الباب الخامس

مؤثرات كمية الحركة الزاوية (المدارية واللفية)

مؤثرات كمية الحركة الزاوية

في هذا الباب سوف ندرس نوعين من مؤثرات كمية الحركة الزاوية هما : مؤثر كمية الحركة الزاوية المدارية ، مؤثر كمية الحركة الزاوية اللفية .

[١] مؤثر كمية الحركة الزاوية المدارية

Orbital Angular Momentum Operator

تعريف : يعرف مؤثر كمية الحركة الزاوية المدارية بالعلاقة الآتية : $\hat{L} = \hat{r} \wedge \hat{p}$

حيث $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ هو مؤثر كمية الحركة الخطية

ولإيجاد مركبات $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \hat{L}_x\vec{i} + \hat{L}_y\vec{j} + \hat{L}_z\vec{k} \qquad (1)$$

$$\hat{L} = \hat{r} \wedge \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\left(\vec{r} \wedge \vec{\nabla}\right) = \frac{\hbar}{i} \begin{vmatrix} \vec{i} & j & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{k}\right]$$

$$= \left(y\,\hat{p}_z - z\hat{p}_y\right)\vec{i} + \left(z\,\hat{p}_x - x\hat{p}_z\right)\vec{j} + \left(x\,\hat{p}_y - y\hat{p}_x\right)\vec{k} \qquad (2)$$

بمقارنة (1) ، (2) :

$$\therefore \hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y \quad , \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z \quad , \quad \hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$$

حيث :

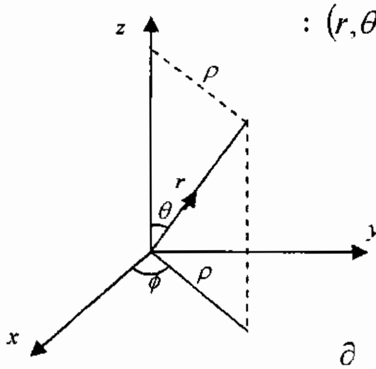
$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \quad , \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y} \quad , \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

الصورة القطبية لمركبات المؤثر $\hat{L}$:

حيث أن :

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad , \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

فبالانتقال إلى الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ) :



$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\ \cos\phi = r\ \sin\theta\ \cos\phi \\ y &= \rho\ \sin\phi = r\ \sin\theta\ \sin\phi \\ z &= r\ \cos\theta \qquad , \ \rho = r\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

وباستخدام قاعدة السلسة :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Big|$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ويمكن إثبات أن [باستخدام العلاقات (1)] :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} = \sin\theta\cos\phi \ , \ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\sin\phi \ , \ \frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta \\ &\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi \ , \ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi \ , \ \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{r}\sin\theta \\ &\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\sin\phi}{r\sin\theta} , \ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\cos\phi}{r\sin\theta} , \ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

وبالتعويض من (3) في (2) نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

تمثل المعادلات (4) التمثيل القطبي للمؤثرات التفاضلية الكرتيزية .

وبالتعويض عنها في معادلات $\hat{L}_z$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_x$ نحصل على الصورة القطبية لمركبات مؤثر كمية الحركة الزاوية :

$$\hat{L}_x = i\hbar\left[\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$\hat{L}_y = i\hbar\left[-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

<u>مؤثر مربع كمية الحركة الزاوية</u> :

يعرف المؤثر $\hat{L}^2$ كالتالي :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \qquad (1)$$

$$\hat{L}_x^2 = \hat{L}_x\hat{L}_x = -\hbar^2\left[\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\left[\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\cot\theta)\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$
$$\left. + \cot^2\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi\left(-\operatorname{cosec}^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right.$$
$$\left. + \cot^2\theta\cos\phi\left(\cos\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \sin\phi\cos\phi\left(\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$
$$\left. + \cot\theta\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad (2)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\hat{L}_y^2 = -\hbar^2\left[\cos^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \sin\phi\cos\phi\left(\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta\right)\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left. + \cot\theta\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\sin^2\phi\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \quad \text{\_\_\_\_\_} (3)$$

أيضاً فإن :

$$\hat{L}_z^2 = \hat{L}_z\hat{L}_z = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad \text{\_\_\_\_\_} (4)$$

بالتعويض من (4) ، (3) ، (2) ، في (1) نحصل على :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(1 + \cot^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{cosec}^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \quad \text{\_\_\_\_\_} (5)$$

ومما سبق فإن [أنظر الباب الرابع]:

$$\nabla_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\therefore \hat{L}^2 = -\hbar^2\nabla_{\theta,\phi} \quad \text{\_\_\_\_\_} (6)$$

إيجاد القيم الذاتية لمؤثر مربع كمية الحركة الزاوية :

لإيجاد القيم الذاتية للمؤثر $\hat{L}^2$ نجعل المؤثر $\hat{L}^2$ يؤثر على الدالة الكرية $Y(\theta,\phi)$ ، والتي سبق تعريفها بأنها تشكل الحل العام للمعادلة $\Delta_{\theta,\phi}Y + \lambda Y = 0$ حيث $\lambda = \ell(\ell+1)$ [وقد سبق إثبات ذلك] .

$$\hat{L}^2 Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\hbar^2\Delta_{\theta,\phi}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

وحيث أن :

$$\Delta_{\theta,\phi} Y = -\lambda Y$$

$$\therefore \hat{L}^2 Y = -\hbar \underbrace{\Delta_{\theta,\phi} Y} = -\hbar^2(-\lambda Y) = \lambda \hbar^2 Y$$

$$\therefore \hat{L}^2 Y = \lambda \hbar^2 Y = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y = aY \quad , \quad a = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

وهذا يعني أن a (القيمة الذاتية للمؤثر $\hat{L}^2$) هي :

$$a = \ell(\ell+1)\hbar^2$$

حيث $\ell = 0,1,2,\ldots\ldots$

إيجاد القيم الذاتية للمركبة $\hat{L}_z$ لمؤثر كمية الحركة الزاوية :

تشكل المركبة $\hat{L}_z$ لمؤثر كمية الحركة الزاوية أهمية خاصة في ميكانيكا الكم ، وهي تساوي $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ وتؤثر في إتجاه محور z وتعتمد فقط على الزاوية ϕ ، ولا تعتمد على r,θ وتتميز بخواص فيزيائية هامة . ولإيجاد القيم الذاتية للمركبة $\hat{L}_z$:

نؤثر بالمؤثر $\hat{L}_z$ على الدالة ψ فنحصل على : $\hat{L}_z \psi = a\psi$

وبالتعويض عن $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ ووضع $\psi = R \cdot \Theta \cdot \Phi$

$$\therefore -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}(R \cdot \Theta \cdot \Phi) = a(R \cdot \Theta\Phi)$$

$$\therefore R\Theta \cdot (-i\hbar)\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = a R\Theta\Phi$$

وبالقسمة على $R\Theta\Phi$:

$$\therefore -\frac{i\hbar}{\Phi}\frac{d\Phi}{d\phi} = a$$

$$\therefore \frac{d\Phi}{\Phi} = -\frac{a}{i\hbar} d\phi = \frac{ia}{\hbar} d\phi$$

وبأخذ التكامل :

$$\ln \Phi = \frac{ia}{\hbar}\phi + \ln C$$

$$\therefore \ln \frac{\Phi}{C} = \frac{ia}{\hbar}\phi$$

حيث : ثابت $\ln c =$

$$\therefore \frac{\Phi}{C} = e^{\frac{ia}{\hbar}\phi} \qquad \therefore \Phi = C\, e^{\frac{ia}{\hbar}\phi}$$

ولكن من حل معادلة Φ والتي سبق إثباتها فإن : $\Phi = C\, e^{im}$

حيث $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

فبالمقارنة نجد أن :

$$m = \frac{a}{\hbar} \qquad \therefore a = m\hbar$$

أي أن القيم الذاتية للمركبة $\hat{L}_z$ لمؤثر كمية الحركة الزاوية تساوي $(m\hbar)$ ،

حيث $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

<u>ملاحظة :</u> يمكن إثبات أن المؤثرين $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ همـا مـؤثران متبـادلان ، أي أن : $\left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] = 0$ وهذا يعني أنه يمكن إيجاد مجموعة من الـدوال تعتبـر دوالا ذاتية لكليهما في آن واحد (أي دوال ذاتية آنية) ، ولتكن هـذه الـدوال هـي $Y_{\ell,m}$ (الدوال الكرية) ، وبذلك يمكننا كتابة :

$$\hat{L}^2\, Y_{\ell,m} = L^2\, Y_{\ell,m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell,m}$$

$$\hat{L}_z\, Y_{\ell,m} = L_z Y_{\ell,m} = m\hbar\, Y_{\ell,m}$$

وتعرف الدالة الكرية $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ بأنها حل للمعادلة : $\Delta_{\theta,\phi} Y + \lambda Y = 0$

حيث $\ell = 0,1,2,\ldots\ldots$ ، $\lambda = \ell(\ell+1)$

وصورتها :

$$Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$$

وقد سبق إثبات أن :

$$\Theta(\theta)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\quad P_\ell^m(\cos\theta)$$

$$\Phi(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{im\phi}$$

$$\therefore \mathrm{Y}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\cdot e^{im\phi}=\mathrm{Y}_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

وهي الصورة العامة للدالة الكرية أو التوافقية الكرية(Spherical Harmonic).

