الباب السابع

جبر كثيرات الحدود ونظرية المعادلات

Algebra of Polynomials

(١.٧) مقدمة :

تعريف : التعبير $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ الذي يعتمد على المتغير x يسمى كثيرة حدود Polynomial أو متعددة حدود من درجة n في المتغير x حيث $(a_o \neq 0)$ حيث $a_o, a_1, ..., a_n$ عوامل كثيرة الحدود وجميعها أعداد حقيقية أو مركبة، n عدد صحيح غير سالب.

كثيرة الحدود من الدرجة الصفرية عبارة عن العدد البسيط المختلف عن الصفر a_o (مقدار ثابت لا يعتمد على أي متغير).

عادة تستخدم الرموز $f(x), q(x), \phi(x)$ للتعبير عن كثيرات الحدود. ويقال أن f(x) كثيرة حدود من درجة n وتكتب في الصورة

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

إذا أعطينا كثيرتي حدود من درجة n على الصورة $\theta(x), f(x)$ يقال أنهما متساويتين فيما بينهما إذا تساوت عوامل متغيراتها المرفوعة لنفس القوى، مجموع أو الفرق بين كثيرتي حدود أيضاً عواملها تساوي مجموع (أو الفرق) بين عوامل المتغير المرفوع لنفس القوى فمثلاً إذا كانت

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1, \theta(x) = x^2 + 1$$

فإن

$$f(x) + \theta(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2, \quad f(x) - \theta(x) = x^3 - 5x^2 + x$$

كذلك حاصل ضرب أي كثيرتي حدود هو أيضاً كثيرة حدود درجتها تساوي

مجموع درجتي كثيرات الحدود فمثلاً إذا كانت

$$f(x)=x^2-3x+2,\theta(x)=x^2+2x-3$$

فان

$$f(x)\theta(x)=\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2+2x-3\right)$$
$$=x^4-x^3-7x^2+13x-6$$

وأخيراً بالنسبة لقسمة كثيرة حدود على أخرى يمكننا القول بأنه على وجه العموم ليس من الممكن دائماً قسمة كثيرة حدود على أخرى بدون باقي:

(٢.١.٧) نظرية الباقي Remainder Theorem: أي كثيرة حدود $f(x)$ يمكن قسمتها على كثيرة حدود $\theta(x)/(\theta(x)\neq 0)$ ويكون هناك باقي $r(x)$ ومن ثم يمكن التعبير عن $f(x)$ بالشكل التالي $f(x)=\theta(x).q(x)+r(x)$

حيث كل من $\theta(x).q(x)$ كثيرات حدود معلومة وأن درجة كثيرة الحدود $r(x)$ أقل من درجة كثيرة الحدود $\theta(x)$ وكثيرة الحدود $r(x)$ هي باقي خارج قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على كثيرة الحدود $\theta(x)$ ، إذا كانت $r(x)=0$ يقال أن كثيرة الحدود $f(x)$ تقبل القسمة على كثيرة الحدود $\theta(x)$ بدون باقي ومن ثم فإن

$$f(x)=\theta(x)\,q(x)$$

ويقال أن $\theta(x)$ تقسم $f(x)$ divide وأن $\theta(x), q(x)$ عوامل divisors للدالة $f(x)$ وفي هذه الحالة يقال أن $f(x)$ قابلة للتحليل reducible.

إذا كانت $\theta(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الصفرية فإن $f(x)$ تقبل القسمة على $\theta(x)$ بدون باقي.

وإذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $\theta(x)$ فإن خارج القسمة $q(x)$ Quotient يساوي الصفر والباقي Remainder يكون نفس كثيرة الحدود $f(x)$ أي أن

$$q(x)=0\ ,\ \ f(x)=r(x)$$

النظرية السابقة تسمى نظرية خارج القسمة Division Algorithm.

مثال (١): نعتبر $g(x)=x^2+x+1, f(x)=x^3-1$

نلاحظ هنا أن

$$f(x)=\left(x^2+x+1\right)(x-1)$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}{x^2+x+1}=x-1$$

أي أن $q(x)=x-1 \ , r(x)=0$

مثال (٢): ليكن $g(x)=x^2-4x-1,\ f(x)=2x^2-3x+1$

وهنا نجد أن $f(x)=g(x)\,q(x)+r(x)$ حيث

$$q(x)=2, r(x)=5x+3$$

(٣.١.٧) طريقة هورنر للقسمة: Horner's method of synthetic division

والآن ندرس الطريقة التي بها يمكننا الحصول على $q(x)$ في حالة كون $g(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الأولى (طريقة هورنر) نعتبر لذلك

$$f(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1} x+a_n\ ,$$
$$g(x)=x-b \quad \text{(quotient)}$$

نبدأ بكتابة عوامل $f(x)$ في ترتيب تنازلي بالنسبة لقوى المتغير x في الصف الأول.

في الصف الثاني وعلى يسار a_o نكتب العدد b اسفل العدد a_o، نكتب العدد a_o مرة ثانية ثم يليه العدد $b_1=a_o b+a_1$ اسفل العدد a_1 ثم العدد $b_2=b_1 b+a_2$ أسفل العدد a_2 وهكذا وأخيراً اسفل العدد a_n نكتب العدد $b_n=b_{n-1} b+a_n$ ومن ثم يكون خارج القسمة أي كثيرة الحدود $q(x)$ هي

$$q(x)=a_o x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}$$

والباقي هو $r = b_n$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \hline b & a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & \boxed{b_n} \end{array}$$

مثال (٢) أوجد الباقي وخارج قسمة $f(x) = 2x^3 - 3x + 5$ على $g(x)=x-4$.

الحل: بتكوين الشكل السابق نجد أن

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 0 & -3 & 5 \\ \hline 4 & 2 & 8 & 29 & \boxed{121} \end{array}$$

أي أن $f(x) = (x-4)(2x^2 + 8x + 29) + 121$

وبالتالي يكون $q(x) = 2x^2 + 8x + 29, \quad r = 121$

إذا كان المقسوم علية على الصورة $g(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0$ ففي هذه الحالة يمكن اعتبار كثيرة الحدود $g_1(x)$ كالآتي: $g_1(x) = x - \left(-\frac{b}{a}\right)$

ومن ثم فإذا كانت $r, q(x)$ خارج القسمة والباقي نتيجة قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $g(x)$ فإن $r_1, q_1(x)$ هي خارج القسمة والباقي نتيجة قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $g_1(x)$ ومن ثم فإن $r = r_1, q(x) = \frac{1}{a} q_1(x)$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} f(x) &= q(x)\,g(x) + r \\ &= q(x)\,.\,a\,g_1(x) + r \\ &= q_1(x)\,g_1(x) + r_1 \end{aligned}$$

مثال (٣):

$$g(x)=2x+5,\ f(x)=x^3-2x^2-10x+3$$

الحل: نعتبر $g_1(x)=x-\left(-\frac{5}{2}\right)$ $a=2,$ ومن ثم

	1	-2	-10	3
$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{8}$

أي أن $q(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{9}{2}x+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{8}\ ,\ r=-\frac{1}{8}$

الباقي r نتيجة خارج قسمة أي كثيرة حدود f(x) على كثيرة الحدود من الدرجة الأولى g(x) أو العامل g(x) = x – b divisor نحصل عليه مباشرة نتيجة وضع r = b في f(x) وذلك لأن f(x) = (x-b) q(x) + r

بوضع x=b نحصل على f(b) = r

مثال (٤): إذا كانت $f(x)=x^4-2x^3+x^2+x+1$ أوجد قيمة f(x) عند x=-3.

