\hat{B}}\hat{I}\,e^{-\hat{B}}=e^{\hat{B}}\,e^{-\hat{B}}=\hat{I}+\left[\hat{B},\hat{I}\right]+\frac{1}{2!}\left[\hat{B}\left[\hat{B},\hat{I}\right]\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ولكن : $\left[\hat{B},\hat{I}\right]=0$ { أي مؤثر يكون متبادلاً مع مؤثر الوحدة }

$$\therefore\ e^{\hat{0}}=\hat{I} \qquad\qquad \therefore\ e^{\hat{B}}\,e^{-\hat{B}}=\hat{I}$$

حيث $\hat{0}$ هو المؤثر الصفرى ويعرف بالعلاقة :

$$\hat{B}+\left(-\hat{B}\right)=\hat{0}$$

والعلاقة الأخيرة تكافئ العلاقة الجبرية العادية $e^{0}=1$ ولكن في صورة مؤثرات .

مثال (٢) : باعتبار الدالة $F(k)$ لها الصورة $F(k)=e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}$

حيث k عدد قياس ، $\hat{A},\hat{B}$ مؤثران خطيان ، لا يعتمد أي منهما على k

وبحيث أن :

$$\left[\hat{A},\hat{C}\right]=\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0 \quad , \quad \text{حيث :} \quad \hat{C}=\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

(i) أثبت أن الدالة $F(k)$ بصورتها المعطاه ، تحقق المعادلة التفاضلية الآتية

$$F'(k)=\frac{dF}{dk}=\left(\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}\right)F(k)$$

(ii) أثبت أن الدالة $F(k)$ يمكن كتابتها بالصورة

$$F(k)=e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^{2}}$$

ومن ذلك استنتج علاقة جلوبر (Glauber's relation) بالصورة :

$$e^{\hat{A}}.e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}}.e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}$$

الحـــل :

(i) حيث أن : $F(k)=e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}$

فإن

$$F'(k)=\frac{dF(k)}{dk}=\frac{d}{dk}\left(e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}\right)=e^{\hat{A}k}.\hat{B}e^{\hat{B}k}+\hat{A}e^{\hat{A}k}.e^{\hat{B}k}$$

$$=e^{\hat{A}k}.\hat{B}\,\underbrace{e^{-\hat{A}k}e^{\hat{A}k}}\,e^{\hat{B}k}+\hat{A}e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}$$

$$=e^{\hat{A}k}\hat{B}e^{-\hat{A}k}\left(e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}\right)+\hat{A}\left(e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}\right)$$

$$=\left\{e^{\hat{A}k}\hat{B}e^{-\hat{A}k}+\hat{A}\right\}\left(e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}\right)$$

$$=\left\{\hat{A}+e^{\hat{A}k}\hat{B}e^{-\hat{A}K}\right\}F(k) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

وحيث أن :

$$\left[\hat{A},\hat{C}\right]=\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0 \quad \leftarrow \quad \hat{C}=\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

فإن :

$$e^{\hat{A}K}\hat{B}e^{-\hat{A}k}=\hat{B}+k\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\frac{k^2}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\ldots\ldots\ldots$$

(من مثال رقم (1))

$$\therefore e^{\hat{A}K}\hat{B}e^{-\hat{A}K}=\hat{B}+k\hat{C}+\frac{k^2}{2!}\left[\hat{A},\hat{C}\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\hat{B}+k\hat{C}$$

بالتعويض في (1) :

$$\therefore F'(k)=\frac{dF}{dk}=\left\{\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}\right\}F(k) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

وهو المطلوب أولا .

(ii) لإثبات أن الدالة F(k) لها الصورة

$$F(k)=e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

نثبت أن هذه الصورة تحقق المعادلة التفاضلية(2) .

فحيث أن :

$$F(k)=e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

حيث :

$$\hat{C}=\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

فبالتفاضل :

$$F'(k)=\frac{dF}{dk}=e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\hat{k}}\hat{C}ke^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}+\left(\hat{A}+\hat{B}\right)e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(3)$$

ولكن :

$$e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}\hat{C}\,e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}=\hat{C}+k\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right),\hat{C}\right]+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ومن العلاقة : $\left[\hat{A},\hat{C}\right]=\left[\hat{B},\hat{C}\right]=0$

فإن :

$$\left[\left(\hat{A}+\hat{B}\right),\hat{C}\right]=0$$

$$\therefore e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}\hat{C}\,e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}=\hat{C}$$

وبالضرب من اليمين في $e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}$:

$$e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}\hat{C}=\hat{C}e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k} \quad \text{\_\_\_\_\_\_}(4)$$

حيث :

$$e^{-\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}=\hat{I}$$

وبالتعويض في (3) :

$$\therefore F'(k) = k\hat{C}e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}\cdot e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2} + \left(\hat{A}+\hat{B}\right)e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

$$= \left(\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}\right)e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}c\hat{k}^2} = \left(\hat{A}+\hat{B}+k\hat{C}\right)F(k)$$

أي أن الصورة المعطاة :

$$F(k) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\hat{C}k^2}$$

حيث $\hat{C} = \left[\hat{A},\hat{B}\right]$ تحقق المعادلة التفاضلية للدالة F(k)

وهو المطلوب .

<u>استنتاج علاقة جلوبر :</u>

حيث أن الدالة $F(k) = e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k}$ تحقق المعادلة التفاضلية

$$F'(k) = \left\{\hat{A}+\hat{B}+k\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right\}F(k)$$

وأن الدالة F(k) لها أيضا الصورة :

$$F(k) = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]k^2}$$

فيمكننا كتابة العلاقة :

$$e^{\hat{A}k}e^{\hat{B}k} = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)k}.e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]k^2} \qquad \text{(5)}$$

وبوضع k=1 في (5) فإن :

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}.e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]} \qquad \text{(6)}$$

وهي علاقة جلوبر (Glauber 's relation) .

<u>حالة خاصة</u> :- إذا كان المؤثران $\hat{A},\hat{B}$ متبادلان فإن $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0$ ، وتؤول العلاقة (6) إلي :

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}$$

وهي نفس العلاقة الجبرية المعتادة ولكن في صورة مؤثرات .

<u>مثال (٣)</u> : إذا كان $\hat{H}$ مؤثر خطي وكانت الدالة

$$F(t)=e^{i\hat{H}t}\hat{F}_0e^{-i\hat{H}t}$$

تشكل مؤثراً قابلاً للاشتقاق بحيث أن $\hat{H}$ لا يعتمد على t ، وكذلك $\hat{F}_0$ ، أثبت أن F (t) تحقق المعادلة التكاملية الآتية :

$$F(t)=\hat{F}_0+i\left[\hat{H},\int_0^t F(\tau)d\tau\right]$$

حيث $\hat{F}_0=\hat{F}(0)$ عند $t=0$

<u>الحـــل</u>: حيث أن المؤثر F (t) قابل للاشتقاق فإن :

$$\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}\left[e^{i\hat{H}t}\hat{F}_0\ e^{-i\hat{H}t}\right]=e^{i\hat{H}t}\frac{d}{dt}\left(\hat{F}_0\ e^{-i\hat{H}t}\right)+\frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}t}\right).\hat{F}_0\ e^{-i\hat{H}t} \_\_\_\_\_ (1)$$