العلاقات التبادلية لمؤثر كمية الحركة الزاوية :

(١) مع الإحداثيات : يمكن إثبات العلاقات التبادلية الآتية :

$$\text{(i)}\quad [\hat{L}_x,x]=0\quad,\quad[\hat{L}_y,y]=0\quad,\quad[\hat{L}_z,z]=0$$

$$\text{(ii)}\quad [\hat{L}_x,y]=i\hbar z\quad,\quad[\hat{L}_y,z]=i\hbar x\quad,\quad[\hat{L}_z,x]=i\hbar y$$

$$\text{(iii)}\quad [\hat{L}_x,z]=-i\hbar y\quad,\quad[\hat{L}_y,x]=-i\hbar z\quad,\quad[\hat{L}_z,y]=-i\hbar x$$

حيث أن :

$$\hat{L}_x=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\text{(i)}\quad [\hat{L}_x\ ,x]\psi=\frac{\hbar}{i}\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right),x\right]\psi$$

$$=\frac{\hbar}{i}\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)x\psi-x\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right\}$$

$$=\frac{\hbar}{i}\left\{y\left(x\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial z}\psi\right)-z\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial y}\psi\right)-xy\frac{\partial\psi}{\partial z}+xz\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}=0$$

$$\therefore[\hat{L}_x,x]=0\qquad\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}_y , y\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}_z , z\right] = 0$

$$\text{(ii)}\;\left[\hat{L}_x , y\right]\psi = \frac{\hbar}{i}\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), y\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)y\psi - y\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left\{y\left(y\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial z}\psi\right) - z\left(y\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\right) - y^2\frac{\partial\psi}{\partial z} + yz\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left[-z\psi\right] = i\hbar z\psi \qquad \therefore\; \left[\hat{L}_x , y\right] = i\hbar z \qquad \text{(2)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}_y , z\right] = i\hbar x \;,\; \left[\hat{L}_z , x\right] = i\hbar y$

$$\text{(iii)}\left[\hat{L}_x , z\right]\psi = \frac{\hbar}{i}\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), z\right]\psi$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)z\psi - z\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\left\{y\left(z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\right) - z\left(z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y}\psi\right) - zy\frac{\partial\psi}{\partial z} + z^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{i}\{y\psi\} = -i\hbar y\psi \qquad \therefore \left[\hat{L}_x , z\right] = -i\hbar y$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\left[\hat{L}_y , x\right] = -i\hbar z ,\; \left[\hat{L}_z , y\right] = -i\hbar x$$

<u>(٢) مع مؤثر كمية الحركة الخطية</u> :

يمكن إثبات العلاقات التبادلية الآتية :

$$\text{(i)}\quad \left[\hat{L}_x , \hat{p}_x\right] = 0 \quad , \quad \left[\hat{L}_y , \hat{p}_y\right] = 0 \quad , \quad \left[\hat{L}_z , \hat{p}_z\right] = 0$$

$$\text{(ii)}\quad \left[\hat{L}_x , \hat{p}_y\right] = i\hbar\hat{p}_z \quad , \quad \left[\hat{L}_y , \hat{p}_z\right] = i\hbar\hat{p}_x \quad , \quad \left[\hat{L}_z , \hat{p}_x\right] = i\hbar\hat{p}_y$$

$$\text{(iii)}\quad \left[\hat{L}_x , \hat{p}_z\right] = -i\hbar\hat{p}_y \quad , \quad \left[\hat{L}_y , \hat{p}_x\right] = -i\hbar\hat{p}_z \quad , \quad \left[\hat{L}_z , \hat{p}_y\right] = -i\hbar\hat{p}_x$$

<u>الإثبات</u> : حيث أن

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \hat{P}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{(i)}\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_x\right]\psi = -\hbar^2\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\psi$$

$$= -\hbar^2\left\{y\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} - z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x} - y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right\} = 0$$

$$\therefore\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_x\right] = 0 \qquad \text{(4)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}_y\ ,\ \hat{P}_y\right] = 0\ \ ,\ \left[\hat{L}_z\ ,\ \hat{P}_z\right]\ = 0$

$$\text{(ii)}\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_y\right]\psi = -\hbar^2\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\psi$$

$$= -\hbar^2\left\{y\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial y} - z\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\} = \hbar^2\frac{\partial}{\partial z}\psi = i\hbar\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi = i\hbar\,\hat{p}_z\,\psi$$

$$\therefore\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_y\right] = i\hbar\,\hat{p}_z \qquad \text{(5)}$$

وبالمثل يمكن أثبات أن : $\left[\hat{L}_y\ ,\hat{P}_z\right] = i\hbar\hat{p}_x\ \ ,\ \left[\hat{L}_z\ ,\hat{P}_x\right]\ = i\hbar\hat{p}_y$

$$\text{(iii)}\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_z\right]\psi = -\hbar^2\left\{\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}\psi$$

$$= -\hbar^2\left\{y\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - z\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} - y\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right\}$$

$$= -\hbar^2\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}\right\} = -i\hbar\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi = -i\hbar\,\hat{p}_y\,\psi$$

$$\therefore\ \left[\hat{L}_x, \hat{P}_z\right] = -i\hbar\,\hat{p}_y \qquad \text{(6)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}_y\ ,\hat{P}_x\right] = -i\hbar\hat{p}_z\ \ ,\ \left[\hat{L}_z\ ,\hat{P}_y\right]\ = -i\hbar\,\hat{p}_x$

(٣) العلاقات التبادلية لمركبات مؤثر كمية الحركة الزاوية مع بعضها :

يمكن إثبات العلاقات التبادلية الآتية :

$$\text{(i)}\quad [\hat{L}_x,\hat{L}_x]=0 \quad , [\hat{L}_y,\hat{L}_y]=0 \quad , [\hat{L}_z,\hat{L}_z]=0$$

$$\text{(ii)}\quad [\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z \quad , [\hat{L}_y,\hat{L}_z]=i\hbar\hat{L}_x \quad , [\hat{L}_z,\hat{L}_x]=i\hbar\hat{L}_y$$

$$\text{(iii)}\quad [\hat{L}_x,\hat{L}_z]=-i\hbar\hat{L}_y \quad , [\hat{L}_y,\hat{L}_x]=-i\hbar\hat{L}_z \quad , [\hat{L}_z,\hat{L}_y]=-i\hbar\hat{L}_x$$

الإثبات : حيث أن :

$$\hat{L}_x = y\hat{P}_z - z\hat{P}_y \ ,\hat{L}_y = z\hat{P}_x - x\hat{P}_z \ ,\hat{L}_z = x\hat{P}_y - y\hat{P}_x$$

$$\begin{aligned}\text{(i)}\ [\hat{L}_x,\hat{L}_x] &= [\hat{L}_x, y\hat{P}_z - z\hat{P}_y] = [\hat{L}_x, y\hat{P}_z] - [\hat{L}_x, z\hat{P}_y]\\ &= [\hat{L}_x, y]\hat{P}_z + y[\hat{L}_x,\hat{P}_z] - [\hat{L}_x, z]\hat{P}_y - z[\hat{L}_x,\hat{P}_y]\\ &= (i\hbar z)\hat{P}_z + y(-i\hbar\hat{P}_y) - (-i\hbar y)\hat{P}_y - z(-i\hbar\hat{P}_z)\\ &= i\hbar z\,\hat{P}_z - i\hbar y\,\hat{P}_y + i\hbar y\hat{p}_y - i\hbar z\,\hat{p}_z = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(7)\end{aligned}$$

وقد أستخدمنا في الإثبات العلاقة : $[A, Bc]=[A,B]\,c+B[A,c]$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$[\hat{L}_y,\hat{L}_y]=0 \ , [\hat{L}_z,\hat{L}_z]=0$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\ [\hat{L}_x,\hat{L}_y] &= [\hat{L}_x, z\hat{P}_x - x\hat{P}_z] = [\hat{L}_x, z\hat{P}_x] - [\hat{L}_x, x\hat{P}_z]\\ &= [\hat{L}_x, z]\hat{P}_x + z[\hat{L}_x,\hat{P}_x] - [\hat{L}_x, x]\hat{P}_z - x[\hat{L}_x,\hat{P}_z]\\ &= (-i\hbar y)\hat{P}_x + z(0) - (0)\hat{P}_z - x(-i\hbar\hat{P}_y)\\ &= -i\hbar y\,\hat{P}_x + i\hbar x\,\hat{P}_y = i\hbar(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) = i\hbar\hat{L}_z \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(8)\end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$[\hat{L}_y,\hat{L}_z]=i\hbar\hat{L}_x \ , [\hat{L}_z,\hat{L}_x]=i\hbar\hat{L}_y$$

$$(iii)\ \left[\hat{L}_x, \hat{L}_z\right] = \left[\hat{L}_x, x\hat{P}_y - y\hat{P}_x\right] = \left[\hat{L}_x, x\hat{P}_y\right] - \left[\hat{L}_x, y\hat{P}_x\right]$$

$$= \left[\hat{L}_x, x\right]\hat{P}_y + x\left[\hat{L}_x, \hat{P}_y\right] - \left[\hat{L}_x, y\right]\hat{P}_x - y\left[\hat{L}_x, \hat{P}_x\right]$$

$$= (0)\hat{P}_y + x\left(i\hbar\hat{P}_z\right) - (i\hbar z)\hat{P}_x - y(0)$$

$$= i\hbar x\,\hat{P}_z - i\hbar z\,\hat{P}_x = -i\hbar\left(z\hat{p}_x - x\hat{p}_z\right) = -i\hbar\hat{L}_y \qquad (9)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] = -i\hbar\,\hat{L}_z \;,\; \left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] = -i\hbar\,\hat{L}_x$