الحل: نستخدم طريقة هورنر

	1	-2	1	1	1
-3	1	-5	16	-47	142

أي أن f(-3) = 142

(٤.١.٧) مفكوك كثيرات الحدود بدلالة قوى الفروق:

لأي كثيرة حدود

$$f(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (*)$$

وأي عدد a يمكننا كتابة f(x) كمفكوك بدلالة قوى المقدار (x-a) وليس x كالآتي

$$f(x)=b_o\,(x-a)^n+b_1\,(x-a)^{n-1}+\dots+b_n=\sum_{r=0}^{n}b_r(x-a)^{n-r} \qquad (**)$$

ولكي نحصل على العوامل $b_o, b_1, \dots, b_n$ نلاحـــظ أولاً $b_n=f(a)$ أي أن b_n هو الباقي نتيجة قسمة f(x) على (x-a) وخارج القسمة هو كثيرة حـــدود q(x) يمكننا الحصول عليها باستخدام طريقة هورنر.

لو قسمنا كثيرة الحدود q(x) على نفس المقدار (x-a) نحصل على كثيرة حـــدود جديدة $q_1(x)$ والباقي هو b_{n-1} ثم بقسمة $q_1(x)$ على نفس المقدار (x-a) نحصــل على كثيرة حدود جديدة $q_2(x)$ والباقي هو b_{n-2} وهكذا.

<u>مثال (٥):</u> نعتبر $f(x)=x^4-5x^3-3x^2+9\ ,\ a=3$

طريقة الحصول على العوامل $b_1, b_2, \dots, b_5$ كالآتي

	1	-5	-3	0	9	
3	1	-2	-9	-27	$\boxed{-72}$	b_4
	1	1	-6	-45	b_3	
	1	4	6	b_2		
	1	7		b_1		
	1		b_o			

ومن ثم فإن المعاملات b_i هي الموجودة على القطر من أسفل إلى أعلى بـــالترتيب

وعليه فإن $f(x)=(x-3)^4+7\,(x-3)^3+6\,(x-3)^2-45\,(x-3)-72$

وكما نلاحظ أن عوامل مفكوك الدالة f(x) بدلالة قوى الفـــرق (x-a) ترتبــط بمشتقات هذه الدالة عند النقطة x=a : بالعلاقات الآتية :

$$b_n=f(a)\,,\,b_{n-1}=\frac{f'(a)}{1!}\,,\,b_{n-2}=\frac{f''(a)}{2!}\,,\dots,b_o=\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ أو } b_{n-r}=\frac{f^{(r)}(a)}{r!}$$

هذه المعامــلات تناظــر معامـــــلات (x-a) في مفكوك تيلور للدالــة f(x) أي
$f(x)=\sum_{r=0}^{n}(x-a)^r\,\frac{f^{(r)}(a)}{r!}$ وهكذا نجد أنه باستخدامنا طريقة هورنـــر المعممــة
السابقة يمكننا الحصول على قيم المشتقات المختلفة لكثيرة الحدود المعطاة وذلـــك
عند النقطة a وهي القيم الآتية :

$$f'(3)=-45\,,\ f''(3)=6.2!=12,\ f'''(3)=7.3!=42\,,\ f^{(4)}3)=4!=24$$

الطريقة السابقة المستخدمة تسمح لنا بالحصول على الكسور الجزئية لأي كســر
كما بالمثال التالي:

مثال (٦) : أكتب الكسر $\phi(x)=\frac{x^2+x+1}{(x+2)^4}$ في صورة مجموع كسور جزئية.

الحل: نفرض أن بسط هذا الكسر هو كثيرة الحدود f(x) أي أن $f(x)=x^2+x+1$
ونحاول الآن الحصول على مفكوك لكثيرة الحدود هذه بدلالة قوى الفرق ((x-(-2)
لذلك نستخدم طريقة هورنر ومن ثم فإن

	1	1	1
-2	1	-1	3
	1	-3	
	1		

أي أن مفكوك f(x) بدلالة قوى (x+2) المختلفة هو

$$f(x)=(x+2)^2-3\,(x+2)+3$$

ومن ذلك الحصول على :

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)^2-3\,(x+2)+3}{(x+2)^4}$$
$$=\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{3}{(x+2)^3}+\frac{3}{(x+2)^4}$$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو أنه إذا كان لدينا كثيرة الحدود(**) والمراد الحصول على كثيرة الحدود (*) والإجابة هي أننا نستخدم طريقة هورنر بعملية عكسية أي من أسفل إلى أعلى بدون وضع معاملات (**) على القطر.

(٥.١.٧) القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود :

Greatest Common divisor (G. C. D)

إذا كانت كل من كثيرات الحدود $g(x)$ & $f(x)$ تقبل القسمة بدون باقي على كثيرة الحدود $\phi(x)$ فإن $\phi(x)$ تسمى القاسم المشترك العام لكثيرات الحدود $g(x)$ & $f(x)$.

<u>تعريف:</u> القاسم المشترك العام $d(x)$ الذي يقبل القسمة بدون باقي على كل قاسم مشترك لكل من كثيرات الحدود $g(x), f(x)$ يسمى القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود $g(x)$, $f(x)$ ونرمز له بالرمز $d(x)$ وبالاختصار (G.C.D) ويكتب في الصورة $d(x) = (f(x), g(x))$

<u>مثال (٧)</u> : أوجد القاسم المشترك الأعظم لكثيرتي الحدود

$$f(x) = x^2 - x \ . \ g(x) = x^2 + 1 \qquad (1)$$

فان $d(x) = (f(x), g(x)) = x - 1$

وإذا كانت

$$f(x) = 6x + 12 \ , \ g(x) = 4x - 2 \qquad (2)$$

فان $d(x) = 1$ وهكذا.

إذا اعطينا كل من كثيرات الحدود $g(x)$, $f(x)$ في صورة حاصل ضرب معاملات خطية مرفوعة لقوى

$$f(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_p)^{k_p} (x - \beta_1)^{m_1} \dots (x - \beta_t)^{m_t}$$

$$g(x)=b_o(x-\alpha_1)^{\ell_1}\dots(x-\alpha_p)^{\ell_p}(x-\gamma_1)^{v_1}\dots(x-\gamma_s)^{v_s}$$

وإذا كانت جميع الأعداد $\alpha_i\ ,\beta_a\ ,\gamma_r$ مختلفة فيما بينها فان

$$d(x)=(x-\alpha_1)^{m_1}\dots(x-\alpha_p)^{m_p}$$

لكل $j = 1, 2, ..., p$ حيث m_i أقل من $\ell_j\ ,k_j$

<u>مثال (٨):</u> نعتبر

$$f(x)=(x-1)^3\ (x+2)^2\ (x-5)^8\ ,\ g(x)=(x-1)\,(x+2)^4\ (x+7)\,(x+1)^2$$

فان $d(x)=(x-1)\,(x+2)^2$

أما إذا أعطينا كثيرات الحدود $g(x), f(x)$ في صورة مفكوكات بدلالة قوى x المختلفة أي عواملها غير معلومة فلكي نحصل على القاسم المشترك الأعظم نتبع الطرق المعروفة (جبر اقليدس).

لذلك نقسم $f(x)$ على كثيرة الحدود $g(x)$ نحصل على خارج القسمة $q_1(x)$ وباقي خارج القسمة $r_1(x)$، إذا لم يكن $r_1(x)$ مساوياً للصفر. نقسم كثيرة الحدود $g(x)$ على الباقي $r_1(x)$ نحصل على خارج القسمة $q_2(x)$ والباقي ككثيرة حدود جديدة $r_2(x)$، إذا لم يكن $r_2(x)$ مساوياً للصفر نقسم $r_1(x)$ على $r_2(x)$ وهكذا إلى أن نصل إلى الحالة التي يكون فيها باقي خارج القسمة مساوياً للصفر.