وبوضع $e^{i\hat{H}t}$ في صورة متسلسلة فإن :

$$e^{i\hat{H}t}=\hat{I}+i\hat{H}t+\frac{\left(i\hat{H}t\right)^2}{2!}+\dots\dots\dots+\frac{\left(i\hat{H}t\right)^n}{n!}+\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}t}\right)=i\hat{H}+t\left(i\hat{H}\right)^2+\dots\dots\dots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(i\hat{H}\right)^n+\dots\dots$$

$$=\left(\hat{I}+i\,t\hat{H}+\dots\dots+\frac{\left(i\,t\hat{H}\right)^{n-1}}{(n-1)!}+\dots\dots\right)\left(i\ \hat{H}\right)=e^{i\hat{H}t}\left(i\ \hat{H}\right) \_\_\_\_ (2)$$

وبالمثل فإن :

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-i\hat{H}t}\right)=e^{-i\hat{H}t}\left(-i\hat{H}\right) \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

وبالتعويض في (1) [مع اعتبار أن $\hat{F}_0, \hat{H}$ لا تعتمدان على t] :

$$\frac{dF}{dt} = e^{i\hat{H}t}\hat{F}_0 \frac{d\left(e^{-i\hat{H}t}\right)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(e^{i\hat{H}t}\right)\cdot \hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t}$$
$$= e^{i\hat{H}t}\hat{F}_0 \cdot e^{-i\hat{H}t}\left(-i\hat{H}\right) + e^{i\hat{H}t}\left(i\hat{H}\right)\hat{F}_0 e^{-i\hat{H}t}$$
$$= -i\hat{F}(t)\hat{H} + i\ \hat{H}\ \hat{F}(t)$$

[حيث أن $e^{i\hat{H}t}\hat{H} = \hat{H}e^{i\hat{H}t}$ وذلك من خاصية أن أي مؤثر يكون متبادلاً مع أي قوة له بمعنى أن $\hat{A}e^{k\hat{A}} = e^{k\hat{A}}\hat{A}$] .

$$\therefore \frac{d\hat{F}}{dt} = i\left(\hat{H}\ \hat{F} - \hat{F}\ \hat{H}\right) = i\left[\hat{H}, \hat{F}(t)\right] \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (4)$$

ولما كان $\hat{H}$ لا يعتمد على t فإن تكامل العلاقة (4) يعطينا :

$$\hat{F}(t) = \hat{F}_0 + i\left[\hat{H}, \int_0^t \hat{F}(\tau)d\tau\right]$$

حيث أنه عند t = 0 فإن $\hat{F}(0) = \hat{F}_0$ وهو المطلوب .

<u>مثال (٤)</u> : بفرض أن λ هي كمية صغيرة ، أوجد مفكوك المـؤثر $\left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)^{-1}$ كمتسلسلة قوى في λ ، وذلك بفرض أن معكوس $\hat{A}$ هو $\hat{A}^{-1}$.

<u>الحـل</u>: نفرض أن المفكوك المطلوب إيجاده يمكن كتابته في صورة متسلسلة في قوى λ بالصورة

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{L}_n \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

حيث $\hat{L}_n$ مجموعة مؤثرات ، والمطلوب إيجادها .

فبضرب (1) من اليسار في $\left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)$ فأننا نحصل على :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)\hat{L}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{A} L_n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lambda \hat{B} \hat{L}_n$$

$$= \hat{A}\hat{L}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \hat{A}\hat{L}_n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lambda \hat{B}\hat{L}_n = \hat{A}\ \hat{L}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n (\hat{A}\hat{L}_n - \hat{B}\hat{L}_{n-1})$$

وبمساواة معاملات قوى λ المختلفة في الطرفين نحصل على :

$$1 = \hat{A}\hat{L}_0 \qquad \rightarrow \qquad \hat{L}_0 = \hat{A}^{-1}$$

$$0 = \hat{A}\hat{L}_n - \hat{B}\,\hat{L}_{n-1} \;\rightarrow\; \hat{L}_n = \hat{A}^{-1}\,\hat{B}\,\hat{L}_{n-1}$$

(n = 1 , 2 , ……. لقيم)

$$\hat{L}_1 = \hat{A}^{-1}\hat{B}\,\hat{A}^{-1} \qquad \leftarrow \qquad \hat{L}_1 = \hat{A}^{-1}\hat{B}\,\hat{L}_0 \qquad : n = 1$$

$$\hat{L}_2 = \hat{A}^{-1}\hat{B}\,\hat{A}^{-1}\,\hat{B}\,\hat{A}^{-1} \qquad \leftarrow \qquad \hat{L}_2 = \hat{A}^{-1}\hat{B}\,\hat{L}_1 \qquad : n = 2$$

وهكذا …………………

وبذلك نحصل على :

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\,\hat{L}_n = \hat{L}_0 + \lambda\,\hat{L}_1 + \lambda^2\,\hat{L}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \hat{A}^{-1} + \lambda\,\hat{A}^{-1}\hat{B}\,\hat{A}^{-1} + \lambda^2\,\hat{A}^{-1}\,\hat{B}\,\hat{A}^{-1}\,\hat{B}\,\hat{A}^{-1} + \ldots\ldots\ldots$$

<u>ملحوظة : </u>في حالة إذا كانت A,B أعداداً وليست مؤثرات فإن هذا المفكوك يــؤول إلى المفكوك العادي وهو :

$$\left(A - \lambda B\right)^{-1} = \frac{1}{A - \lambda B} = A^{-1} + \lambda B\,A^{-2} + \lambda^2\,B^2\,A^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{1}{A} + \lambda\frac{B}{A^2} + \lambda^2\,\frac{B^2}{A^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[٢] <u>بعض المؤثرات الخاصة :</u>

<u>مؤثرات الانتقال والدوران والازدواجية (أو الندية):</u>

<u>(Translation ,Rotation, and parity operators)</u>

سوف ندرس في هذه الفقرة بعض المؤثرات الهامة التي لها تطبيقات هامة فـــي النظرية الكمية للذرات والنويات الذرية .

(١) <u>مؤثر الانتقال أو الإزاحة الانتقالية (Translation operator)</u>

يعرف هذا المؤثر بالعلاقة $\hat{T}\,\psi(x) = \psi(x + a)$

حيث α هي المسافة التي أزيح بها الجسيم عن موضعه الأصلي x .

$$\psi(x+a)=\psi(x)+\frac{a}{1!}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)+\frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}\psi(x) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)$$

وباعتبار مفكوك الدالة الاسية:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots\ldots=\sum\frac{1}{n!}x^n \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

بمقارنة (2) , (1) يتضح أن :

$$\psi(x+a)=e^{\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

وبأخذ مؤثر الإنتقال الصورة :

$$\hat{T}\psi(x)=e^{\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}} \qquad \rightarrow \qquad \therefore \hat{T}=e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}$$

(٢) مؤثر الدوران أو الإزاحة الدورانية (Rotation operator)

يعرف هذا المؤثر بالعلاقة :

$$\hat{R}\psi(\phi)=\psi(\phi+\alpha)$$

حيث α هي الإزاحة الزاوية للجسيم عن موضعه الأصلي تحت تـأثير ذلـك المؤثر .