أمثلة محلولة :

مثال (١) أثبت العلاقات التبادلية الآتية :

$$(i)\quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}^2, \hat{L}_y\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}^2\ , \hat{L}\right] = 0$$

$$(ii)\quad \left[\hat{L}_x, r^2\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}_x, \hat{p}^2\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}, \hat{p}^2\right] = 0$$

الحـــل :

$$(i)\quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \left[\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2\ , \hat{L}_x\right]$$

$$= \left[\hat{L}_x^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x\right]$$

ولكن : $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

$$\therefore \left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] = \hat{L}_x\left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_x, \hat{L}_x\right]\hat{L}_x + \hat{L}_y\left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y, \hat{L}_x\right]\hat{L}_y$$

$$+ \hat{L}_z\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right]\hat{L}_z$$

$$= \hat{L}_x(0) + (0)\hat{L}_x + \hat{L}_y\left(-i\hbar\,\hat{L}_z\right) + \left(-i\hbar\,\hat{L}_z\right)\hat{L}_y$$

$$+ \hat{L}_z\left(-i\hbar\,\hat{L}_y\right) + \left(-i\hbar\,\hat{L}_y\right)\hat{L}_z$$

$$= -i\hbar\,\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\,\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\,\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\,\hat{L}_y\hat{L}_z = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن : $\left[\hat{L}^2\ , \hat{L}_y\right] = 0 \;,\; \left[\hat{L}^2\ , \hat{L}_z\right] = 0$

$$\left[\hat{L}^2\ \hat{L}\right] = \left[\hat{L}^2, \vec{i}\hat{L}_x + \vec{j}\hat{L}_y + \vec{k}\hat{L}_z\right] = \vec{i}\left[\hat{L}^2, \hat{L}_x\right] + \vec{j}\left[\hat{L}^2, \hat{L}_y\right] + \vec{k}\left[\hat{L}^2, \hat{L}_z\right]$$

$$= \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = 0$$

$$(\mathbf{ii})\ \left[\hat{L}_x, r^2\right] = \left[\hat{L}_x, x^2+y^2+z^2\right] = \left[\hat{L}_x, x^2\right] + \left[\hat{L}_x, y^2\right] + \left[\hat{L}_x, z^2\right]$$
$$= \left[\hat{L}_x, x\right]x + x\left[\hat{L}_x, x\right] + \left[\hat{L}_x, y\right]y + y\left[\hat{L}_x, y\right] + \left[\hat{L}_x, z\right]z + z\left[\hat{L}_x, z\right]$$
$$= (0)x + x(0) + (i\hbar z)y + y(i\hbar z) + (-i\hbar y)z + z(-i\hbar y)$$
$$= i\hbar zy + i\hbar yz - i\hbar yz - i\hbar zy = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\left[\hat{L}_x, \hat{P}^2\right] = 0\ ,\ \left[\hat{L}_y, \hat{p}^2\right] = 0\ ,\ \left[\hat{L}_z, \hat{p}^2\right] = 0$$
$$\therefore \left[\hat{L}, \hat{p}^2\right] = \left[\hat{i}\,\hat{L}_x + \hat{j}\,\hat{L}_y + \hat{k}\,\hat{L}_z, \hat{p}^2\right] = \hat{i}\left[\hat{L}_x, \hat{p}^2\right] + \hat{j}\left[\hat{L}_y, \hat{p}^2\right] + \hat{k}\left[\hat{L}_z, \hat{p}^2\right]$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٢) :</u> أثبت أنه لجسيم يتحرك في مجال محافظ جهده هـو V ، حيـث مؤثر هاملتون هو $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V$ فإن :

$$(\mathbf{i})\ \left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad , \quad (\mathbf{ii})\ \left[\hat{H}, \hat{L}^2\right] = \left[V, \hat{L}^2\right]$$

ثم أثبت أنه في حالة الحركة في مجال متماثل كريا فإن كلا المـؤثرين $\hat{L}_z, \hat{L}^2$ يمثل ثابتاً للحركة .

<u>الحـل :</u>

حيث أن $H = \frac{p^2}{2m} + V$

$$(\mathbf{i})\ \left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = \left[\frac{p^2}{2m} + V, \hat{L}_z\right] = \frac{1}{2m}\left[p^2, \hat{L}_z\right] + \left[V, \hat{L}_z\right]$$

ولكن :

$$\left[p^2, \hat{L}_z\right] = \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2, \hat{L}_z\right] = \left[\hat{p}_x^2, \hat{L}_z\right] + \left[\hat{p}_y^2, \hat{L}_z\right] + \left[\hat{p}_z^2, \hat{L}_z\right]$$
$$= \hat{p}_x\left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right] + \left[\hat{p}_x, \hat{L}_z\right]\hat{p}_x + \hat{p}_y\left[\hat{p}_y, \hat{L}_z\right] + \left[\hat{p}_y, \hat{L}_z\right]\hat{p}_y + \hat{p}_z\left[\hat{p}_z, \hat{L}_z\right]$$
$$+ \left[\hat{p}_z, \hat{L}_z\right]\hat{p}_z$$

$$= \hat{p}_x(-i\hbar\hat{p}_y)+(-i\hbar\hat{p}_y)\hat{p}_x+\hat{p}_y(i\hbar\hat{p}_x)+(i\hbar\hat{p}_x)\hat{p}_y+\hat{p}_z(0)+0(\hat{p}_z)$$

$$= -i\hbar\,\hat{p}_x\hat{p}_y - i\hbar\,\hat{p}_y\hat{p}_x + i\hbar\,\hat{p}_y\hat{p}_x + i\hbar\,\hat{p}_x\hat{p}_y = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (1)$$

$$[V,\hat{L}_z] = \left[V, -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right] = -i\hbar\left[V,\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$\therefore [V,\hat{L}_z]\psi = -i\hbar\left[V,\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\psi = -i\hbar\left[V\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial\phi}V\right]\psi$$

$$= -i\hbar\left(V\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-V\frac{\partial\psi}{\partial\phi}-\frac{\partial V}{\partial\phi}\psi\right) = i\hbar\frac{\partial V}{\partial\phi}\psi$$

$$\therefore [V,\hat{L}_z] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial\phi} \qquad \_\_\_\_\_\_ (2)$$

وبالتعويض نحصل على :

$$\therefore [\hat{H},\hat{L}_z] = \frac{1}{2m}(0) + i\hbar\frac{\partial V}{\partial\phi} = i\hbar\frac{\partial V}{\partial\phi} \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

$$\text{(ii)}\quad [\hat{H},\hat{L}^2] = \left[\frac{p^2}{2m}+V,\hat{L}^2\right] = \frac{1}{2m}[p^2,\hat{L}^2]+[V,\hat{L}^2]$$

ولكن :

$$[p^2,\hat{L}^2] = [p_x^2+p_y^2+p_z^2,\hat{L}^2] = [\hat{p}_x^2,\hat{L}^2]+[\hat{p}_y^2,\hat{L}^2]+[\hat{p}_z^2,\hat{L}^2]$$

$$= 0+0+0=0 \qquad \_\_\_\_\_\_ (4)$$

$$\therefore [\hat{H},\hat{L}^2] = \frac{1}{2m}(0)+[V,\hat{L}^2] = [V,\hat{L}^2] \qquad \_\_\_\_\_\_ (5)$$

وفي حالة الحركة في مجال مركزي : فإن $V = V(r)$ أي أن V تعتمد على r فقط ولا تعتمد على θ,ϕ ولذلك فإن :

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

وتؤول (3) إلى

$$[\hat{H},\hat{L}_z] = 0$$

وهذا يعني أن $\hat{L}_z$ تمثل ثابتاً للحركة في هذه الحالة .

أيضاً : حيث أن $\hat{L}_z,\hat{L}^2$ متبادلان أي أن $\left[\hat{L}_z,\hat{L}^2\right] = 0$

فنستنتج أن $\left[\hat{H},\hat{L}^2\right]=0$ أي أن $\hat{L}^2$ يمثل أيضاً ثابتاً للحركة .

ومعنى هذه النتيجة فيزيائياً أن كلاً من H,L^2,L_z يمكن قياسها آنيا (Simultaneously) . أي في آن واحد .