ويكون القاسم المشترك الأعظم هو آخر باقي خارج للقسمة غير مساو للصفر ومن الواضح أنه إذا كان $r_1(x)=0$ فإن القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود $g(x), f(x)$ هو $g(x)$

<u>مثال (٩) :</u> اعتبر $f(x)=3x^3-2x^2+x+4,\ \ g(x)=x^2-x-1$

الحل: نلاحظ أن

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 2x^2 - 3x + x^2 + 4x + 4 \\ &= 3x\left(x^2 - x - 1\right) + x^2 - x - 1 + 5x + 5 \\ &= 3x\left(x^2 - x - 1\right) + \left(x^2 - x - 1\right) + 5\left(x + 1\right) \\ &= \left(x^2 - x - 1\right)\left(3x + 1\right) + 5\left(x + 1\right) \\ &= g\left(x\right)\left(3x + 1\right) + 5\left(x + 1\right) \end{aligned}$$

أي أن $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$، خارج القسمة هو $q(x)=3x+1$ والباقي $r_1(x) = 5(x+1) \neq 0$، بقسمة $g(x)$ على $r_1(x)$ نحصل على

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - x - 1 = x^2 + x - 2x - 1 = \frac{x}{5}(5x + 5) - 2x - 2 + 1 \\ &= \frac{x}{5}(5x + 5) - \frac{2}{5}(5x + 1) + 1 = \frac{1}{5}(5x + 5)(x - 2) + 1 \\ &= \frac{1}{5}(x - 2)\, r_1(x) + 1 \end{aligned}$$

أي أن $g(x)$ تقبل القسمة على $r_1(x)$ حيث خارج القسمة هو $q_2(x) = \frac{1}{5}(x - 2)$ والباقي $r_2 = 1 \neq 0$ وحيث أن r_1 تقبل القسمة على r_2 بدون باق فان القاسم المشترك الأعظم لكثيرات الحدود $g(x), f(x)$ هو $r_2 = 1$

أي أن $d(x) = (f(x), g(x)) = 1$

(٦.١.٧) الارتباط البسيط لكثيرات الحدود:

يقال لكثيرات الحدود $g(x), f(x)$ أنهم مرتبطين ارتباطاً خطياً بسيط إذا كان العامل المشترك الأعظم لهما $d(x)$ يساوي الوحدة. وكما سنعلم فيما بعد أن أي كثيرتي حدود مرتبطتين ارتباطاً بسيط لا يوجد بينهم جذور مشتركة.

مثال (١٠): كثيرات الحدود $f(x)=x^3-3x^2+5$, $g(x)=x^2-4x+1$

مرتبطتين ارتباط بسيط لأن (G.C.D) لهما مساوي الوحدة.

ونعطي الآن بعض الخواص للارتباط البسيط بين كثيرات الحدود بدون برهان.

١ــ إذا كان $d(x) = (f(x), g(x))$ فإن كثيرات الحدود

$$g_1(x)=\frac{g(x)}{d(x)} \quad , f_1(x)=\frac{f(x)}{d(x)}$$

تكون مرتبطة ارتباط بسيط.

٢ــ إذا كانت كثيرة الحدود $\phi(x)$ مرتبطة ارتباط بسيط مع كل من $g(x),f(x)$ فإنها تكون مرتبطة ارتباط بسيط أيضاً مع كثيرة الحدود المكونة من حاصل ضرب $g(x), f(x)$.

٣ــ إذا كان حاصل ضرب كثيرات الحدود $g(x), f(x)$ يقبل القسمة بدون باقي على كثيرة الحدود $\phi(x)$ وكانت $\phi(x), f(x)$ مرتبطتين ارتباط بسيط فإن $g(x)$ تقبل القسمة على $\phi(x)$.

٤ــ وأخيراً إذا كانت كثيرة الحدود $f(x)$ تقبل القسمة على كل من كثيرات الحدود $g(x), \phi(x)$ المرتبطتين ارتباط بسيط فإن $f(x)$ تقبل القسمة على حاصل ضربهما.

وعموماً إذا كانت $d(x)$ هي كثيرة الحدود كقاسم مشترك أعظم لكثيرات الحدود $g(x), f(x)$ فإن

$$d(x) = f(x)\, u(x) + g(x)\, v(x) \tag{1}$$

حيث كل من $v(x), u(x)$ كثيرات حدود معلومة فإذا كانت $g(x), f(x)$ مرتبطتين ارتباط بسيط فإن $1 = f(x)\, u(x) + g(x)\, v(x)$

إذا كانت كثيرات الحدود $f(x)$, $g(x)$ غير صفرية فإنه يمكن اختيار $u(x)$ بحيث تكون درجتها أقل من درجة كثيرة الحدود $g(x)$ ودرجة $v(x)$ أقل من درجة $f(x)$ ولكي نعين كثيرات الحدود $u(x)$, $v(x)$ في العلاقة (I) نجد أنه من المناسب اعتبار كثيرات الحدود $f_1(x)=\frac{f(x)}{d(x)}$, $g_1(x)=\frac{g(x)}{d(x)}$ بدلا من $f(x)$, $g(x)$ في العلاقة (1).

ويجب أولاً اختيار $u(x)$, $v(x)$ بحيث تحقق العلاقة الآتية

$$1=f_1(x)\,u(x)+g_1(x)\,v(x) \tag{2}$$

<u>وهذا يمكن اجرائه كالتالي:</u> إذا كانت $f_1(x), g_1(x)$ كثيرات حدود من الدرجة الصفرية فإن $u(x)$, $v(x)$ تكون مرتبطة ارتباط بسيط فمثلاً إذا كان $g_1(x)=a\neq 0$ يمكن اختيار $u=0$, $v=\frac{1}{a}$ أما إذا كانت درجات كثيرات الحدود $f_1(x), g_1(x)$ موجبة. ففي هذه الحالة يجب اختيار $u(x)$, $v(x)$ ذات المعاملات الغير معلومة بحيث تكون درجة $u(x)$ أقل من درجة $g_1(x)$ ودرجة $v(x)$ أقل من درجة $f_1(x)$ ثم بمساوات الحدود في طرفي العلاقة (2) يمكننا الحصول على معاملات $u(x)$, $v(x)$.

والآن إذا ضربت طرفي العلاقة (2) في المقدار $d(x)$ نحصل على العلاقة (1) بنفس كثيرات الحدود $u(x)$, $v(x)$ كما في العلاقة (2) وبهذه الطريقة نحصل على $u(x)$ بحيث تكون درجتها أقل من الفرق بين درجتي كثيرات الحدود $g(x)$, $d(x)$ ودرجة $v(x)$ تكون أقل من الفرق بين درجتي $f(x)$, $d(x)$ (وذلك إذا كانت درجات هذه الفروق غير مساوية للصفر). بذلك يمكننا تعيين كثيرات الحدود $u(x)$, $v(x)$.

مثال (١١): اعتبر

$$f(x) = x^7 - 2x^6 - x^5 - 11x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 5x + 14 \ ,$$

$$g(x) = x^2 + x + 2$$

لهذه كثيرات الحدود نجد أن $d(x) = g(x)$ (G. C. D) ومن ثم فإن

$$u(x) = 0 \ , v(x) = 1$$

مثال (١٢): أعتبر

$$f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$g(x) = 3x^5 + 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

القاسم المشترك الأعظم $d(x)$ لكثيرات الحدود هذه هو

$$d(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

أي أن $f_1(x) = x^2 - 2x + 1 \ , g_1(x) = x^2 + x - 1$

والآن نكتب العلاقة (2) لكثيرات الحدود $g_1(x), f_1(x)$ على الصورة

$$1 = \left(x^2 - 2x + 1\right)\left(a x + b\right) + \left(x^2 + x - 1\right)\left(a_1 x + b_1\right)$$

بمساواة معاملات الطرفين نحصل على

$$a + a_1 = 0$$

$$b - 2a + b_1 + a_1 = 0$$

$$-2b + a + b_1 - a_1 = 0$$

$$b - b_1 = 0$$

ومنها نحصل على $a = 3, a_1 = -3, \ b = 5, b_1 = 4$

أي أن $d(x) = f(x)\,(3x + 5) + g(x)\,(-3x + 4)$

(٧.١.٧) جذور كثيرات الحدود:

إذا أعطينا كثيرات الحدود $f(x)$ وكانت قيمتها عند $x=c$ مساوية للصفر فإنه يقال أن العدد c هو جذر من جذور كثيرة الحدود وأن $f(x) = 0$ حيث $x=c$ وأي كثيرة حدود غير صفرية عواملها أي أعداد (حقيقية أو مركبة)، يوجد لها على الأقل جذر حقيقي أو مركب (النظرية الأساسية لجبر الأعداد المركبة).