وبالتعبير عن $\psi(\phi+\alpha)$ في صورة متسلسلة تيلور :

$$\psi(\phi+\alpha)=\psi(\phi)+\frac{\alpha}{1!}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi(\phi)+\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\psi(\phi)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\sum\frac{1}{n!}\alpha^n\frac{\partial^n}{\partial\phi n}\psi(\phi)=\sum\frac{1}{n!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\psi(\phi) \qquad \_\_\_\_\_ (3)$$

ولكن :

$$e^x=\sum\frac{1}{n!}x^n$$

فبالمقارنة نجد أن :

$$\hat{R}\psi(\phi)=e^{\alpha\frac{\partial\psi}{\partial\phi}}$$

وبذلك فإن مؤثر الدوران يأخذ الصورة : $\hat{R}=e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\phi}}$

[٣] مؤثر الازدواجية أو الندية (Parity operator) :

يعرف مؤثر الازدواجية $\hat{\Pi}$ بالعلاقة الآتية $\hat{\Pi}\psi(x)=\psi(-x)$ لأي دالة $\psi(x)$ ، وهو مؤثر خطي وهيرميتي وقيمته الذاتية $\lambda=\pm 1$

وفي حالة إذا كانت $\lambda=+1$: فإن الدوال الذاتية المناظرة تسمي الدوال ذات الندية الزوجية $\psi_e(x)$(Even parity Function)

وتعرف بالعلاقة : $\psi_e(x)=\psi_e(-x)$

وفي حالة إذا كانت $\lambda=-1$: فإن الدوال الذاتية المناظرة تسمي الدوال ذات الندية الفردية $\psi_0(x)$(Odd parity Function)

وتعرف بالعلاقة :

$$\psi_0(x)=-\psi_0(-x)$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) :- إذا عرف مؤثر الانتقال بالعلاقة $\hat{T}\psi(x)=\psi(x+a)$ أي أن تأثيره هو إزاحة الموضع خلال مسافة ثابتة a ، أثبت أن :

(أ) $\hat{T}$ يمكن كتابته بدلالة مؤثر كمية الحركة الخطية $\hat{p}=\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ بالصورة $\hat{T}=e^{b\hat{p}}$ حيث b ثابت .

(ب) $\hat{T}$ هو مؤثر واحدي

الحل :

(أ) باستخدام مفكوك تيلور يمكننا كتابه :

$$\hat{T}\psi(x)=\psi(x+a)=\psi(x)+a\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)+\frac{a^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)$$

$$=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n!}\alpha^n\frac{\partial^n}{\partial x^n}\psi(x)=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\psi(x)$$

ولكن :

$$\therefore \hat{T}\psi(x)=\sum\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\hat{p}\right)^{n}\psi(x) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}=\frac{i}{h}\hat{p}\right.$$

ولما كانت :

$$e^{x}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n}$$

$$\therefore \hat{T}\psi(x)=e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}\psi(x) \qquad \therefore \hat{T}=e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}=e^{b\hat{p}}$$

حيث $b=\dfrac{ia}{\hbar}$ ، ومن ذلك نرى أن $\hat{T}$ قد أمكن كتابته بدلالة المؤثر $\hat{P}$.

(ب) لإثبات أن $\hat{T}$ هو مؤثر واحدي ، يجب إثبات أن $\hat{T}\hat{T}^{+}=\hat{T}^{+}\hat{T}=\hat{\mathrm{I}}$

ولإثبات ذلك: لأي دالتين $\psi(x),\phi(x)$ يمكننا تعريف المؤثر المترافق $\hat{T}^{+}$ بالعلاقة :

$$\int\psi^{*}(x)\hat{T}^{+}\phi(x)dx=\int\left(\hat{T}\psi(x)\right)^{*}\phi(x)dx$$

$$\therefore \int\psi^{*}(x)\hat{T}^{+}\phi(x)dx=\int\psi^{*}(x+a)\phi(x)dx$$

وبتغيير المتغير $(x-a) \quad \leftarrow \quad x$

وبالتالي : $(x) \quad \leftarrow \quad x-a$ في الطرف الأيمن

$$\therefore \int\psi^{*}(x)\hat{T}^{+}\phi(x)dx=\int\psi^{*}(x)\phi(x-a)dx$$

$$\therefore \hat{T}^{+}\phi(x)=\phi(x-a) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

وبالضرب من اليسار في $\hat{T}$

$$\therefore \hat{T}\hat{T}^{+}\phi(x)=\hat{T}\phi(x-a)=\phi(x-a+a)=\phi(x)=\hat{\mathrm{I}}\phi(x)$$

وبمقارنة الطرفين :

$$\therefore \hat{T}\hat{T}^{+}=\hat{\mathrm{I}} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

أيضاً : حيث أن :

$$\hat{T}\phi(x)=\phi(x+a)$$

فبالضرب من اليسار في $\hat{T}^{+}$:

$$\hat{T}^{+}\hat{T}\phi(x)=\hat{T}^{+}\phi(x+a)=\phi(x+a-a)=\phi(x)=\hat{I}\phi(x)$$

(باستخدام (1))

$$\therefore \hat{T}^{+}\hat{T}=\hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(3)$$

من (3),(2) يتضح أن $\hat{T}$ هو مؤثر واحدي .

مثال (٢) : أثبت أن مؤثر الازدواجية أو الندية $\hat{\Pi}$ المعرف بالعلاقة :

$\hat{\Pi}\psi(x)=\psi(-x)$ هو مؤثر خطي وأن القيم الذاتية له هي $\lambda=\pm1$

الحـل : لإثبات أن $\hat{\Pi}$ هو مؤثر خطي يجب أن نثبت الأتي :

$$\hat{\Pi}(\psi+\phi)=\hat{\Pi}\psi+\hat{\Pi}\phi$$

$$\hat{\Pi}(\alpha\psi)=\alpha\hat{\Pi}\psi$$

$$\hat{\Pi}[\psi(x)+\phi(x)]=[\psi(-x)+\phi(-x)]$$

$$=\hat{\Pi}\psi(x)+\hat{\Pi}\phi(x)$$

أيضاً :

$$\hat{\Pi}[\alpha\psi(x)]=\alpha\psi(-x)=\alpha\hat{\Pi}(x)$$

ولإيجاد القيم الذاتية : نكتب معادلة القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$

$$\hat{\Pi}\psi=\lambda\psi \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

حيث λ هي القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$ في الحالة الموصوفة بالدالة ψ

وبضرب (1) في $\hat{\Pi}$ من اليسار:

$$\hat{\Pi}\hat{\Pi}\psi = \lambda\hat{\Pi}\psi = \lambda(\lambda\psi)$$
$$\therefore \hat{\Pi}^2\psi = \lambda^2\psi$$

وحيث أن :

$$\Pi^2\psi = \hat{\Pi}\left[\hat{\Pi}\psi(x)\right] = \hat{\Pi}\psi(-x) = \psi(x)$$

فبالمقارنة نجد أن :

$$\therefore \lambda^2 = 1 \qquad \therefore \lambda = \pm 1$$

أي أن القيم الذاتية للمؤثر $\hat{\Pi}$ هي $\lambda = \pm 1$

في حالة $\lambda = +1$: الدوال تسمى بدوال ذات ندية زوجية

$$\psi_e(x) = \psi_e(-x)$$

وفي حالة $\lambda = -1$: الدوال تسمى بدوال ذات ندية فردية

$$\psi_0(x) = -\psi_0(x)$$

<u>مثال(٣)</u> : أثبت أن مؤثر الندية لنظام ما $\hat{\Pi}$ هو كمية محفوظة (Conserved) بمعنى أنه يتبادل مع مؤثر هاملتون للنظام ← $\left[\hat{\Pi},\hat{H}\right] = 0$

<u>الحـل :</u> من المعلوم في ميكانيكا الكم أنه إذا كان هناك كمية فيزيائية ثابتة فان المؤثر الديناميكي المناظر لها يتبادل مع الهاملتونيان كمؤثر ، ويقال في هذه الحالة أن المؤثر يشكل كمية محفوظة في النظام .