<u>مسألة</u>: أثبت المبدولات الآتية للمؤثر $\hat{L}_z$ ، حيث :

$$\hat{L}_z=\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=x\,\hat{p}_y-\hat{y}\,\hat{p}_x$$

(i) $\left[\hat{L}_z,x\right]=i\hbar\,y \quad , \quad \left[\hat{L}_z,y\right]=-i\hbar\,x \quad , \quad \left[\hat{L}_z,z\right]=0$

(ii) $\left[\hat{L}_z,\hat{p}_x\right]=i\hbar\,\hat{p}_y \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{p}_y\right]=-i\hbar\,\hat{p}_x \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{p}_z\right]=0$

(iii) $\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\,\hat{L}_y \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{L}_y\right]=-i\hbar\,\hat{L}_x \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{L}_z\right]=0$

(iv) $\left[\hat{L}_z,r^2\right]=0 \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{p}^2\right]=0 \quad , \quad \left[\hat{L}_z,\hat{L}^2\right]=0$

<u>مثال (٣) :</u> باستخدام المتجهات أثبت أن المؤثر $\hat{L}^2$ يعطي في الإحداثيات القطبية الكروية بالعلاقة :

$$\hat{L}^2=-\hbar\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

<u>الحل :</u>

$$\hat{L}^2=\hat{L}\cdot\hat{L}=\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2\left[\left(\bar{r}\wedge\bar{\nabla}\right)\cdot\left(\bar{r}\wedge\bar{\nabla}\right)\right]$$

حيث $\hat{L}=\frac{\hbar}{i}\left(\bar{r}\wedge\bar{\nabla}\right)$

ومن قوانين المتجهات :

$$\left(\bar{A}\wedge\bar{B}\right)\cdot\left(\bar{C}\wedge\bar{D}\right)=\left(\bar{A}\cdot\bar{C}\right)\left(\bar{B}\cdot\bar{D}\right)-\left(\bar{B}\cdot\bar{C}\right)\left(\bar{A}\cdot\bar{D}\right)$$

[حاصل الضرب الرباعي القياسي]

$$\therefore \left(\bar{r} \wedge \overline{\nabla}\right) \cdot \left(\bar{r} \wedge \overline{\nabla}\right) = r^2 \nabla^2 - \left(\overline{\nabla} \cdot \bar{r}\right)\left(\bar{r} \cdot \overline{\nabla}\right)$$

[مع ملاحظة أن : $\left(\overline{B} \cdot \overline{C}\right)\left(\overline{A} \cdot \overline{D}\right) = \left(\overline{A} \cdot \overline{D}\right)\left(\overline{B} \cdot \overline{C}\right)$]

$$\therefore \hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\left(\bar{r} \wedge \overline{\nabla}\right) \cdot \left(\bar{r} \wedge \overline{\nabla}\right)\right] = -\hbar^2 \left[r^2 \nabla^2 - \left(\overline{\nabla} \cdot \bar{r}\right)\left(\bar{r} \cdot \overline{\nabla}\right)\right]$$

$$= -\hbar^2 \left[r^2 \nabla^2 - \left(\frac{\partial}{\partial r} r\right)\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)\right] = -\hbar^2 \left[r^2 \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$

ومن تعريف المؤثر ∇^2 في الإحداثيات القطبية الكروية :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\therefore r^2 \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\because \hat{L}^2 = -\hbar\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]$$

وهو المطلوب .

<u>مثال (٤) :</u> أثبت أن :

(1) ـــ (مثلاً) $\quad \vec{L} \wedge \vec{r} - i\hbar \vec{r} = i\hbar \vec{r} - \vec{r} \wedge \vec{L} = \vec{k}$

ثم أثبت أن هذا المؤثر $\left(\vec{k}\right)$ هو مؤثر هيرميتي ، أثبت أيضاً أن :

$$\left[\vec{L} \wedge \vec{r}\right] = -2i\hbar \vec{k}$$

<u>الحـــل :</u> نحسب المركبة x للطرف الأيسر من المعادلة (1) :

$$\left(\vec{L} \wedge \vec{r} - i\hbar \vec{r}\right)_x = \left(L_y z - L_z y\right) - i\hbar x$$

$$= \left(L_y z - L_z y\right) - i\hbar x + \left(y L_z - z L_y\right) - \left(y L_z - z L_y\right)$$

$$= \left(L_y z - L_z y\right) + \left(y L_z - L_z y\right) - i\hbar x - \left(y L_z - z L_y\right)$$

$$= i\hbar x + i\hbar x - i\hbar x - \left(\vec{r} \wedge \vec{L}\right)_x = \left(i\hbar \vec{r} - \vec{r} \wedge \vec{L}\right)_x$$

بالمثل يمكن إثبات أن المركبتين y,z للطرف الأيسر تساوي المركبتين y,z للطرف الأيمن .

$$\therefore \vec{L}\wedge\vec{r}-i\hbar\vec{r}=i\hbar\vec{r}-\vec{r}\wedge\vec{L}=\vec{k}$$ (1) – (مثلاً)

وحيث أن المؤثرين الداخلين في معادلة المؤثر $\vec{k}$ هما هيرميتيان ، فإن المؤثر $\vec{k}$ يكون أيضاً هيرميتيا .

ولحساب $\left[\hat{L}^2,\vec{r}\right]$: نحسب أولاً المركبة x

$$\left[\hat{L}^2,x\right]=\left[L_x^2+L_y^2+L_z^2,x\right]=\left[L_x^2,x\right]+\left[L_y^2,x\right]+\left[L_z^2,x\right]=\left[L_y^2,x\right]+\left[L_z^2,x\right]$$

$$=L_y\left[L_y,x\right]+\left[L_y,x\right]L_y+L_z\left[L_z,x\right]+\left[L_z,x\right]L_z \quad \Big| \quad \left[L_x^2,x\right]=0$$

$$=-i\hbar L_y z-i\hbar zL_y+i\hbar L_z y+i\hbar yL_z$$

$$=i\hbar\left[\left(\vec{r}\wedge\vec{L}\right)_x-\left(\vec{L}\wedge\vec{r}\right)_x\right]$$

وباستخدام (1) :

$$\therefore \left(\vec{r}\wedge\vec{L}\right)_x=-k_x-i\hbar x \leftarrow \left(\vec{L}\wedge\vec{r}\right)_x=k_x+i\hbar x$$

$$\therefore\left[\left(\vec{r}\wedge\vec{L}\right)_x-\left(\vec{L}\wedge\vec{r}\right)_x\right]=-2k_x \qquad \therefore\left[L^2,x\right]=-2i\hbar k_x \quad \text{\_\_\_\_\_ (2)}$$

وبالمثل فإن : $\left[L^2,z\right]=-2i\hbar k_z$, $\left[L^2,y\right]=-2i\hbar k_y$ ومن ذلك نجد أن :

$$\left[L^2,\vec{r}\right]=-2i\hbar\vec{k}$$

وهو المطلوب .

المؤثرات السلمية (Ladder operators)

عندما إيجاد القيم الذاتية والدوال الذاتية للمؤثرين L^2 , L_z وجدنا أن التوافقية الكرية (Spherical Harmonic) $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ تمثل الدوال الذاتية الآنية لكل من $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ حيث :

$$L^2Y_{\ell,m}(\theta,\phi)=\ell(\ell+1)\hbar^2Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

$$L_zY_{\ell,m}(\theta,\phi)=m\hbar^2Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

وتخضع $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ للعلاقة التعامدية العيارية :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y^*_{\ell,m}(\theta,\phi)Y_{\ell',m'}(\theta,\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi = \delta_{\ell\ell'}\cdot\delta_{mm'}$$

وتعرف بالعلاقة :

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi)=(-1)^m\left[\frac{2\ell+1}{4\pi}\cdot\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} p_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}$$

(حيث $m\geq 0$)

ووجدنا أن الدوال $Y_{\ell,m}$ لا تشكل دوالا ذاتية آنيــة للمــؤثر L^2 مــع أي مــن المؤثرين L_x أو L_y .

ولكن بتعريف المؤثر $L_\pm = L_x \pm iL_y$ فإنه من الممكن إثبات النظرية الآتية :

إذا كانت $Y_{\ell,m}$ هي دوال ذاتية آنية لكل من $\hat{L}_z$, $\hat{L}^2$ فإن :

(i) $L_+ \; Y_{\ell,m} = C_m \; Y_{\ell,m+1}$

(ii) $L_- \; Y_{\ell,m} = C'_m \; Y_{\ell,m-1}$

يسمى المؤثران $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$

بالمؤثرين السلميين (Ladder Operators)

وباستخدام هذين المؤثرين يمكن إيجاد تأثير المؤثرين L_x, L_y على $Y_{\ell,m}$.

<u>مثال :</u>

(أ) أثبت أن المؤثرين السلميين $L_\pm$ يعطيان في الإحداثيات القطبيــة الكرويــة بالصورة :

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

(ب) أثبت الخواص الآتية للمؤثرين السلميين

(i) $L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z \; L_\pm$

(ii) $L_-L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$

(iii) $[L_+, L_z] = -\hbar L_+$

(iv) $[L_-, L_z] = \hbar L_-$

(v) $[L_+, L_-] = 2\hbar L_z$

<u>الحــل :</u>

(أ) : حيث أن :

$$L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\therefore L_+ = L_x + iL_y$$

$$= \hbar\left[\left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= \hbar[\cos\phi + i\sin\phi]\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= \hbar\, e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

$$L_- = L_x - iL_y$$

$$= \hbar\left[\left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - \left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$= \hbar[\cos\phi - i\sin\phi]\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= -\hbar\, e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

من (2) ، (1) :

$$L_{\pm} = \pm\hbar\, e^{\pm i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

وهو المطلوب أولاً .