نظرية (بدون برهان): لكثيرة الحدود $f(x)$ يوجد لها الجذر c إذا كان وكان فقط $f(x)$ تقبل القسمة على المقدار $x-c$ بدون باقي (هذه النظرية الأساسية في جبر كثيرات الحدود Fundamental theorem of algebra (البرهان خارج نطاق الدراسة).

وفي هذه الحالة نجد أن $f(x) = q(x)\,(x-c)$ حيث $q(x)$ خارج قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على المقدار $(x-c)$ وهي كثيرة حدود درجتها أقل من درجة كثيرة الحدود $f(x)$ بمقدار الوحدة.

حالات خاصة:

وإذا كانت كثيرة الحدود $f(x)$ تقبل القسمة على المقدار $(x-c)^2$ بدون باقي يقال أن لكثيرة الحدود هذه أن لها جذر مكرر c.

وعموماً إذا كانت $f(x)$ تقبل القسمة بدون باقي على المقدار $(x-c)^k$ ، $k \geq 1$ فإنه يقال لكثيرة الحدود $f(x)$ يوجد لها جذر c مكرر k من المرات. Equal or multiple or repeated roots وفي هذه الحالة $f(x)$ لا تقبل القسمة على المقدار $(x-c)^{k+1}$ وإلا كان الجذر c مكرر $k+1$ من المرات وهكذا.

ولكي نختبر كون العدد c جذر لكثيرة الحدود f(x) وعدد مرات تكـــراره، تتبـــع لذلك طريقة هورنر المعروفة :

مثال (١٣) : اختبر تكرار الجذر x = 4 بالنسبة لكثيرة الحدود

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x + 16$$

الحل: باستخدام طريقة هورنر نجد أن

	1	-7	9	8	16
4	1	-3	-3	-4	$\boxed{0}$
	1	1	1	$\boxed{0}$	
	1	5	21		
	1	9			

من ذلك يمكننا القول بأن العدد 4 هو جذر لكثيرة الحدود f(x) وهو مكرر مرتين.

تعريف: لأي كثيرة حدود f(x) العدد c يعتبر جذر مكرر لها k من المـــرات إذا كانت قيمة كثيرة الحدود هذه ومشتقاها المتتالية حتى الرتبة k-1 تكون مســـاوية للصفر عند $x = c$, $f^{(k)}(c) \neq 0$ وحيث أن المشتقات المتتالية لأي كثيرة حدود من درجة n ما هي إلا كثيرات حدود درجاها تتناقص بالتدريج بمقدار الوحدة فـــإن الجذر المكرر k من المرات لكثيرة الحدود f(x) يكون مكرر k-1 مـــن المـــرات لمشتقاها الأولى f′(x) ومكرر k-2 من المرات لمشتقاها الثانية f″(x) ... وهكذا.

ومن ثم إذا كانت d(x) هي كثيرة الحدود والقاسم المشترك الأعظم لكثـيرة الحدود f(x) ومشتقاها الأولى f′(x) فإن كثيرة الحدود $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{d(x)}$ يكون لهـــا نفس الجذر المكرر لكثيرة الحدود f(x) ولكنه جذر واحد غير مكرر.

جميع هذه الحقائق السابقة تسمح لنا بالحصول على الجذور المختلفـــة لأي

كثيرة حدود وذلك بالحصول على جذور كثيرة الحدود $\phi(x)$ المناظرة لها والتي درجتها أقل من درجة $f(x)$ وذلك إذا كانت $d(x)$ ليست كثيرة حدود صفرية.

مثال (١٤) : نعتبر كثيرة الحدود $f(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 45x^2 - 108$

الحل: $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 15x^2 + 90x$

والقاسم المشترك الأعلى لكل من $f(x), f'(x)$ هو $d(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

ومن ثم فإن $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{d(x)} = x^2 - x - 6$ وجذورها هي $x_1 = -2,\ x_2 = 3$

والتي هي نفسها جذور لكثيرة الحدود الأصلية $f(x)$ غير أنها جذور مكررة ويمكننا تحديد هذا **التكرار باستخدام طريقة هورنر.**

والآن نبين طريقة أخرى باستخدامها يمكننا تعيين جذور أي كثيرة حدود $f(x)$ وعدد تكرار كل جذر منها.

نفرض أن $d_1(x)$ هو (G. C. D) لكثيرات الحدود $f(x), f'(x)$

$d_2(x)$ هو (G. C. D) لكثيرات الحدود $d_1(x), d_1'(x)$

$d_3(x)$ هو (G. C. D) لكثيرات الحدود $d_2(x), d_2'(x)$ وهكذا.

ثم بوضع $v_1(x) = \dfrac{f(x)}{d_1(x)},\ v_2(x) = \dfrac{d_1(x)}{d_2(x)}, \ldots, v_s(x) = \dfrac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}$

وإذا فرضنا في النهاية $F_1(x) = \dfrac{v_1(x)}{v_2(x)},\ F_2(x) = \dfrac{v_2(x)}{v_3(x)}, \ldots, F_s(x) = v_s(x)$

فإن لكثيرات الحدود $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_s(x)$ يوجد لها جذور بسيطة غير مكررة.

وأن جميع جذور كثيرة الحدود $F_1(x)$ هي أيضاً جذور بسيطة لكثيرة الحدود $f(x)$ وجذور كثيرة الحدود $F_2(x)$ هي الجذور المكررة مرتين لكثيرة الحدود $f(x)$ ...

وجذور كثيرة الحدود $F_s(x)$ هي الجذور المكررة s من المرات لكثيرة الحدود $f(x)$ وأن لكثيرة الحدود $f(x)$ لا يوجد لها جذور مكررة أكثر من s مرة.

مثال (١٥) : أوجد الجذور المكررة للمعادلة

$$f(x)=x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8=0$$

الحل:

$$f'(x)=5x^4+24x^3+39x^2+28x+12,$$
$$d_1(x)=x^2+4x,\ d_2(x)=x+2,\ d_3(x)=1$$
$$v_1(x)=x^3+2x^2+x+2,\ v_2(x)=x+2,\ v_3(x)=x+2$$
$$F_1(x)=x^2+1,\ F_2(x)=1,\ F_3(x)=x+2$$

ومن ثم فإن لكثيرة الحدود المعطاه يكون لها الجذور البسيطة $\pm i$ والجذر -2 مكرر ثلاث مرات.

مثال (١٦) : أوجد جذور المعادلة $x^4-2x^3-11x^2+12x+26=0$

إذا علم أن لها جذور مكررة.