<u>ولإثبات ذلك بالنسبة لمؤثر الندية :</u>

$$\hat{\Pi}\hat{H}(\bar{r})\psi(\bar{r}) = \lambda E\psi(\bar{r})$$
$$\hat{H}(r)\hat{\Pi}\psi(\bar{r}) = E\lambda\psi(\bar{r})$$

بالطرح نجد أن :

$$\hat{\Pi}\hat{H}(\bar{r})\psi(\bar{r})-\hat{H}\,\hat{\Pi}\,\psi(\bar{r})=0\,]$$

$$\therefore\left(\hat{\Pi}\hat{H}-\hat{H}\hat{\Pi}\right)\psi(\bar{r})=0$$

ولكن $\psi(\bar{r})\neq 0$:

$$\therefore\left(\hat{\Pi}\hat{H}-\hat{H}\hat{\Pi}\right)=0 \qquad \therefore\left[\hat{\Pi},\hat{H}\right]=0$$

وهذا يعني أن مؤثر الندية $\hat{\Pi}$ يتبادل مع مؤثر هاملتون بمعنى أنه يشكل كمية محفوظة للنظام .

ملحوظة : العلاقة $\left[\hat{\Pi},\hat{H}\right]=0$ تعني أيضا أن $\hat{\Pi}$ يمثل ثابتا من ثوابت الحركة .

مثال (٤) : إذا كان المؤثر $\hat{T}$ يعرف بالعلاقة :

$$\hat{T}\phi(x)=\phi(x+a)$$

حيث a ثابت ، وكان المؤثر $\hat{\Pi}$ يعرف بالعلاقة $\hat{\Pi}\phi(x)=\phi(-x)$

فأثبت العلاقات الآتية :

$$\text{(i)}\quad \hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}=\hat{\Pi} \qquad\qquad \text{(ii)}\ \hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}^2\hat{\Pi}\hat{T}=\hat{I}$$

$$\text{(iii)}\ \left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right)\left(\hat{I}-\hat{\Pi}\right)=\hat{0} \qquad\qquad \text{(iv)}\left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right)^2=2\left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right)$$

وإذا كانت $\phi(x)$ دالة زوجية في x فأثبت أن $\left[\hat{T},\hat{\Pi}\right]\phi(x)=\hat{0}$ حيث $\hat{0},\hat{I}$ هما المؤثران الصفرى والمحايد على الترتيب .

الحل :

$$\text{(i)}\ \hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}\phi(x)=\hat{T}\hat{\Pi}\phi(x+a)=\hat{T}\phi(-x-a)$$

$$=\phi(-x-a+a)=\phi(-x)=\hat{\Pi}\phi(x)$$

$$\therefore\ \hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}=\hat{\Pi} \qquad\qquad (1)$$

$$\text{(ii)}\ \hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}^2\hat{\Pi}\hat{T}\phi(x)=\hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}\hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}\phi(x)=\left(\hat{T}\hat{\Pi}\hat{T}\right)^2\phi(x)=\hat{\Pi}^2\phi(x)$$

(باستخدام (1)) ، ولكن :

$$\hat{\Pi}^2\phi(x)=\hat{\Pi}\,\hat{\Pi}\phi(x)=\hat{\Pi}\phi(-x)=\phi(x)$$

$$\therefore \hat{\Pi}^2=\hat{I} \qquad \therefore \hat{T}\,\hat{\Pi}\,\hat{T}^2\,\hat{\Pi}\,\hat{T}=\hat{\Pi}^2=\hat{I} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

$$\text{(iii)}\ \left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right)\left(\hat{I}-\hat{\Pi}\right)=\hat{I}^2-\hat{\Pi}^2=\hat{I}-\hat{I}=\hat{0} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

$$\text{(iv)}\ \left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right)^2=\left(\hat{I}^2+2\hat{I}\,\hat{\Pi}+\hat{\Pi}^2\right)=\hat{I}^2+2\hat{I}\,\hat{\Pi}+\hat{I}^2=2\hat{I}+2\hat{\Pi}$$

$$=2\left(\hat{I}+\hat{\Pi}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (4)}$$

وإذا كانت $\phi(x)$ دالة زوجية في x فإن $\phi(x)=\phi(-x)$

$$\therefore \left[\hat{T},\hat{\Pi}\right]\phi(x)=\left(\hat{T}\,\hat{\Pi}-\hat{\Pi}\,\hat{T}\right)\phi(x)$$

$$=\hat{T}\,\hat{\Pi}\phi(x)-\hat{\Pi}\,\hat{T}\phi(x)$$

$$=\hat{T}\phi(-x)-\hat{\Pi}\phi(x+a)$$

$$=\hat{T}\phi(x)-\phi(-x-a)=\phi(x+a)-\phi(x+a)=\hat{0}$$

وهو المطلوب .

[٣] أمثلة عامة على المؤثرات :

في هذا الفقرة سوف نعطي مجموعة من الأمثلة العامة على خواص المؤثرات مع حلولها النموذجية، وذلك بهدف مراجعة ما سبق دراسته عن المؤثرات في البابين الثاني والثالث .

<u>مثال (١)</u> :

إذا كان $\hat{A},\hat{B}$ مؤثران متبادلان مع مبدولها $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ فباستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي ، أثبت أن :

$$\text{(i)}\ \left[\hat{A},\hat{B}^n\right]=n\hat{B}^{n-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

$$\text{(ii)}\ \left[\hat{A}^n,\hat{B}\right]=n\,\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

الحـــل :

حيث أن كل من $\hat{A},\hat{B}$ متبادلان مع $[\hat{A},\hat{B}]$ فإذا كان:

$[\hat{A},\hat{B}]=\hat{C}$ فان : $[\hat{A},\hat{C}]=[\hat{B},\hat{C}]=0$

والآن نطبق مبدأ الاستنتاج الرياضي كالتالي :

(١) نختبر صحة العلاقة (i) في حالة n=1 : واضح أن العلاقة صحيحه فـــي هذه الحالة .

(٢) نفرض أن العلاقة صحيحة عندما n = m ، أي نفرض أن :

$$\left[\hat{A},\hat{B}^{m}\right]=m\hat{B}^{m-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right] \qquad (1)$$

(٣) ونثبت صحة العلاقة عندما n=m+1 ففي هذه الحالة

$$\left[\hat{A},\hat{B}^{m+1}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}^{m}\hat{B}\right]=\left[\hat{A},\hat{B}^{m}\right]\hat{B}+\hat{B}^{m}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

$$=m\hat{B}^{m-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}+\hat{B}^{m}\left[\hat{A},\hat{B}\right]=m\hat{B}^{m}\left[\hat{A},\hat{B}\right]+\hat{B}^{m}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

حيث

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{B}=\hat{B}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

($\hat{B}$ متبادل مع $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$)

$$\therefore\left[\hat{A},\hat{B}^{m+1}\right]=(m+1)\hat{B}^{m}\left[\hat{A},\hat{B}\right]=(m+1)\hat{B}^{(m+1)-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

أي أن العلاقة صحيحة عندما n = m+1 إذا كانت صحيحة في حالـــة n = m ،إذاً فهي صحيحة على الإطلاق (من مبدأ الاستنتاج الرياضي) .