<u>ملاحظة</u> : بوضع $\mu = \cos\theta$ فإن :

$$1-\mu^2 = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$$

أيضاً :

$$\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{-1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\theta} \qquad \leftarrow \qquad d\mu = -\sin\theta\, d\theta$$

$$\therefore\ \frac{\partial}{\partial\theta} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu} \qquad \Bigg| \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

$$\therefore L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm i\phi}\left[-\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu} \pm i\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= \hbar e^{\pm i\phi}\left[\mp\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{i\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \qquad \_\_\_\_\_\_ (3)$$

وهي صورة أخرى للمؤثر $L_{\pm}$.

(ب) لإيجاد العلاقات المعطاه : نستخدم التعريف

$$L_+ = L_x + iL_y \ , \ L_- = L_x - iL_y$$

(i)
$$L_+L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y)$$
$$= L_x^2 - iL_xL_y + iL_yL_x + L_y^2$$
$$= L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 - i(i\hbar L_z)$$
$$= L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z + L_z^2 - L_z^2 = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z \qquad \_\_\_\_ (4)$$

(ii)
$$L_-L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y)$$
$$= L_x^2 + iL_xL_y - iL_yL_x + L_y^2$$
$$= L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y] = L_x^2 + L_y^2 + i(i\hbar L_z)$$
$$= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z + L_z^2 - L_z^2 = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z \qquad \_\_\_\_ (5)$$

$$\text{(iii)}\ [L_+, L_z] = L_+L_z - L_zL_+ = (L_x + iL_y)L_z - L_z(L_x + iL_y)$$
$$= L_xL_z + iL_yL_z - L_zL_x - iL_zL_y = [L_x, L_z] + i[L_y, L_z]$$
$$= -i\hbar L_y + i(i\hbar L_x) = -i\hbar L_y - \hbar L_x$$
$$= -\hbar(L_x + iL_y) = -\hbar L_+ \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (6)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$\text{(iv)}\ [L_-, L_z] = \hbar L_- \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (7)}$$

$$\text{(v)}\ [L_+, L_-] = L_+L_- - L_-L_+$$
$$= (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) - (L_x - iL_y)(L_x + iL_y)$$
$$= (L_x^2 - iL_xL_y + iL_yL_x + L_y^2) - (L_x^2 + iL_xL_y - iL_yL_x + L_y^2)$$
$$= (L_x^2 + L_y^2 - i[L_x, L_y]) - (L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y])$$
$$= -2i[L_x, L_y] = -2i(i\hbar L_z) = 2\hbar L_z \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (8)}$$

وهو المطلوب .

[٢] مؤثر كمية الحركة الزاوية اللفية (أو المغزلية) :

(Spin Angular Momentum Operator)

في عام ١٩٢٥ إقترح العالمان جود سميث وأولنبيك أن الإلكترون كجسيم مشحون يكون له كمية حركة زاوية ذاتية (Intrinsic angular momentum) أو لف (Spin) ، إضافة إلى كمية الحركة الزاوية المدارية ($\hat{L}$) .

وهذه الكمية الجديدة تميز حركة الإلكترون كجسيم صلب يدور (أو يلف) حول محور يمر بمركزه وتشبه حركة المغزل ولذلك تعرف أحياناً بالحركة المغزلية ، وتتميز هذه الحركة بمؤثر اتجاهي يعرف بمؤثر كمية الحركة الزاوية اللفية أو المغزلية ($\hat{S}$) .

وتتفق خواص هذا المؤثر مع خواص المؤثر $\hat{L}$ حيث أنهما من نفس النوع (كمية حركة زاوية) ، وعلى ذلك فيمكننا إستنتاج الخواص الآتية للمؤثر $\hat{S}$:

(i)	$\hat{\vec{S}} = \hat{i}\, S_x + \hat{j}\, S_y + \hat{k}\, S_z$	$\hat{\vec{L}} = \hat{i}\, L_x + \hat{j}\, L_y + \hat{k}\, L_z$
(ii)	$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$	$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$
(iii)	$\hat{S} \wedge \hat{S} = i\hbar \hat{S}$	$\hat{L} \wedge \hat{L} = i\hbar \hat{L}$
(iv)	القيمة الذاتية لـ S^2 : $a = s(s+1)\hbar^2$ حيث s يعرف بالعدد الكمي اللفي (Spin quantum number)	القيمة الذاتية لـ L^2 : $a = l(l+1)\hbar^2$ حيث l يعرف بالعدد الكمي المداري (Orbital quantum number)
(v)	القيمة الذاتية للمركبة S_z : $\lambda = \rho\hbar$ حيث ρ عدد كمي يأخذ (2S+1) قيمة. ρ له قيمتان : $\rho = \pm\frac{1}{2}$	القيمة الذاتية للمركبة L_z : $a = l(l+1)\hbar^2$ حيث m عدد كمي يأخذ(2l+1) قيمة. m يأخذ القيم : $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

العلاقات التبادلية (Cummutation relations) :

من التماثل بين كميتي الحركة الزاوية المدارية $(\hat{L})$ واللفية $(\hat{S})$ يمكننا كتابة العلاقات التبادلية الآتية والتي يمكن إثباتها بنفس الطريقة كما سبق في حالة المؤثر $\hat{L}$:

(i)
$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad \rightarrow \quad [L_x, L_y] = i\hbar L_z$$
$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x \quad \rightarrow \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x$$
$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y \quad \rightarrow \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

(ii)
$$[S^2, S_x] = 0 \quad \rightarrow \quad [L^2, L_x] = 0$$
$$[S^2, S_y] = 0 \quad \rightarrow \quad [L^2, L_y] = 0$$
$$[S^2, S_z] = 0 \quad \rightarrow \quad [L^2, L_z] = 0$$

(iii)
$$S_\pm = S_x \pm i S_y \quad \rightarrow \quad L_\pm = L_x \pm i L_y$$
$$[S_+, S_-] = 2\hbar S_z \quad \rightarrow \quad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z$$
$$[S_+, S_z] = -\hbar S_+ \quad \rightarrow \quad [L_+, L_z] = -\hbar L_+$$
$$[S_-, S_z] = \hbar S_- \quad \rightarrow \quad [L_-, L_z] = \hbar L_-$$

مصفوفات باولي [الصورة المصفوفية لمؤثر اللف]

Pauli's Matrices [Matrix Form of Spin Operator]

يمكن كتابة مركبات مؤثر اللف (S_x, S_y, S_z) في صورة مصفوفات 2×2 وذلك بالصورة الآتية :

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; S_y = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \;,\; S_z = \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[برهان ذلك في الباب الخاص بميكانيكا المصفوفات في الجزء الثاني من هذا الكتاب]

وقد استخدم باولي الرموز الآتية لتلك المصفوفات :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وتعرف بمصفوفات اللف لباولي (Pauli Spin Matrices)

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x \quad , \quad S_y = \frac{1}{2}\hbar\sigma_y \quad , \quad S_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$$

وفي صورة إتجاهية :

$$\hat{S} = \hat{i}\,S_x + \hat{j}\,S_y + \hat{k}\,S_z = \frac{1}{2}\hbar\left[\hat{i}\,\sigma_x + \hat{j}\,\sigma_y + \hat{k}\,\sigma_z\right]$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma} \qquad , \quad \vec{\sigma} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\right)$$

وتعرف العلاقة $\hat{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ بعلاقة باولي .

العلاقات التبادلية لمصفوفات باولي :

يمكن إثبات العلاقات التبادلية الآتية لمصفوفات باولي :

(i) $\quad \vec{\sigma} \wedge \vec{\sigma} = 2i\,\vec{\sigma}$

الإثبات : ـــ حيث أن $\hat{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ فيمكننا كتابة : ـــ

$$\hat{S} \wedge \hat{S} = \left(\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\right) \wedge \left(\frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}\right) = \frac{1}{4}\hbar^2\left(\vec{\sigma} \wedge \vec{\sigma}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(1)$$

أيضاً فإن :

$$\hat{S} \wedge \hat{S} = i\hbar\,\hat{S} = \hat{i}\,\hbar\left(\frac{1}{2}\hbar\,\hat{\sigma}\right) = \frac{i}{2}\hbar^2\,\vec{\sigma} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_}(2)$$

من (2) ، (1) نجد أن :

$$\frac{1}{4}\hbar^2\left(\overline{\sigma} \wedge \overline{\sigma}\right) = \frac{i}{2}\hbar^2\,\vec{\sigma}$$

$$\therefore \overline{\sigma} \wedge \overline{\sigma} = 2i\,\vec{\sigma}$$

وهو المطلوب .