الحل : نفرض أن

$$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x+36$$
$$f'(x)=4x^3-6x^2-22x+12=2\left(2x^3-3x^2-11x+16\right)$$

$$= 2\left(2x^2(x-3) + (3x-2)(x-3)\right)$$
$$= 2\left((x-3)(2x^2+3x-2)\right) = 2\left((x-3)(2x-1)(x+2)\right)$$

أي أن جذور المعادلة $f'(x) = 0$ هي $x = 3, \quad x = \frac{1}{2}, x = -2$

فإذا كانت المعادلة $f(x) = 0$ لها جذور مكررة فهذا الجذر المكرر هو أحد الجذور $3, \frac{1}{2}, -2$ نختبر هذه الجذور بالنسبة للمعادلة $f(x) = 0$ فنجد أن

$$f'(3) = 0 \text{ ، } f'(-2) = 0$$

أي أن الجذر 3 هو جذر مكرر للمعادلة $f(x)$ كذلك الجذر 2- هو جذر مكرر لها وحيث أن المعادلة $f(x)$ هي معادلة من الدرجة الرابعة فإن جذورها هي

$$-2, -2, 3, 3$$

<u>نظرية (بدون برهان):</u> في كثيرة الحدود ذات المعاملات الحقيقية الجذور المركبة $\alpha + i\beta$ تحدث مترافقة.

<u>مثال (١٧)</u> : أوجد جذور المعادلة $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$

إذا علم أن أحد جذورها هو $1 + 2i$

<u>الحل:</u> باستخدام النظرية السابقة نجد أن الجذور المركبة عادة تحدث مترافقة فإن $1 - 2i$ يكون جذر للمعادلة المعطاة بفرض أن $1 + 2i$ جذر لها ومن ثم فإن $f(x) =$ $(x-1-2i)\,(x-1+2i)\,\phi(x)$ حيث $\phi(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

لأن المعادلة المعطاة هي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة أي يجب أن يكون لها أربعة جذور، كما أن $\phi(x)$ هي القاسم المشترك الأعظم لكثيرة الحدود $f(x)$ والمقدار

$$(x-1-2i)(x-1+2i)=(x-1)^2-(2i)^2$$
$$=(x-1)^2+4=x^2-2x+5$$

وحيث أن

$$f(x)=x^4-2x^3+4x^2+2x-5=x^4-2x^3+5x^2-x^2+2x-5$$
$$=x^2\left(x^2-2x+5\right)-\left(x^2-2x+5\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-2x+5\right)$$

أي أن $\phi(x)=x^2-1$

ومن ثم فإن جذور المعادلة المعطاة هي $1+2i\,,\,1-2i\,,\,1\,,\,-1$

<u>نتائج هامة :</u>

١ــ بما أن $\alpha+i\beta$ جذر للمعادلة $f(x)$ فإن $\alpha-i\beta$ جذر أخر. إذن العدد الكلي للجذور المركبة في أي معادلة ذات معاملات حقيقية يجب أن يكون زوجي.

إذن أي معادلة ذات درجة فردية يجب أن تحتوي على الأقل جذر حقيقي واحد.

٢ــ إذا كان $\alpha+i\beta\,,\,\beta\neq 0$ جذر مكرر k من المرات فإن $\alpha-i\beta$ جذر مكرر k من المرات للمعادلة $f(x)=0$ ذات المعاملات الحقيقية.

<u>نظرية (بدون برهان):</u> في المعادلة $f(x)$ ذات المعاملات التي تنتمي لمجموعة الأعداد القياسية Rational numbers ولها جذر في صورة عدد غير قياسي irrational root $\alpha+\sqrt{\beta}$ حيث α,β أعداد قياسية، $\beta>0$, β ليست مربع عدد قياسي فإن المعادلة لها جذر مرافق في صورة عدد غير قياسي على الصورة $\alpha-\sqrt{\beta}$.

<u>مثال (١٨):</u> أوجد معادلة ذات أصغر درجة والتي لها معاملات حقيقية ولها الجذران $1+2i,\ 3-i$.

الحل: بما أن $3+i, 1-2i$ جذور للمعادلة المطلوبة. إذن $3-i, 1+2i$ جذور لها أيضاً.

إذن المعادلة المناظرة هي $(x-1-2i)(x-1+2i)(x-3+i)(x-3-i)=0$

أو $x^4-8x^3+27x^2-50x+50=0$

مثال (١٩): كون المعادلة ذات المعاملات القياسية والتي لها جذر $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

الحل: بما أن جذر $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ فإن $-\sqrt{2}+\sqrt{3}, -\sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{2}-\sqrt{3}$ جذور أيضاً للمعادلة المطلوبة. إذن المعادلة المطلوبة هي

$$\left(x-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=0$$

أو $x^4-10x^2+1=0$

حل آخر: نفرض أن $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$، إذن $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ وبالتربيع نحصل على $\left(x-\sqrt{2}\right)^2=3$ أو $x^2-2\sqrt{2}+2=3$ أو $x^2-1=2\sqrt{2}\,x$ وبالتربيع نحصل على $\left(x^2-1\right)^2=8x^2$ أو $x^4-10x^2+1=0$

مثال (٢٠): أوجد جذور المعادلة $f(x)=x^4+x^3-25x^2+41x+66=0$ إذا علم أن لها جذر $3+i\sqrt{2}$.

الحل: بما أن $3+i\sqrt{2}$ جذر، إذن $3-i\sqrt{2}$ جذر.

إذن $x-3-i\sqrt{2}\ ,\ x-3+i\sqrt{2}$ عوامل للمعادلة المعطاة وكذلك فإن حاصل ضربهم عامل أيضاً أي أن $f(x)=\left(x-3+i\sqrt{2}\right)\left(x-3-i\sqrt{2}\right)q(x)$ حيث $q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

إذن $f(x)=\left(x^2-6x+11\right)q(x)$ ، باقي جذور المعادلة $f(x)$ يعطى من $q(x)$، $q(x)$ نحصل عليه بالقسمة الاقليدية لكثيرة الحدود $f(x)$ على $x^2-6x+11$ ومنها تكون

$$q(x)=x^2+7x+6$$

وعليه فإن جذور المعادلة $q(x)=x^2+7x+6=(x+6)(x+1)=0$

هي $x=-6\ ,\ x=-1$

إذن الجذور هي $-1,-6,3+i\sqrt{2},3-i\sqrt{2}$

مثال (٢١) : إذا كان $1,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ هي جذور المعادلة $x^5-1=0$ أثبت أن

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=5$$

الحل: بما أن $1,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ هي جذور للمعادلة $x^5-1=0$ فإن

$x-1,x-\alpha,x-\beta,x-\gamma,x-\delta$ عوامل لكثيرة الحدود x^5-1 إذن

$$x^5-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

بالقسمة على $x-1$ فإن $x^4+x^3+x^2+1=\dfrac{x^5-1}{x-1}$

أي أن

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) \qquad (*)$$

وهي صالحة لجميع قيم x ، بوضع $x=1$ في (*) نحصل على المطلوب.

(٢.٧) العلاقات بين معاملات كثيرة الحدود وجذورها المختلفة:ـــ

The relation between the roots and coefficients of a general polynomials equation

أعتبر $x_1,x_2,\dots,x_n$ هي جذور المعادلة المناظرة لكثيرة الحدود

$$f(x)=a_o\,x^n+a_1\,x^{n-1}+\dots+a_n\ ,\ a_o\neq 0$$

فإن العلاقــة بين الجــذور $x_1, x_2, ..., x_n$ للمعادلــة $f(x) = 0$ والمعــاملات $a_o, a_1, ..., a_n$ هي كالآتي

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_1}{a_o},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_1 x_n + x_{23} + ... = \sum_{i \neq j} x_i x_j = \frac{a_2}{a_o},$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k = -\frac{a_3}{a_o},$$

...

$$x_1 x_2 x_3 ... x_{n-1} + x_1 x_2 ... x_{n-2} x_n + ... + x_2 x_3 ... x_n = (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{a_o},$$

$$x_1 x_2 ... x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_o}$$

أي أن مجموع الجذور يساوي خارج قسمة معامل x^{n-1} على معامل x^n تســبقه إشارة سالبة.

مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى يساوي خارج قسمة معامل x^{n-2} علــى معامل x^n.

مجموع حاصل ضرب الجذور ثلاثاً ثلاثاً يساوي خارج قسمة معامل x^{n-3} علــى معامل x^n تسبقه إشارة سالبة ... وهكذا.

حاصل ضرب الجذور جميعها يساوي خارج قسمة الحد المطلق على معــامل x^n تسبقه الإشارة $(-1)^n$.

وعموماً يمكننا كتابة العلاقة الآتية الصحيحة لجميع k الممكنة

$$\sigma_k = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_k} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} ... x_{i_k} = (-1)^i \frac{a_k}{a_o}, k = 1, 2, ..., n$$

أي أن $\sigma_1 = -\frac{a_1}{a_o}\ , \sigma_2 = \frac{a_2}{a_o}, \dots, \sigma_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_o}, \dots, \sigma_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_o}$

ومن ثم فإن المعادلة من الدرجة النونية (كثيرة الحدود النونيـــة) والــتي جذورهــا $x_1, x_2, \dots, x_n$ تأخذ في النهاية الصورة

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = 0 \qquad (*)$$

مثال (١): إذا كانت $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي جذور كثيرة الحدود الصفرية

$$f(x) = 0$$

أوجد $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}\ , \sum_{i=1}^{n} x_i\, x_j^{-2}\ , \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ , \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, x_j$

الحل: إذا اعتبرنا مربع مجموع جذور هذه المعادلة أي

$$\sigma_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i \neq j}^{n} x_i\, x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\,\sigma_2$$

ومنها نحصل على $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_1^2 - 2\,\sigma_2$

ولكن $\sigma_2 = \frac{a_2}{a_o}$, $\sigma_1 = -\frac{a_1}{a_o}$ أي أن $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{a_1^2 - 2\,a_o\,a_2}{a_o^2}$

ثانياً:

$$\sigma_1\,\sigma_2 = \left(\sum x_i\right)\left(\sum_{i \neq j} x_i\, x_j\right)$$
$$= \left(x_1 + x_2 + \dots x_n\right)\left(x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + \dots + x_{n-1}\, x_n\right)$$
$$= x_1\left(x_1\, x_2 + x_1\, x_3 + \dots + x_1\, x_n + x_2\, x_3 + x_2\, x_4 + x_{n-1} x_n\right)$$
$$+ x_2\,(\dots) + x_3\,(\dots) + x_n\,(\dots).$$

$$= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 \dots x_1^2 x_n + (x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots) + \dots$$
$$+ x_1 x_{n-1} x_n + (x_1 x_2^2 + \dots x_1 x_2 x_n) + (x_3^2 x_3 + \dots)$$
$$+ x_2 x_{n-1} x_n + \dots$$

....

$$+ (x_n x_1 x_2 + x_n x_1 x_3 \dots x_1 x_n^2) + (x_n x_2 x_3 + \dots + x_2 x_n^2) + \dots x_{n-1} x_n^2$$
$$= \sum x_i^2 x_j + 3 \sum x_i x_j x_2$$
$$= \sum x_i^2 x_j + 3\sigma_3$$

أي أن

$$\sum x_i^2 x_j = \sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_3$$
$$= -\frac{a_1}{a_o} . \frac{a_2}{a_o} + 3\frac{a_3}{a_o} = -\frac{a_1 a_2}{a_o^2} + 3\frac{a_3}{a_o}$$

<u>ثالثاً:</u> للحصول على $\sum \frac{1}{x_i^2}$ نلاحظ أنه إذا أردنا الحصول على المعادلة التي جذورها هي مقلوبات جذور المعادلة $f(x)$ نستخدم التعويض $\frac{1}{x}$ بدلاً من x في هذه المعادلة ونحصل على : $\frac{a_o}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0$

أو $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_o = 0$

باستخدام العلاقة بين المعاملات والجذور نجد أن $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^2} = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}$

<u>وأخيراً للحصول على</u> $\sum x_i x_j^2$

نجد أن $\left(\sum x_i\right)\left(\sum \frac{1}{x_j^2}\right) = \left(\sum \frac{1}{x_i}\right) + \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j^2}$ ومنها نحصل على

$$\sum \frac{x_i}{x_j^2} = \sum x_i\, x_j^{-2} = \left(\sum x_i\right)\left(\sum \frac{1}{x_j^2}\right) - \sum \frac{1}{x_i}$$

$$= \left(-\frac{a_1}{a_o}\right)\left(\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}\right) + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$= \frac{1}{a_o\, a_n^2}\left(2\, a_{n-2}\, a_n\, a_1 - a_{n-1}\, 2\, a_1 + a_n\, a_{n-1}\, a_o\right)$$

حالات خاصة :

١ــ إذا كان α, β جذور للمعادلة $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ فإن

$$\sigma_1 = \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \sigma_2 = \alpha\,\beta = \frac{c}{a}$$

٢ــ إذا كان α, β, γ جذور للمعادلة $a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$ فإن

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a},\ \sigma_2 = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma + \beta\,\gamma = \frac{c}{a},$$

$$\sigma_3 = \alpha\,\beta\,\gamma = -\frac{d}{a}$$

ملاحظة: أحياناً من المناسب كتابة $\sigma_2 = \alpha\,(\beta + \gamma) + \beta\,\gamma$

٣ــ إذا كان $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ هي جذور للمعادلـــة $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

فإن

$$\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}\ ,$$

$$\sigma_2 = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma + \alpha\,\delta + \beta\,\gamma + \beta\,\delta + \gamma\,\delta = \frac{c}{a}$$

$$\sigma_3 = \alpha\,\beta\,\gamma + \alpha\,\beta\,\delta + \alpha\gamma\,\delta + \beta\,\gamma\,\delta = -\frac{d}{a}$$

$$\sigma_4 = \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = \frac{e}{a}$$

ملاحظة: أحياناً من المناسب كتابة

$$\sigma_2=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\,\beta+\gamma\,\delta$$ أو
$$\sigma_2=\alpha\,\beta\,(\gamma+\delta)+\gamma\,\delta\,(\alpha+\beta)$$

٤ـ إذا كانت ثلاث جذور في توالي عددي Arithmetic progression فإنها تأخذ الصورة $\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta$

٥ـ إذا كانت أربع جذور في توالي عددي فإننا نأخذها بهذا الشكل

$$\alpha-3\beta,\alpha-\beta,\alpha+\beta,\alpha+3\beta$$

٦ـ إذا كان ثلاث جذور في توالي هندسي Geometric Progression فإننا نكتبها على الصورة $\frac{\alpha}{\beta},\alpha,\alpha\,\beta$

٧ـ إذا كانت أربع جذور في توالي هندسي فيكون لها الصورة $\frac{\alpha}{\beta^2},\frac{\alpha}{\beta},\alpha\;\alpha\beta$

مثال (٢): أوجد جذور المعادلة $f(x)=x^3-5x^2-16x+80=0$ إذا علم أن مجموع جذرين لها يساوي صفر.

الحل: نفرض أن الجذور هي α,β,γ فإن $\beta+\gamma=0$ ومن العلاقات التي تربط بين المعاملات والجذور نجد أن $\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma=5$

إذن $\alpha=5$ ومنها يكون $x-5$ عامل من عوامل $f(x)$ وبقسمة $f(x)$ على $x-5$ بطريقة هورنر نحصل على $x^2=16$ إذن الجذور هي 5 ,4- ,4.

مثال (٣) : أوجد جذور المعادلة $x^3-9x^2+23x-15=0$ إذا علم أن الجذور في توالي عددي.