وبالمثل يمكن إثبات العلاقة (ii) .

وهو المطلوب .

مثال (٢) : إذا كانت المؤثرات الهيرميتية $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ تخضع للعلاقات الآتية :

$$[\hat{A},\hat{B}]=2i\hat{C},\quad [\hat{B},\hat{C}]=2i\hat{A}$$

$$[\hat{C},\hat{A}]=2i\hat{B}\quad ,\quad \hat{A}^2+\hat{B}^2+\hat{C}^2=3\hat{I}$$

وكان المؤثران $\hat{S}_+,\hat{S}_-$ يعرفان بالعلاقتين : $\hat{S}_+=\hat{A}+i\hat{B},\hat{S}_-=\hat{A}-i\hat{B}$

فأثبت العلاقات الآتية :

(i) $[\hat{S}_+ , \hat{C}]=-2\hat{S}_+$

(ii) $[\hat{S}_- , \hat{C}]=2\hat{S}_-$

(iii) $[\hat{S}_+ ,\hat{S}_-]=4\hat{C}$

(iv) $\hat{S}_+\hat{S}_-+\hat{S}_-\hat{S}_+=6\left(\hat{I}-\frac{1}{3}\hat{C}^2\right)$

الحـــل :

(i) $$[\hat{S}_+,\hat{C}]=[\hat{A}+i\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]+i[\hat{B},\hat{C}]=-2i\hat{B}+i(2i\hat{A})$$
$$=-2i\hat{B}-2\hat{A}=-2(\hat{A}+i\hat{B})=-2\hat{S}_+$$

(ii) $$[\hat{S}_-,\hat{C}]=[\hat{A}-i\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]-i[\hat{B},\hat{C}]$$
$$=-2i\hat{B}-i(2i\hat{A})=-2i\hat{B}+2\hat{A}=2[\hat{A}-i\hat{B}]=2\hat{S}_-$$

(iii) $$[S_+,S_-]=[\hat{A}+i\hat{B},\hat{A}-i\hat{B}]=(\hat{A}+i\hat{B})(\hat{A}-i\hat{B})-(\hat{A}-i\hat{B})(\hat{A}+i\hat{B})$$
$$=\hat{A}^2-i\hat{A}\hat{B}+i\hat{B}\hat{A}+\hat{B}^2-(\hat{A}^2+i\hat{A}\hat{B}-i\hat{B}\hat{A}+\hat{B}^2)$$
$$=-2i(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})=-2i[\hat{A},\hat{B}]=-2i(2i\hat{C})=4\hat{C}$$

(iv) $$S_+S_-+S_-S_+=(\hat{A}+i\hat{B})(\hat{A}-i\hat{B})+(\hat{A}-i\hat{B})(\hat{A}+i\hat{B})$$
$$=\hat{A}^2-i\hat{A}\hat{B}-i\hat{B}\hat{A}+\hat{B}^2+(\hat{A}^2+i\hat{A}\hat{B}-i\hat{B}\hat{A}+\hat{B}^2)$$
$$=2(\hat{A}^2+\hat{B}^2)=2(3\hat{I}-\hat{C}^2)=6\left(\hat{I}-\frac{1}{3}\hat{C}^2\right)$$

وهو المطلوب .

مثال (٣) : في نظام ميكروسكوبي ، إذا كان هناك تحويل معين للإحـــداثيات مـــن $x \to x'$ بحيث يحفظ هـــذا التحويـــل مـــؤثر هـــاملتون للنظـــام بـــدن تغيـــر (invariant) أي $\hat{H}(x') = \hat{H}(x)$ فاثبـــــت أن مـــــؤثر التحويـــــل للإحداثيات $\hat{A}\psi(x) = \psi(x')$ يكون متبادلا مع مؤثر هاملتون أي $\left[\hat{A}, \hat{H}\right] = 0$ ، وإذا كان مؤثر التحويل هذا واحديا فاثبت أنـــه يحفـــظ الهاملتونيـــان (مـــؤثر هاملتون) بدون تغيير .

الحـــل:

حيث أن :

$$\hat{H}(x') = \hat{H}$$

$$\hat{A}\psi(x) = \psi(x')$$

فإن :

$$\hat{A}\left[\hat{H}(x)\psi(x)\right] = \hat{H}(x')\psi(x') = \hat{H}(x)\,\psi(x') = H(x)\hat{A}\psi(x)$$

$$\therefore \hat{A}\hat{H}(x) = \hat{H}(x)\hat{A} \quad \therefore \hat{A}\hat{H}(x) - \hat{H}(x)\hat{A} = 0 \quad \therefore \left[\hat{A}, \hat{H}(x)\right] = 0$$

أي أن مـــؤثر التحويـــل للإحـــداثيات $\hat{A}$ (Coordinate transformation operator) يكون متبادلا مع مؤثر هاملتون للنظام .

ولإثبات خاصة اللاتغير في $\hat{H}$ بالنسبة للتحويل $\hat{A}$ إذا كان واحديا:

ندخل المؤثر العكسي (معكوس $\hat{A}$) بحيث أن $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$

وحيث أن $\hat{A}\hat{H}(x) = \hat{H}(x)\hat{A}$ فبالضرب من اليمين في $\hat{A}^{-1}$

$$\therefore \hat{A}\hat{H}\hat{A}^{-1} = \hat{H}\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{H}\hat{I} = \hat{H} \qquad (1)$$

ومن هذا يتضح أنه إذا كان المؤثر $\hat{A}$ واحديا فإن التحويل الواحـــدي $\hat{A}\hat{H}\hat{A}^{-1}$ يعطينا المؤثر $\hat{H}$ نفسه أي أنه يحفظ مؤثر هاملتون لامتغيراً .

وهو المطلوب .

<u>مثال(٤) :</u> إذا كان $\hat{A}$ مؤثرا خطيا له مجموعه من الدوال الذاتية التامة والعيارية المتعامدة $\{\psi_n\}$ تناظرها مجموعة من القيم الذاتية الحقيقة $\{a_n\}$ ، فاثبت أن هذا المؤثر يكون هيرميتيا .

<u>الحل :</u>

نفرض أن Ψ,ϕ هما دالتان تشكل كل منهم مجموعة تامة بحيث أن :

$$\Psi=\sum_n c_n\psi_n , \Phi=\sum_m d_m\psi_m$$

حيث $$c_n=(\psi_n,\Psi), d_m=(\psi_m,\Phi)$$

(من نظرية المفكوك).