ملحوظة : هذه العلاقة تعني أن :

$$(\bar{\sigma}\wedge\bar{\sigma})_x = 2i\sigma_x \qquad \therefore \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = 2i\sigma_x$$

$$\therefore [\sigma_y,\sigma_z] = 2i\sigma_x$$

وبالمثل فإن :

$$[\sigma_z,\sigma_x] = 2i\sigma_y \quad , \quad [\sigma_x,\sigma_y] = 2i\sigma_z$$

وهذه العلاقات يمكن إثباتها بإستخدام المصفوفات كالآتي :

$$[\sigma_x,\sigma_y] = \sigma_x\,\sigma_y - \sigma_y\,\sigma_x$$

حيث :

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.i & 0.(-i)+1.0 \\ 1.0+0.i & 1(-i)+0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

وبالمثل فإن :

$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore [\sigma_x,\sigma_y] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\sigma_z$$

وبالمثل بالنسبة لباقي العلاقات .

$$\text{(ii)} \quad \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \quad , \quad \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0 \quad , \quad \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0$$

<u>الإثبات :</u>

بإستخدام الصورة المصفوفة لمصفوفات باولي

$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= i\sigma_z - i\sigma_z = 0$$

وبالمثل يمكن إثبات العلاقات الأخرى .

(iii) $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \quad , \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x \quad , \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$

الإثبات :

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_z$$

وبالمثل يمكن إثبات العلاقات الأخرى .

(iv) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathrm{I}$

حيث $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو مصفوفة الوحدة .

$$\sigma_x^2 = \sigma_x\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+1.1 & 0.1+1.0 \\ 1.0+0.1 & 1.1+0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

وهكذا بالنسبة للعلاقات الأخرى .

ملحوظة :

حيث أن $\sigma_x^2 = 1 \quad \leftarrow \quad \therefore \sigma_x = \pm 1$

وبالمثل فإن :

$$\therefore \sigma_y = \pm 1 \,, \qquad \sigma_z = \pm 1$$

أمثلة محلولة :

مثال (١) :

(أ) أثبت أن مصفوفات باولي هي مصفوفات هيرميتية .

(ب) أثبت أن مصفوفات باولي هي مصفوفات واحدية .

(ت) أكتب معادلة القيمة الذاتية لمصفوفات باولي ومن ذلك أوجد القيم الذاتية والدوال (أو المتجهات) الذاتية لهذه المصفوفات .

الحـــل :

(أ) لإثبات أن أي مصفوفة هيرميتية نثبت أن المترافق لها يساوي المصفوفة ذاتها .

ففي حالة σ_y مثلاً : حيث أن :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}(1)$$

فإن المرافق (conjugate) لها هو :

$$\sigma_y^* = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

أما المترافق (adjoint) فيعرف بأنه منقول (Transpose) المرافق أي :

$$\sigma_y^+ = \tilde{\sigma}_y^*$$

ولما كان المنقول يأتي بنقل الصفوف أعمدة والعكس فإن :

$$\sigma_y^+ = \tilde{\sigma}_y^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y$$

وهذا يعني أن σ_y هي مصفوفة هيرميتية .

وهكذا بالنسبة لباقي المصفوفات .

(ب) **لإثبات أن أي مصفوفة هي مصفوفة واحدية** نثبت أن : $\sigma^+\sigma = \mathrm{I}$

أو نثبت أن : $\sigma^+ = \sigma^{-1}$ حيث σ^{-1} هو المعكوس

ففي حالة σ_x :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sigma_x^+ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

وبالمثل في حالة σ_y :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sigma_y^+ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$$

وكذلك بالنسبة للمصفوفة σ_z .

(ت) **لإيجاد القيم الذاتية والمتجهات (أو الدوال) الذاتية لمصفوفات باولي :**

(i) للمصفوفة σ_x : ـ نكتب معادلة القيمة الذاتية :

$$\sigma_x\psi = \lambda\psi \qquad (1)$$

وحيث أن σ_x في صورة مصفوفة مربعة 2×2 فيجب أن تكون ψ في صورة مصفوفة عمود من عنصرين أي في صورة :

$$\psi = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

وهذه العلاقة المصفوفة تعني أن :

$$C_1 = \lambda C_2 \quad , \quad C_2 = \lambda C_1$$

$$\therefore C_2 = \lambda C_1 = \lambda(\lambda C_2) = \lambda^2 C_2 \quad \therefore \lambda^2 = 1 \quad \therefore \lambda = \pm 1$$

أي أن القيم الذاتية للمصفوفة σ_x هي (± 1) .

ولإيجاد الدوال الذاتية المناظرة :

عندما $\lambda = +1$ فإن $C_1 = C_2$ $\leftarrow$ $\psi_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

عندما $\lambda = -1$ فإن $C_2 = -C_1$ $\leftarrow$ $\psi_2 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ولإيجاد C_1 : نطبق شرط المعايرة على أي من الدالتين :

$$|\psi_1|^2 = 1 \quad \rightarrow \quad \psi_1^*\psi_1 = 1$$

$$\therefore |C_1|^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

حيث :

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \psi_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2|C_1|^2 = 1 \quad \therefore |C_1|^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وتأخذ الدوال الذاتية للمصفوفة σ_x الصورة الآتية :

$$\psi_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \psi_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>(ii) للمصفوفة</u> σ_y : معادلة القيمة الذاتية :

$$\sigma_y \psi = \lambda \psi \ \therefore \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} -iC_2 \\ iC_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

وهذه العلاقة المصفوفية تعني أن :

$$-i\, C_2 = \lambda C_1 \qquad , \qquad i\, C_1 = \lambda C_2$$

$$\therefore \lambda C_1 = -iC_2 = -i\left(\frac{iC_1}{\lambda}\right) = \frac{C_1}{\lambda}$$

$$\therefore \lambda^2 C_1 = C_1 \quad \to \quad \therefore \lambda^2 = 1 \quad \therefore \lambda = \pm 1$$

<u>ولإيجاد المتجهات الذاتية :</u>

عندما $\lambda = +1$: فإن

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ iC_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \leftarrow C_2 = iC_1$$

عندما $\lambda = -1$: فإن

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -iC_1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \leftarrow C_2 = -iC_1$$

<u>(iii) للمصفوفة</u> σ_z : معدلة القيمة الذاتية :

$$\sigma_z\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\ \therefore\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\begin{pmatrix}C_1\\-C_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

وهذه العلاقة تعني أن :

$$C_1=\lambda C_1 \quad , \ -C_2=\lambda C_2$$

أي أن :

$$(1-\lambda)C_1=0 \quad , \ (-1-\lambda)C_2=0$$

وهاتان المعادلتان يكون لهما حل غير صفري فقط عندما :

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0 \qquad \therefore(1-\lambda)(-1-\lambda)=0$$

$$\therefore -1-\lambda+\lambda+\lambda^2=0 \qquad \therefore \lambda^2-1=0 \qquad \therefore \lambda^2=1 \qquad \therefore \lambda=\pm1$$

<u>ولإيجاد المتجهات الذاتية المناظرة :</u>

عندما $\lambda=+1$: فإن $C_1=1\,,C_2=0 \leftarrow \quad \psi_1=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

عندما $\lambda=-1$: فإن $C_1=0 \ , \ C_2=1 \leftarrow \quad \psi_2=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

<u>ملحوظة :</u>

يرمز للمصفوفة $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ بالرمز α ، وللمصفوفة $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ بالرمز β ، ولذلك فـــإن المتجهات الذاتية للمصفوفة σ_z يمكن كتابتها بالصورة :

$\psi_1=\alpha \quad$ (عندما $\lambda=+1$)

$\psi_2=\beta \quad$ (عندما $\lambda=-1$)

مثال (٢) : أثبت أن أي مصفوفة 2×2 إختيارية يمكن كتابتها كتركيبة خطيـة مـن المصفوفات $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ والمصفوفة I .

الحـل :

نفرض المصفوفة 2×2 بالصورة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وليكن :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = C_1\sigma_x + C_2\sigma_y + C_3\sigma_z + C_4\mathrm{I} \quad \_\_\_\_\_\_ \quad (1)$$

حيث C_1,C_2,C_3,C_4 ثوابت ، فبالتعويض عن $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\mathrm{I}$ في (1) نحصـل على :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + C_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_3 + C_4 & C_1 - iC_2 \\ C_1 + iC_2 & -C_3 + C_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C_3 + C_4 = a \quad , C_1 - iC_2 = b \quad , \quad C_1 + iC_2 = c \quad , \quad -C_3 + C_4 = d$$

$$\therefore C_1 = \frac{1}{2}(b+c) \ , \ C_2 = \frac{1}{2i}(c-b) \ , \ C_3 = \frac{1}{2}(a-d) \ , \ C_4 = \frac{1}{2}(a+d)$$

وبذلك يمكننا كتابة المصفوفة 2×2 الإختيارية التـي عناصـرها a , b , c , d بالصورة :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(b+c)\sigma_x + \frac{1}{2i}(c-b)\sigma_y + \frac{1}{2}(a-d)\sigma_z + \frac{1}{2}(a+d)\mathrm{I}$$

مثال (٣) : إذا كان $\vec{A},\vec{B}$ مؤثران متبادلان مع مصفوفات باولي $\vec{\sigma}$ فأثبت أن :

$$(\vec{A}\cdot\vec{\sigma})(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$$

واستخدم هذه العلاقة لإثبات أن : $e^{i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})} = \cos\theta + i\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\theta$

حيث $\hat{n}$ هو متجه وحدة في أي إتجاه .