الحل: نفرض أن الجذور هي $\alpha-\beta, \alpha, \alpha+\beta$

$$\therefore \quad \sigma_1 = \alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = 9$$

إذن $\alpha = 3$، وبالقسمة على x-3 نحصل على باقي الجذور وهي 1, 5 أي أن جذور المعادلة المعطاة هي 1, 3, 5.

مثال (٤) : أوجد جذور المعادلة $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$ إذا علم أن لها جذر مكرر مرتين.

الحل: نفرض أن جذور المعادلة هي α, α, β ومن المعادلة يكون $\sigma_1 = \frac{9}{2}$ ومنها

$$2\alpha + \beta = \frac{9}{2} \qquad (1)$$

$$\sigma_2 = \frac{12}{2} \text{ ومنها } \qquad \alpha^2 + 2\alpha\beta = 6 \qquad (2)$$

$$\sigma_3 = \frac{4}{2} \text{ ومنها } \qquad \alpha^2\beta = 2 \qquad (3)$$

بحل المعادلات (3) ,(2) ,(1) آنياً نحصل على الجذور $2, 2, \frac{1}{2}$

تحويل المعادلات Transformations of equations

١ـــ أحياناً يلزم معرفة جذور معادلة ما ترتبط بجذور المعادلة

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^{n-r} = 0 \qquad (1)$$

فمثلاً المعادلة التي لها جذور تختلف في الإشارة عن جذور المعادلة (1) نحصل عليها بوضع y=-x أو x= -y، إذن $f(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r (-x)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} a_r x^{n-r} = 0$

٢ـــ المعادلة التي جذورها تساوي مضاعفات جذور المعادلة (1). نفرض

أن $y = m\,x$ أو $x = \frac{y}{m}$

$$\therefore f\left(\frac{y}{n}\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r \left(\frac{y}{n}\right)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} m^{r-n}\, a_r\, y^{n-r}$$

$$= a_o\, y^n + m\, a_1\, y^{n-1} + m^2\, a_2\, y^{n-2} + \ldots + m^n\, a_n = 0$$

٣ــ المعادلة التي جذورها تساوي مقلوبات جذور المعادلة (1) نحصل عليها بالتعويض $y = \frac{1}{x}$ أو $x = \frac{1}{y}$ إذن

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r \left(\frac{1}{y}\right)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} a_r\, y^{r-n}$$

$$= a_o + a_1\, y + a_2\, y^2 + \ldots + a_{n-1}\, y^{n-1} + a_n\, y^n = 0$$

٤ــ المعادلة التي جذورها تقل بمقدار h عن جذور المعادلة (1) نحصل عليها بالتعويض $y = x - h$ أي كتابة المعادلة (1) بدلالة قوى x-h كما سبق أن عرفناه باستخدام طريقة هورنر على الصورة $f(x) = b_o\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ حيث $b_o, b_1, \ldots, b_n$ نحصل عليها بقسمة f(x) في (1) على x-h عدد n من المرات بطريقة هورنر (انظر مثال (٥) في (٤.١)).

٥ــ التحويل الموجود في (4) يستخدم في حذف الحد الثاني (معامل x^{n-1} يساوي صفر) من المعادلة $f(x) = 0$ وذلك بوضع $x = y + h$ تصبح المعادلة على الصورة

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, (y + h)^{n-r} = 0$$

لحذف الحد الثاني أي نضع y^{n-1} يساوي صفراً بعد فك الحدود والتجميع نجد أن معامل y^{n-1} هو $a_1 + n\,h\,a_o = 0$ ، $\therefore\ h = -\frac{a_1}{n\,a_o}$

إذن المعادلة الخالية من الحد الثاني هي المعادلة التي جذورها تقل بمقدار $-\frac{a_1}{n\,a_o}$ عن جذور المعادلة الأصلية.

مثال (٥): احذف الحد الثاني من المعادلة $x^3 + 6x^2 - 7x - 4 = 0$

الحل: يجب إنقاص جذور المعادلة المعطاة بمقدار

$$h = -\frac{a_1}{n\,a_o} \quad , n = 3 , a_1 = 6 , h = -2$$

وباتباع طريقة هورنر أي بالقسمة على $x+2 = x - (-2)$ ثلاث مرات ونحصل على المعادلة المطلوبة $x^3 - 11x + 26 = 0$

مثال (٦) : احذف الحد الثاني من المعادلة $x^4 - 8x^3 + x^2 - x + 3 = 0$

الحل: لحذف الحد الثاني من المعادلة المعطاة يكافئ الحصول على معادلة جذورها تنقص بمقدار $h = -\frac{a_1}{n\,a_o} = 2$، أي بقسمة المعادلة المعطاة على المقدار $x-2$ أربع مرات بطريقة هورنر ونحصل على $x^4 - 23x^2 - 61x - 43 = 0$

(٣.٧) حل معادلات الدرجة الثالثة : Cubic equation

نعتبر معادلة الدرجة الثالثة العامة $a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$

طريقة كاردان Cardan's method: تتلخص طريقة كاردان في حل معادلات الدرجة الثالثة في التالي

(i) نجعل معامل أكبر أس هو الوحدة وذلك بالقسمة على a_o حيث أنها لا تساوي الصفر ومن ثم نحصل على المعادلة

$$x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0 \qquad (1)$$

نلاشي الحد الثاني من هذه المعادلة وذلك بتكوين المعادلة ذات الدرجة الثالثة التي جذورها تنقص بمقدار $\frac{b_1}{3}$ عن جذور المعادلة الأصلية (1) وبمعنى آخر نكون المعادلة التي جذورها هي $x_1 - \frac{b_1}{3}, x_2 - \frac{b_1}{3}, x_3 - \frac{b_1}{3}$

حيث x_1 , x_2 , x_3 هي جذور المعادلة (1) ــ وهذا نحصل عليه باستخدام طريقة هورنر المعروفة.

نفرض أن المعادلة التي حصلنا عليها هي

$$y^3 + p y + q = 0 \qquad (2)$$

(ii) نستخدم التعويض $y = L + m$ وبالتكعيب نحصل على

$$\begin{aligned} y^3 &= L^3 + 3 L^2 m + 3 L m^2 + m^3 \\ &= L^3 + m^3 + 3 L m (L + m) = \left(L^3 + m^3\right) + 3 L m y \end{aligned}$$

أي أن

$$y^3 - 3 L m y - \left(L^3 + m^3\right) = 0 \qquad (3)$$

بمقارنة المعادلات (2), (3) نحصل على

$$p = - 3 L m \qquad (4)$$

$$q = -\left(L^3 + m^3\right) \qquad (5)$$

من (4) نجد أن $L = - \frac{p}{3 m}$ أو ما يكافئ $L^3 = - \frac{p^3}{27 m^3}$

بالتعويض في (5) نحصل على $- q = L^3 - \frac{p^3}{27 L^3}$ أو ما يكافئ $- q L^3 = L^6 - \frac{p^3}{27}$

بوضع $s = L^3$ نحصل على :

$$s^2 + q s - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (6)$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في s جذورها تعطى بالعلاقات الآتية :

$$s=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^{2}}{4}+\frac{p^{3}}{27}}\quad,\quad =-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}$$

أي أن

$$s_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}\ ,\ s_2=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}$$

وإذا اعتبرنـــا الجذور التكعيبية لهذه القيم نحصل على ثلاث قيم جذرية للجـــذر s_1

هي $L_1\,,L_2,L_3$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}}$$

وثلاث قيم جذرية للجذر الثاني m_1,m_2,m_3

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^{2}+\left(\frac{p}{3}\right)^{3}}}$$

ومن ثم تكون جذور المعادلة (2) في الصورة $L_i+m_j\ \ ,i,j=1,2,3$

ويكون اختيارنا للقيم L_i,m_j بحيث تحقق العلاقـــة (4) أي حـــاصل الضـــرب

$L_i\,m_j$ يساوي $-\frac{p}{3}$ وهذا يمكن إيجاده بسهولة.