المطلوب إثبات أنه إذا كانت Ψ,Φ هي دوال ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ فإن هذا المؤثر يكون هيرميتيا أي أن $(\Psi,\hat{A}\Phi)=(\hat{A}\Psi,\Phi)$

<u>نعتبر أولا</u> $(\Psi,\hat{A}\Phi)$:

$$(\Psi,\hat{A}\Phi)=\left(\sum_n c_n\psi_n , \hat{A}\sum_m d_m\psi_m\right)$$

$$=\left(\sum_m c_n\psi_n , \sum_m d_m\hat{A}\psi_m\right)=\left(\sum_n c_n\psi_n , \sum_m d_m a_m\psi_m\right)$$

حيث $\hat{A}\psi_m=a_m\psi_m$ ، وإذا كانت $(\psi_n,\psi_m)=\delta_{nm}$:

$$\therefore (\Psi,\hat{A}\Phi)=\sum_{n,m} c_n^* d_m a_m(\psi_n,\psi_m)=\sum_{n,m} c_n^* a_m d_m\delta_{nm}=\sum_n c_n^x a_n d_n \quad \_\_(1)$$

<u>نعتبر الآن:</u> $(\hat{A}\Psi,\Phi)$:

$$(\hat{A}\Psi,\Phi)=\left(\hat{A}\sum_n c_n\psi_n , \sum_m d_m\psi_m\right)=\left(\sum_n c_n\hat{A}\psi_n , \sum_m d_m\psi_m\right)$$

$$=\left(\sum_n c_n a_n\psi_n , \sum_m d_m\psi_m\right)$$

حيث $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$ ، وإذا كانت $(\psi_n,\psi_m)=\delta_{nm}$:

$$\therefore \left(\hat{A}\Psi,\Phi\right)=\sum_{n,m} c_n^* a_n^* d_m (\psi_n,\psi_m)=\sum_{n,m} c_n^* a_n d_m \delta_{nm} \quad \Big| \; a_n^* = a_n$$

$$=\sum_n c_n^* a_n d_n \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

من (2) , (1) نجد أن $\left(\Psi,\hat{A}\Phi\right)=\left(\hat{A}\Psi,\Phi\right)$

وهذا يعني أن $\hat{A}$ هو مؤثر هيرميتي .

<u>ملحوظة:</u> استخدمنا في البرهان العلاقتين الآتيتين :

$$(a\psi, bc\phi) = a^* bc(\psi,\phi)$$
$$(ab\psi, c\phi) = a^* b^* c(\psi,\phi)$$

<u>مثال (٥)</u> : أثبت أن المجموع $\hat{F} = \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$ يكون هيرميتيا لأي زوجين من المؤثرات الهيرميتية $\hat{A},\hat{B}$ سواء كان المؤثران متبادلان أم غير متبادلان بينما الفرق $\hat{G} = \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ لا يشكل مؤثرا هيرميتيا .

<u>الحـل:</u>

حيث $\hat{A},\hat{B}$ هيرميتيان فإن . $\hat{A}=\hat{A}^+ \;,\; \hat{B}=\hat{B}^+$

$$\therefore \hat{F}^+ = \left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)^+ = \left(\hat{A}\hat{B}\right)^+ + \left(\hat{B}\hat{A}\right)^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ + \hat{A}^+\hat{B}^+ = \hat{B}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}$$
$$= \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A} = \hat{F}$$

وهذا يعني أن $\hat{F}$ مؤثر هيرميتي

$$\therefore \hat{G}^+ = \left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)^+ = \left(\hat{A}\hat{B}\right)^+ - \left(\hat{B}\hat{A}\right)^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{B}^+ = \hat{B}\hat{A}-\hat{A}\hat{B}$$
$$= -\left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right) = -\hat{G}$$

وهذا يعني أن $\hat{G}$ ليس مؤثرا هيرميتيا .

<u>ملحوظة :</u>

يعرف المؤثر الذي يخضع للعلاقة $\hat{G}^+ = -\hat{G}$ أحيانا بالمؤثر الهيرميتي المخالف (Skew-Hermition operator) .

<u>مثال (٦):</u> إذا كان التحويل الواحدي $\phi = \hat{u}\psi$ وكان هناك مؤثران $\hat{A}, \hat{B}$ وكانت القيمة المتوقعة للمؤثر $\hat{A}$ في ا لحالة ψ تساوي القيمة المتوقعة للمؤثر $\hat{B}$ في الحالة ϕ ، فأثبت أن المؤثر $\hat{B}$ يمكن كتابته بدلالة $\hat{A}$ من خلال المؤثر الواحدي $\hat{u}$ بالصورة $\hat{B} = \hat{u}\hat{A}\hat{u}^{+}$ وبالعكس فان : $\hat{A} = \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}$.

<u>الحل:</u>

حيث أن القيمة المتوقعة لـ $\hat{A}$ في الحالة ψ = القيمة المتوقعة لـ B في الحالة ϕ

$$\therefore \left(\phi, \hat{B}\phi\right) = \left(\psi, \hat{A}\,\psi\right)$$

ومن ذلك نجد أن :

$$\left(\phi, \hat{B}\phi\right) = \left(\hat{u}\,\psi, \hat{B}\hat{u}\,\psi\right) = \left(\psi, \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}\,\psi\right) = \left(\psi, \hat{A}\,\psi\right)$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$\hat{A} = \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}$$

أي أنه طبقاً للتحويل الواحدي $\phi = \hat{u}\psi$ فان قانون تحويل المؤثرات من المجموعة $\{\psi\}$ إلى المجموعة $\{\phi\}$ هو : ـــ $\hat{A} = \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}$

وبضرب هذا العلاقة من اليمين في $\hat{u}^{+}$ ومن اليسار في $\hat{u}$ فان:

$$\therefore \hat{u}\hat{A}\hat{u}^{+} = \hat{u}\,\hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}\,\hat{u}^{+} = \hat{B}$$

حيث :

$$\hat{u}\,\hat{u}^{+} = \hat{I}$$

$$\therefore \hat{B} = \hat{u}\,\hat{A}\hat{u}^{+}$$

<u>مثال (٧) :</u>

(أ) أثبت أن التحويل الواحدي لا يغير القيمة الذاتية لمؤثر ما.

(ب) أثبت أن التحويل الواحدي لا يغير المبدول، أي يجعله لا متغيراً (Invariant) .

(ج) أثبت أن القيمة العددية أو معيار القيمة الذاتية للمؤثر الواحدي تساوي الوحدة .

(د) أثبت أن أي دالتين ذاتيين مناظرتين لقيمتين ذاتيين لمؤثر واحدي تكونان متعامدتان .

الحل :

(أ) بكتابة $\phi = \hat{u}\psi$ فإن $\hat{B}\phi = b\phi \leftarrow \hat{B}\hat{u}\psi = b\hat{u}\psi$

[حيث المؤثر $\hat{B}$ يناظر الحالة الموصوفة بالمجموعة $\{\phi\}$]

وبالتأثير بـ $\hat{u}^{+}$ من اليسار $\therefore \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}\psi = \hat{u}^{+}b\hat{u}\psi$

ولكن :

$$\hat{A}\psi = b\hat{u}^{+}\hat{u}\psi = b\psi \quad \leftarrow \quad \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u} = \hat{A}$$

وهذا يعني أن التحويل الواحدي $\hat{A} = \hat{u}^{+}\hat{B}\hat{u}$ للمؤثر $\hat{B}$ لم يغير من القيمة الذاتية لهذا المؤثر (b) .