<u>الحــل :</u>

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\right)=\left(A_x\sigma_x+A_y\sigma_y+A_z\sigma_z\right)\left(B_x\sigma_x+B_y\sigma_y+B_z\sigma_z\right)$$
$$=A_x\sigma_xB_x\sigma_x+A_x\sigma_xB_y\sigma_y+A_x\sigma_xB_z\sigma_z$$
$$+A_y\sigma_yB_x\sigma_x+A_y\sigma_yB_y\sigma_y+A_y\sigma_yB_z\sigma_z$$
$$+A_z\sigma_zB_x\sigma_x+A_z\sigma_zB_y\sigma_y+A_z\sigma_zB_z\sigma_z$$
$$=A_x\sigma_x\sigma_xB_x+\sigma_xA_x\sigma_yB_y+\sigma_xA_x\sigma_zB_z+\ldots\ldots\ldots$$
$$=A_x\sigma_x^2B_x+\sigma_x\sigma_yA_xB_y+\sigma_x\sigma_zA_xB_z+\ldots\ldots\ldots$$

حيث استخدمنا خاصية تبادل $\vec{A},\vec{B}$ مع مصــفوفات $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ وباســتخدام العلاقات $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=1$ والعلاقات : .... , $\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x$ نحصل على :

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}\right)=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z+\sigma_x\sigma_y\left(A_xB_y-A_yB_x\right)$$
$$+\sigma_y\sigma_z\left(A_yB_z-A_zB_y\right)+\sigma_z\sigma_x\left(A_zB_x-A_xB_z\right)$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\sigma_z\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)_z+i\sigma_x\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)_x+i\sigma_y\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)_y$$
$$=\vec{A}\cdot\vec{B}+i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\qquad\_\_\_\_\_(1)\qquad\Big|\ \sigma_x\sigma_y=i\sigma_z,\ldots$$

وهو المطلوب أولاً .

<u>المطلوب الثاني</u> : نستخدم مفكوك الدالة الأسية :

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$
$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{i\,x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$
$$\therefore e^{i\theta(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})}=1+i\theta\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)-\frac{i\theta^2\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)}{2!}-$$
$$-i\frac{i\theta^3\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)}{3!}+\ldots\ldots\ldots$$

وباستخدام العلاقة (1) مع وضع $\vec{A}=\vec{B}=\hat{n}$ وإعتبار أن $\hat{n}\cdot\hat{n}=1\,,\,\hat{n}\wedge\hat{n}=0$ نحصل على :

$$e^{i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})}=1+i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})-\frac{\theta^2}{2!}[1]-i\frac{\theta^3}{3!}[(1)\,(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})+..........]$$

$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+.......\right)+i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\left[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+........\right]$$

ومن مفكوك تيلور للجيب وجيب التمام :

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2\,!}+\frac{\theta^4}{4\,!}-..........$$

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-..............$$

$$\therefore e^{i\theta(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})}=\cos\theta+i(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\sin\theta$$

وهو المطلوب .

الدالة الموجية اللفية (Spin Wave Function) :

وجد العلماء أن خاصية اللف ليست خاصة بالإلكترونات فقط ولكنها موجودة لكل الجسيمات الأخرى التي تدخل في بناء المادة مثل البروتونات والنيوترونات وغيرها ، وكذلك للأنظمة المكونة من تلك الجسيمات مثل الذرات والجزيئات ، واللف هو كمية لا تعتمد على الموضع $\bar{r}$ أو كمية الحركة الخطية $\bar{p}$ ، وهو بذلك يكون متبادلاً مع كل من $\bar{r}\,,\bar{p}$ ، وكذلك مع كمية الحركة المدارية $\hat{L}$.

وبإعتبار المركبة σ_z لمصفوفات باولي والتي لها القيمة الذاتية (± 1) فإن أي جسيم يمكن وصف حالته بدالة موجية $\Psi(\bar{r},\sigma_z)$ تعبر عن موضعه ، وحالته اللفية (Spin State) ، حيث $\sigma_z = \pm 1$ تصف لف الجسيم في إتجاه محور z (الإتجاه اليميني) عندما $\sigma = +1$ وفي الإتجاه المضاد (الإتجاه اليساري) عندما $\sigma_z = -1$ وبذلك يكون لدينا دالتان موجيتان :

$$\psi_1(\bar{r},+1) = \psi_+ \qquad , \quad \psi_2(\bar{r},-1) = \psi_-$$

وعادة ما نستخدم دالة موجية واحدة لوصف موضع الجسيم وحالتي اللف له وذلك بالصورة $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة عمود تعرف بالدالة الموجية اللفية أو الملفوف (Spinor) للجسيم ، حيث $\psi_1\,,\psi_2$ هما الدالتان اللتان تصفان حالة الجسيم مع أخذ خاصية اللف (Spin) له في الإعتبار ، ومن هنا جاء إسم الملفوف .

ومرافق هذا الملفوف هو مصفوفة صف صورتها :

$$\Psi^* = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix}$$

بحيث أن :

$$|\,\Psi\,|^2 = \Psi^*\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 = |\,\psi_1\,|^2 + |\,\psi_2\,|^2$$

أيضاً : يمكن كتابة الدالة الموجية اللفية Ψ بالصورة :

$$\Psi(\vec{r},\sigma_z)=\psi(\vec{r})\cdot\phi(\sigma_z)$$

حيث $\phi(\sigma_z)$ هي دالة في اللف (أو الإحداثيات اللفية) σ_z ، ويمكن إثبات الآتي [الدوال الذاتية لمصفوفات باولي] :

(i) إذا كان $\sigma_z=+1$ $(\uparrow)$ up-spin

(اللف إلى أعلى)

$$\therefore \phi(\sigma_z)=\phi_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha$$

(ii) إذا كان $\sigma_z=-1$ $(\downarrow)$ down-spin

(اللف إلى أسفل)

$$\therefore \phi(\sigma_z)=\phi_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\beta$$

$$\therefore \psi_1=\psi_+=\psi(\vec{r})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\alpha\,\psi(\vec{r})$$

$$\psi_2=\psi_-=\psi(\vec{r})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\beta\,\psi(\vec{r})$$

وتكون مرافقاتها :

$$\psi_1^*=\psi_+^*=\psi^*(\vec{r})\,(1\quad 0)$$

$$\psi_2^*=\psi_-^*=\psi^*(\vec{r})\,(0\quad 1)$$

مثال : أثبت أن الدوال الموجية اللفية تخضع لخاصية التعامد العياري (orthonormalization) وذلك بفرض أن الدالة $\psi(\vec{r})$ دالة عيارية .

الحل :

(i) إذا كان $\sigma_z=+1$:

$$\int\psi_1^*\psi_1\,dV=\int\psi^*(\vec{r})\,(1\quad 0)\psi(\vec{r})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dV=(1\quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\int\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})dV$$

ولكن :

$$\alpha^*\alpha = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \ , \ \int \psi^* \psi \ dV = 1$$

$$\therefore \boxed{\int \ \psi_1^* \psi_1 \, dV = 1}$$

(ii) إذا كان $\sigma_z = -1$:

$$\int \psi_2^* \psi_2 \, dV = \int \psi^*(\vec{r}) \, (0 \quad 1) \, \psi(\vec{r}) \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dV = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \int \psi^* \psi \, dV$$

ولكن :

$$\beta^*\beta = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1 \quad , \quad \int \psi^* \psi \, dV = 1$$

$$\therefore \boxed{\int \psi_2^* \psi_2 \, dV = 1}$$

وهكذا ....

وبوجه عام :

$$\boxed{\int \psi_i^* \psi_j \, dV = \delta_{ij}}$$

وهي الخاصية التعامدية العيارية للدوال الموجية اللفية .

ملحوظة : إذا كانت S^2 هي مربع مؤثر كمية الحركة الزاوية اللفية ، S_z هي المركبة z لهذا المؤثر فإن الدوال الموجية اللفية Ψ تكون دالة ذاتية آنية (Simultanious eigenfunction) لكل من S_z ، S^2 (في آن واحد) بحيث أن :

$$S^2\Psi = s(s+1)\hbar^2 \Psi$$
$$S_z\Psi = \rho \hbar \Psi$$

حيث s هي العدد الكمي اللفي ، ρ هي المركبة z له .

العلاقة بين اللف والعزم المغنطيسي لجسيم مشحون :

حيث أن الجسيم المشحون (الإلكترون مثلاً) يتحرك حركة لفية مستمرة حول محوره فإنه ينتج عن ذلك تياراً كهربياً وبالتالي يتولد نتيجة هذا التيار مجالاً مغنطيسياً ، وهذا المجال يجعل الجسيم يكتسب كمية تعرف بالعزم المغنطيسي (Magnetic Moment) $\vec{\mu}$ ويرتبط باللف بالعلاقة :

$$\boxed{\vec{\mu} = \mu_0 \, \vec{\sigma}}$$

حيث $\mu_0 = \dfrac{e}{m_0 c}$ ؛ e شحنة الإلكترون ، m_0 كتلته الساكنة ، c سرعة الضوء

$\vec{\sigma}$ هي مصفوفات باولي المرتبطة بالحركة اللفية .