(ب) إذا كان :

$$\hat{C}' = [\hat{A}', \hat{B}'] \quad \leftarrow \quad \hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$$

حيث :

$\hat{A}' = \hat{u}\hat{A}\hat{u}^{+}, \hat{B}' = \hat{u}\hat{B}\hat{u}^{+} \quad \leftarrow \quad \hat{C}' = \hat{u}\hat{C}\hat{u}^{+}$ وذلك لأن :

$$[\hat{A}', \hat{B}'] = [\hat{u}\hat{A}\hat{u}^{+}, \hat{u}\hat{B}\hat{u}^{+}] = \hat{u}\hat{A}\underbrace{\hat{u}^{+}\hat{u}}\hat{B}\hat{u}^{+} - \hat{u}\hat{B}\underbrace{\hat{u}^{+}\hat{u}}\hat{B}\hat{u}^{-}$$

$$= \hat{u}\hat{A}\hat{B}\hat{u}^{+} - \hat{u}\hat{B}\hat{A}\hat{u}^{+} = \hat{u}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{u}^{+} = \hat{u}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{u}^{+} = \hat{u}\hat{C}\hat{u}^{+} = \hat{C}'$$

(ج) بفرض أن $\hat{u}$ هو متجه واحدي وأن قيمتة الذاتية هي λ :

$$\hat{u}\psi = \lambda\psi \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

وبأخذ المترافق (adjoint) للطرفين :

$$\psi^* \hat{u}^+ = \lambda^* \psi^* \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

بضرب (2) في (1) :

$$\therefore \psi^* \underbrace{\hat{u}^+ \hat{u}} \psi = \lambda^* \lambda \psi^* \psi \quad \rightarrow \quad \therefore \psi^* \psi = |\lambda|^2 \psi^* \psi$$

$$\therefore \left(1 - |\lambda|^2\right) \psi^* \psi = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore \left(1 - |\lambda|^2\right) \underbrace{\int \psi^* \psi \, d\tau}_{(1)''} = 0$$

$$\therefore \left(1 - |\lambda|^2\right) = 0 \qquad \therefore |\lambda|^2 = 1 \quad \therefore |\lambda| = 1$$

وهو المطلوب :

(د) بفرض ψ_1, ψ_2 دالتين ذاتيتين للمؤثر $\hat{u}$ مقابلتين للقيمتين الذاتيتين λ_1, λ_2

$$\therefore \hat{u} \psi_1 = \lambda_1 \psi_1 \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

$$\hat{u} \psi_2 = \lambda_2 \psi_2 \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

وبأخذ مترافق (2) :

$$\therefore \psi_2^* \hat{u}^+ = \lambda_2^* \psi_2^* \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

وبضرب (3) في (1) :

$$\therefore \psi_2^* \underbrace{\hat{u}^+ \hat{u}} \psi_1 = \lambda_2^* \lambda_1 \psi_2^* \psi_1$$

$$\therefore \psi_2^* \psi_1 = \lambda_2^* \lambda_1 \psi_2^* \psi_1$$

$$\therefore \left(1 - \lambda_2^* \lambda_1\right) \psi_2^* \psi_1 = 0 \qquad \therefore \left(1 - \lambda_2^* \lambda_1\right) \int \psi_2^* \psi_1 d\tau = 0 \quad \_\_\_\_ (4)$$

ولما كان مقياس القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{u}$ يساوي الوحدة أي $\lambda_2^* \lambda_1 = 1$

$$\therefore 1 - \lambda_2^* \lambda_1 = \lambda_2^* \lambda_2 - \lambda_2^* \lambda_1 = \lambda_2^* \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \neq 0 \qquad \_\_\_\_ (5)$$

من(5) , (4) نجد أن :

$$\int \psi_2^* \psi_1 d\tau = 0 \qquad \therefore \left(\psi_2, \psi_1\right) = 0$$

وهو المطلوب .

مثال(٨) : يعرف المؤثر المنتظم (regular operator) بأنه المؤثر الذي يمكن كتابته بحيث أن $\phi = \hat{A}\psi$ ويكون له معكوس $\hat{A}^{-1}$ بحيث أن $\psi = \hat{A}^{-1}\phi$

(أ) أثبت أن :

$$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \quad \text{وأن} \quad \left(\hat{A}^{-1}\right)^{+} = \left(\hat{A}^{+}\right)^{-1}$$

[مترافق المؤثر المعكوس = معكوس المؤثر المترافق]

(ب) إذا كان المؤثران $\hat{A}, \hat{B}$ بحيث أن $\hat{A}, \hat{B} = \hat{I}$ فأثبت أن $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$

(ج) إذا كان حاصل الضرب $\left(\hat{A}\hat{B}\right)$ هو مؤثر منتظم فاثبت أن كلا من $\hat{A}, \hat{B}$ يكون منتظم أيضا .

الحل :

(أ) حيث أن : $\phi = \hat{A}\psi$ وأن : $\psi = \hat{A}^{-1}\phi$

$$\therefore \phi = \hat{A}\psi = \hat{A}\left(\hat{A}^{-1}\phi\right) = \hat{A}\hat{A}^{-1}\phi$$

ولكي يتساوى الطرفان يجب أن يكون $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{I}$

أيضا :

$$\psi = \hat{A}^{-1}\phi = \hat{A}^{-1}\left(\hat{A}\psi\right) = \hat{A}^{-1}\hat{A}\psi$$

ولكي يتساوى الطرفان يجب أن يكون :

$$\therefore \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I} \leftarrow \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$$

وبأخذ مترافق الطرفين :

$$\left(\hat{A}^{-1}\right)^{+}\hat{A}^{+} = \hat{A}^{+}\left(\hat{A}^{-1}\right)^{+} = \hat{I} \leftarrow \left(\hat{A}\hat{A}^{-1}\right)^{+} = \left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^{+} = \hat{I}^{+}$$

(حيث $\hat{I}^{+} = \hat{I}$) ومن هذا نجد أن $\left(\hat{A}^{-1}\right)^{+}$ هو معكوس $\hat{A}^{+}$

$$\therefore \left(\hat{A}^{+}\right)^{-1} = \left(\hat{A}^{-1}\right)^{+}$$

(ب) إذا كان $\hat{A}\hat{B}=\hat{I}$ فإن : $\hat{A}\hat{B}\phi=\hat{I}\phi=\phi$

وبوضع : $\hat{B}\phi=\psi$ فإن : $\hat{A}\psi=\phi$

وحيث أن $\hat{A}$ مؤثر منتظم فإن له معكوس بحيث أن $\psi=\hat{A}^{-1}\phi$ أي أن

$$\hat{B}\phi=\hat{A}^{-1}\phi$$

وهذا يعني أن : $\hat{B}=\hat{A}^{-1}$

(ج) نفرض حاصل الضرب $\hat{A}\hat{B}=\hat{c}$ حيث $\hat{c}$ مؤثر منتظم أي يمكن كتابته بالصورة $\phi=\hat{c}\psi$ وله معكوس $\hat{c}^{-1}$ بحيث أن $\psi=\hat{c}^{-1}\phi$ وأن $\hat{c}\hat{c}^{-1}=\hat{I}$

والأن بالتأثير علي الدالة ϕ بالمؤثر $\hat{A}^{-1}$:

$$\hat{A}^{-1}\phi=\hat{A}^{-1}\hat{c}\psi=\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{B}\psi=\hat{B}\psi=\hat{B}\hat{c}^{-1}\phi$$

$$\therefore \hat{A}^{-1}=\hat{B}\hat{c}^{-1}$$

وبالتأثير علي الطرفين بالمؤثر $\hat{A}$ فإن:

$$\hat{A}\hat{A}^{-1}=\hat{A}\left(\hat{B}\hat{c}^{-1}\right)=\hat{c}\hat{c}^{-1}=\hat{I}$$

وهذا معناه أن المؤثر $\hat{A}$ هو مؤثر منتظم ،وبالمثل يمكن إثبات أن المؤثر $\hat{B}$ هو أيضا مؤثر منتظم . وهو المطلوب .