التفاعل بين اللف الإلكتروني والمجال المغنطيسي الخارجي Interaction between spinning electron and external Magnetic Field

[نظرية باولي Pauli's Theorem]

أي جسيم مشحون عزمه المغنطيسي $\vec{\mu}$ إذا وجد في مجال مغنطيسي خارجي شدته $\vec{B}$ فإن الجسيم يكون له طاقة جهد (potential energy) تعطي بالعلاقة:

$$\boxed{u = \vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$

وإذا كانت $\vec{\mu} = \mu_0 \, \vec{\sigma}$

$$\therefore u = \mu_0 \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right)$$

الكمية $\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right)$ تمثل ما يعرف بالتفاعل بين اللف الإلكتروني $\left(\vec{\sigma} \right)$ والمجال المغنطيسي الخارجي $\left(\vec{B} \right)$.

الهاملتونيان (الطاقة الكلية) للنظام يساوي مجموع حدين :

$\hat{H}_0$: الهاملتونيان مع عدم إعتبار خاصية اللف (أي مع إهمال اللف) .

$\hat{H}_\sigma$: الهاملتونيان مع إعتبار اللف .

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\sigma$$

ويمكن أخذ $\hat{H}_\sigma = u = \mu_0 \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right)$

$$\therefore \hat{H} = \hat{H}_0 + \mu_0 \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

ولكن : المصفوفات $\vec{\sigma}$ ترتبط مع مؤثر كمية الحركة الزاوية اللفية $\vec{S}$ بالعلاقة :

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2} \hbar \vec{\sigma}}$$

$$\therefore \quad \vec{\sigma} = \frac{2}{\hbar} \vec{S} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

بالتعويض من (2) في (1) :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{e}{m_0 c} \left(\frac{2}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B}\right)$$

$$= \hat{H}_0 + \frac{2e}{m_0 c \hbar} \left(\vec{S} \cdot \vec{B}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} (3)$$

معادلة شرودنجر :

$$\hat{H} \Psi = E \Psi$$

حيث :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \mu_0 \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right)$$
$$E = E_0 + E_{(1)}$$

E_0 هي القيمة الذاتية لـ $\hat{H}$ مع إهمال اللف .

$E_{(1)}$ هي الإضافة الناتجة عن وجود اللف .

وتصبح معادلة شرودنجر :

$$\left[\hat{H}_0 + \mu_0\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\right]\ \Psi = \left[E_0 + E_{(1)}\right]\Psi \qquad \underline{\qquad\qquad}(4)$$

وبوضع $\Psi = \psi_0\left(\vec{r}\right)\cdot\phi\left(\sigma_z\right)$ في العلاقة (4)

$$\phi\ \hat{H}_0\ \ \psi_0 + \psi_0\ \mu_0\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\phi = E_0\ \phi\psi_0 + E_{(1)}\ \phi\psi_0$$

ولكن :

$$\phi\ \ \hat{H}_0\ \psi_0 = \phi E_0\ \psi_0 = E_0\ \phi\psi_0$$

$$\therefore \psi_0\ \mu_0\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right)\phi = E_{(1)}\phi\psi_0$$

وبالقسمة على ψ_0 :

$$\mu_0\underbrace{\left(\vec{\sigma}_0\cdot\vec{B}\right)}_{\downarrow}\phi = E_{(1)}\ \phi$$

$$\mu_0\left[\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z\right]\phi = E_{(1)}\phi$$

$$\therefore \mu_0\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}B_x + \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}B_y + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}B_z\right]\phi = E_{(1)}\phi$$

$$\therefore \mu_0\left[\begin{pmatrix}0 & B_x\\ B_x & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -iB_y\\ iB_y & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_z & 0\\ 0 & -B_z\end{pmatrix}\right]\phi = E_{(1)}\phi$$

$$\therefore \mu_0\begin{pmatrix}B_z & B_x - iB_y\\ B_x + iB_y & -B_z\end{pmatrix}\phi = E_{(1)}\phi$$

وبكتابة $\phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$

$$\therefore \mu_0\begin{pmatrix}B_z & B_x - iB_y\\ B_x + iB_y & -B_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = E_{(1)}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

$$\mu_0\begin{pmatrix}B_z\phi_1 + \left(B_x - iB_y\right)\phi_2\\ \left(B_x + iB_y\right)\phi_1 - B_z\phi_2\end{pmatrix} = E_{(1)}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$$

ويكون لدينا المعادلتان :

$$\mu_0\left[B_z\phi_1 + \left(B_x - iB_y\right)\phi_2\right] = E_{(1)}\ \phi_1$$

$$\mu_0\left[\left(B_x + iB_y\right)\phi_1 - B_z\ \phi_2\right] = E_{(1)}\ \phi_2$$

ويمكن كتابتهما بالصورة :

$$\left(\mu_0 B_z - E_{(1)}\right)\phi_1 + \mu_0\left(B_x - iB_y\right)\phi_2 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(5)}$$

$$\mu_0\left(B_x + iB_y\right)\phi_1 - \left(\mu_0 B_z + E_{(1)}\right)\phi_2 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(6)}$$

وهما معادلتان متجانستان في ϕ_1 , ϕ_2 يكون لهما حل غير صفري عندما :ـــ

$$\begin{vmatrix} \mu_0 B_z - E_{(1)} & \mu_0\left(B_x - iB_y\right) \\ \mu_0\left(B_x + iB_y\right) & -\left(\mu_0 B_z + E_{(1)}\right) \end{vmatrix} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $E_{(1)}$ ، حيث :

$$\left(E_{(1)} - \mu_0 B_z\right)\left(E_{(1)} + \mu_0 B_z\right) - \mu_0^2\left(B_x - iB_y\right)\left(B_x + iB_y\right) = 0$$

$$\therefore \left(E_{(1)}^2 - \mu_0^2 B_z^2\right) - \mu_0^2\left(B_x^2 + B_y^2\right) = 0$$

$$\therefore E_{(1)}^2 = \mu_0^2\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) = \mu_0^2 B^2$$

$$\therefore \boxed{E_{(1)}^2 = \pm\mu_0 B} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(7)}$$

وبذلك تكون :

$$E = E_0 + E_{(1)} = E_0 \pm \mu_0 B$$

$$\therefore \boxed{E = E_0 \pm \frac{e}{m_0 c} B}$$

وهي نظرية باولي ,

<u>مثال :</u> بأخذ المجال المغنطيسي في إتجاه محور z فأوجد الحل للمعادلتين (6) ، (5) ، وأحصل على صورة الدالة الموجية اللفية في هذه الحالة .

<u>الحل :</u> بأخذ المجال المغنطيسي في إتجاه محور z : $B = B_z\ ,\ B_x = B_y = 0$

وتصبح المعادلتين (6) ، (5) :

$$\left(\mu_0 B - E_{(1)}\right)\phi_1 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(8)}$$

$$\left(\mu_0 B + E_{(1)}\right)\phi_2 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(9)}$$

ولكن :

$$E_{(1)} = \pm \mu_0 B$$

فبأخذ $: E_{(1)} = +\mu_0 B$

$$\phi_1 \neq 0 \quad , \quad \phi_2 = 0$$

ونحصل على الحل الآتي بالنسبة للدالة الموجية اللفية :

$$\Psi = \psi_0 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_0 \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \psi_0 \phi_1 \qquad \_\_\_\_\_\_ (10)$$

وبأخذ $: E_{(1)} = -\mu_0 B$

$$\phi_1 = 0 \quad , \quad \phi_2 \neq 0$$

ونحصل على الحل الآتي للدالة الموجية اللفية :

$$\Psi = \psi_0 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \psi_0 \phi_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \psi_0 \phi_2 \qquad \_\_\_\_\_\_ (11)$$

ولإيجاد $\phi_1 \;,\; \phi_2$: من الخاصية العيارية للدالة الموجية اللفية :

$$1 = \int \Psi^* \Psi \, dV = \int \psi_0^* \phi_0^* (1 \quad 0) \, \psi_0 \phi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dV$$

$$= \underbrace{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{1''} \int \underbrace{\psi_0^* \psi_0 \, dV}_{1''} \cdot \phi_1^* \phi_1 = \phi_1^* \phi_1 = |\phi_1|^2$$

$$\boxed{\phi_1 = \pm 1}$$

وبالمثل فإن :

$$\boxed{\phi_2 = \pm 1}$$

وبذلك تصبح (11) ، (10) بالصورة :

$$\Psi = \pm \alpha \, \psi_0 \quad , \quad \Psi = \pm \beta \, \psi_0$$

حيث $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

وبإهمال إشارة (−) لأنها غير ذات معنى من الناحية الفيزيائية .

$$\therefore \Psi = \alpha\, \psi_0 \qquad , \qquad \Psi = \beta\, \psi_0$$

ولما كانت : $\boxed{\Psi = \psi_0\, \phi}$

فبالمقارنة :

$$\therefore \phi = \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_+$$

وتدل على حالة اللف إلى أعلى [up-spin] .

$$\phi = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_-$$

وتدل على حالة اللف إلى أسفل[down-spin] .