<u>مثال (٩)</u> : إذا كان المؤثر $\hat{A}$ له القيم الذاتية a_i وكانت الدوال الذاتية له $\{\phi_i\}$ تمثل مجموعة تامة ومتعامدة عياريا فأثبت أن :

(أ) ϕ_i تمثل دوالا ذاتية للمؤثر المترافق $\hat{A}^{+}$ بقيم ذاتية a_i^{*} .

(ب) المؤثر $\hat{A}$ ومترافقه $\hat{A}^{+}$ يكونان متبادلان .

(ج) إذا كان المؤثر $\hat{A}$ يكتب كمجموع مؤثرين أحدهما هيرميتي والآخر هيرميتي مخالف بالصورة $\hat{A}=\hat{p}+i\hat{q}$ فأثبت أن المؤثرين $\hat{P},\hat{q}$ يكونان متبادلان .

<u>الحـل :</u>

(أ) حيث أن : $\hat{A}\phi_i = a_i\phi_i$ فإن :

$$\left(\hat{A}\phi_i,\phi_j\right)=\left(a_i\phi_i,\phi_j\right)=a_i^*\left(\phi_i,\phi_j\right)=a_i^*\delta_{ij}=a_i^* \quad \_\_\_\_\_\_(1)$$

وباعتبار أن $\hat{A}^+\phi_j = a_j^*\phi_j$ فان :

$$\left(\phi_i,\hat{A}^+\phi_j\right)=\left(\phi_i,a_j^*\phi_j\right)=a_j^*\left(\phi_i,\phi_j\right)=a_j^*\delta_{ij}=a_i^* \quad \_\_\_\_\_\_(2)$$

ومن (1) , (2) نجد أن $\left(\hat{A}\phi_i,\phi_j\right)=\left(\phi_i,\hat{A}^+\phi_j\right)$

وهو ما يتفق مع تعريف المؤثر المترافق ، وهذا يعنـــي أن a_i^* هـــي القيمـــة الذاتية للمؤثر $\hat{A}^+$ بالدوال الذاتية $\{\phi_i\}$.

(ب) حيث أن $\hat{A}\hat{A}^+\phi_i = a_i a_i^*\phi_i = |a_i|^2\phi_i$

وحيث أن $\hat{A}^+\hat{A}\phi_i = a_i^* a_i\phi_i = |a_i|^2\phi_i$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{A}^+\right]\ \phi_i = 0 \leftarrow \left(\hat{A}\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{A}\right)\ \phi_i = 0 \ \leftarrow\ \therefore \hat{A}\hat{A}^+\phi_i = \hat{A}^+\hat{A}\phi_i$$

ومنها نجد أن $\left[\hat{A},\hat{A}^+\right] = 0$

(ج) المؤثر $\hat{A}$ يمكن كتابته كمجموع مؤثرين p, q حيث p هيرميتي، q هيرميتي مخالف

أي $\hat{p}^+ = \hat{p}, \hat{q}^+ = -\hat{q}$

وذلك بالصورة $\hat{A}^+ = \hat{p} - i\hat{q} \leftarrow \hat{A} = \hat{p} + i\hat{q}$

$$\therefore \left[\hat{A},\hat{A}^+\right] = [\hat{p}+i\hat{q},\hat{p}-i\hat{q}] = (\hat{p}+i\hat{q})\ (\hat{p}-i\hat{q}) - (\hat{p}-i\hat{q})\ (\hat{p}+i\hat{q})$$
$$= \left(\hat{p}^2 - i\hat{p}\hat{q} + i\hat{q}\hat{p} + \hat{q}^2\right) - \left(\hat{p}^2 + i\hat{p}\hat{q} - i\hat{q}\hat{p} + \hat{q}^2\right) = -2i$$
$$= -2i(\hat{p}\hat{q} - \hat{p}\hat{q}) = -2i[\hat{p},\hat{q}]$$

ولكن $\left[\hat{A},\hat{A}^+\right] = 0$ وبذلك فان : $[\hat{p},\hat{q}] = 0$

وهو المطلوب .

مثال (١٠) :

(أ) أثبت أنه إذا كانت ψ هي دالة ذاتية لمؤثر $\hat{A}$ مناظرة لقيمة ذاتية a فان $(b\psi)$ ، حيث b عدد قياسي هي أيضا دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ مناظرة للقيمة a .

(ب) أثبت أنه إذا كانت ψ دالة ذاتية لمؤثر $\hat{A}$ فإن ψ لا تناظر أكثر من قيمة ذاتية واحدة للمؤثر $\hat{A}$.

(ج) إذا كانت القيم الذاتية للمؤثر $\hat{A}$ هي $a_1, a_2, \dots \; a_n$ فإن القيم الذاتية للمؤثر $\hat{A}^2$ تكون $a_1^2, a_2^2, \dots \; a_n^2$.

الحل :

(أ) إذا كانت ψ دالة ذاتية لـ $\hat{A}$ بالقيمة الذاتية a فان $\hat{A}\psi = a\psi$

أيضا فإنه إذا كانت $b \neq 0$ عدد قياسي فإن :

$$\hat{A}(b\psi) = b(\hat{A}\psi) = b(a\psi) = a(b\psi)$$

وبالتالي فان $(b\psi)$ تكون دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ مناظرة للقيمة الذاتية a.

(ب) نفرض أن ψ هي دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ ونفرض أنها تناظر قيمتين ذاتيتين a_1, a_2

والمطلوب إثبات أن ψ تناظر قيمة ذاتية واحدة للمؤثر $\hat{A}$ أي أن $a_1 = a_2$ أي لهما نفس القيمة .

فحيث أن :

$$\hat{A}\psi = a_1\psi \quad , \quad \hat{A}\psi = a_2\psi$$

$$\therefore a_1\psi = a_2\psi \qquad \therefore (a_1 - a_2)\psi = 0$$

ولكن $\psi \neq 0$ فإن :

$$\therefore a_1 = a_2 \leftarrow a_1 - a_2 = 0$$

أي أن القيمتين الذاتيتين $a_1 a_2$ متساويتان ، وهو المطلوب .

(ج) إذا كانت ψ_n هي الدوال الذاتية للمؤثر $\hat{A}$ المناظرة للقيم الذاتية a_n

$$\therefore \hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\hat{A}$ فإن :

$$\hat{A}\left(\hat{A}\psi_n\right) = \hat{A}(a_n\psi_n)$$
$$\therefore \hat{A}^2\psi_n = a_n\left(\hat{A}\psi_n\right) = a_n(a_n\psi_n) = a_n{}^2\psi_n$$

وبذلك فان a_n^2 تمثيل القيم الذاتية للمؤثر $\hat{A}^2$ المناظرة للدوال الذاتية ψ_n وهو المطلوب .