(iii) وأخيراً إذا كانت y_1,y_2,y_3 هي جذور المعادلة (2) فإن جذور المعادلـة (1)

هي $y_1-\frac{b_1}{3},y_2-\frac{b_1}{3},y_3-\frac{b_1}{3}$

مثال (١): أوجد جذور المعادلة $x^3+3x^2-6x+20=0$

<u>الحل:</u> باستخدام طريقة هورنر يمكننا الحصول على مفكوك لكثيرة الحدود هذه بدلالة الفرق x-1 كالآتي :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -6 & 20 \\ \hline -1 & 1 & 2 & -8 & 25 \\ & 1 & 1 & -9 & \\ & 1 & 0 & & \\ & 1 & & & \end{array} \qquad b_1 = 3$$

وتكون المعادلة هي $y^3 - 9y + 28 = 0$ حيث $p = -9, q = 28$

نكون المقدارين

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}} = \sqrt[3]{-1}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}} = \sqrt[3]{-27} = 3\sqrt[3]{-1}$$

جذور المقدار الأول هي $-1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

والجذور المناظرة للمقدار الثاني هي $-3, \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

والجذور المناظرة التي حاصل ضربها يساوي 3 هي $-1, -3$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

أي أن جذور المعادلة $y^3 - 9y + 28 = 0$ هي $-4, 2-\sqrt{3}i, 2+\sqrt{3}i$

ومن ثم فإن جذور المعادلة المعطاة تكون $-5, 1-\sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i$

مثال (٢) : أوجد جذور المعادلة $x^3 - 3x - 2i = 0$

الحل: في هذه المعادلة نلاحظ أن الحد الثاني الذي يحتوي x^2 أساساً غير موجود ـــ

كما نلاحظ أن $p = 3 , q = -2i$

$$\therefore \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = i^2 + 1 = 0$$

ومن ثم فإن جذور المعادلة هي $i, i, -2i$

إذا كانت معاملات المعادلة المعطاة من الدرجة الثالثة جميعها حقيقية يمكننا الحصول على جذور هذه المعادلة دون اللجوء إلى استخدام صيغ كاردان كالآتي:

(حالات خاصة):

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

فإن جميع جذور المعادلة $y^3 + py + q = 0$ حقيقية وتعطى من العلاقة الآتية :

$$y_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\phi + 2\pi k}{3} \quad , k = 1, 2, 3$$

حيث ϕ تعطى من العلاقة $\cos\phi = -\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}$

مثال (٣): أوجد جذور المعادلة $y^3 - 3y + = 0$

الحل: نلاحظ هنا أن $D = \frac{1}{4} - 1 < 0$ ، إذن $\cos\phi = -\frac{1}{2}\sqrt{1} = -\frac{1}{2}$ أي أن $\phi = \frac{2}{3}\pi$

ومن ثم فإن الجذور هي $y_k = 2\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{3} \quad , k = 1, 2, 3$ ، أي

$$y_1 = 2\cos 160^\circ \cong -1,880 \,,\, y_2 = 2\cos 280^\circ \cong 0,348,$$
$$y_3 = 2\cos 40^\circ \cong 1,532$$

الحالة الثانية: إذا كان $D > 0$ فإن للمعادلة $y^3 + p\,y + q = 0$ يكون جـــذر حقيقي واحد وجذران مترافقان. وهذه الجذور تعطى بالعلاقات الآتية :

$$y_1 = -\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\phi} \,,\; y_{2,3} = \frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2\phi} + i\sqrt{-p}\cot an\, 2\phi$$

حيث $\sin w = \frac{2}{q}\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\tan \rho = \sqrt[3]{\tan \frac{w}{2}}$

وذلك إذا كانت $p < q$ ،

$$y_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot an\, 2\phi \,,\, y_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\cot an\, 2\phi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\phi}$$

حيث $\tan w = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$, $\tan \phi = \sqrt[3]{\tan \frac{w}{2}}$ وذلك إذا كانت $p > 0$.

<u>مثال (٤) :</u> حل المعادلة $y^3 - 9y + 12 = 0$

<u>الحل :</u> $D = 36 - 27 > 0 \,,\, p = -9 < 0$

ومن ثم نجد أن :

$$\sin w = \frac{2}{12}\sqrt{33} = \frac{\sqrt{3}}{2} \,,\, w = 60^\circ$$
$$\tan \phi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 30^\circ} \cong 0,833,\; \phi \cong 39^\circ\, 50.$$
$$\sin 2\phi \cong 0,984,\;\; \cot an\, 2\phi \cong 0,182$$

أي أن :

$$y_1 \cong -\frac{2\sqrt{3}}{0,984} \cong -3,52 \,,\, y_{2,3} \cong \frac{\sqrt{3}}{0,984} \pm i.3.0,182 \cong 1,76 \pm 0,546i$$

والحالة الثالثة: إذا كانت $D=0$ فإن للمعادلة المعطاة تكون جميع الجذور حقيقية بحيث يكون جذران منهم منطبقان.

(٤.٧) حل معادلات الدرجة الرابعة Bi-quadratic equation

اعتبر المعادلة من الدرجة الرابعة

$$x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0 \tag{1}$$

وذلك بعد القسمة على معامل x^4.

طريقة فيراري Ferrari's method: لحل معادلات من الدرجة الرابعة تتلخص في الآتي :

نكتب المعادلة (1) في الصورة $x^4 + b_1 x^3 = -(b_2 x^2 + b_3 x + b_4)$

ندخل العدد m على طرفي هذه العلاقة كالآتي :

$$\left(x^2 + \frac{b_1}{2} x + m\right)^2 = -(b_2 x^2 + b_3 x + b_4) + \frac{b_1^2}{4} x^2 + $$
$$+ 2x^2 m + b_1 x m + m^2$$
$$= \left(2m - b_2 + \frac{b_1^2}{4}\right) x^2 + (b_1 m - b_3) x + m^2 - b_4$$
$$= a^2 x^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2 \tag{2}$$

حيث

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 2m - b_2 + \dfrac{b_1^2}{4}, \\ b^2 = m^2 - b_4,\ 2ab = b_1 m - b_3 \end{array}\right\} \tag{3}$$

من المعادلات (3) نظراً لأن $(ab)^2 = a^2 b^2$ نحصل على

$$\frac{1}{4}(b_1 m - b_3)^2 = \left(2m - b_2 + \frac{b_1^2}{4}\right)(m^2 - b_4) \tag{4}$$

ولكن بالنظر إلى هذه المعادلة نلاحظ أنها معادلة من الدرجة الثالثة في m وذلك باعتبار أن b_1, b_2, b_3 ثوابت ــ ويمكننا الحصول على حل هذه المعادلة باستخدام طريقة كاردان أو بأي طريقة أخرى ثم بالتعويض عن قيمة أي جذر من جذور هذه المعادلة في (3) نحصل على قيم a, b المناظرة.

ثم أخيراً بالتعويض عن قيم a, b في المعادلة (2) بعد أخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على معادلتين كل منهم من الدرجة الثانية في x.

بحل كل معادلة على حده نحصل على جذرين لها ــ مجموعة هذه الجذور الأربعة تمثل جذور المعادلة المعطاة (1).

مثال (١) : حل المعادلة الآتية $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0$

الحل : نضع المعادلة المعطاة في الصورة $x^4 + 4x^3 = 6x^2 - 20x - 8$

$$\begin{aligned}(m + x^2 + 2x)^3 &= 6x^2 - 20x - 8 + 4x^2 + 2mx^2 + 4mx^2 + m^2 \\ &= 10x^2 + 2mx^2 - 20x + 4mx + m^2 - \\ &= 2(5+m)x^2 - 4(m-5)x + m^2 - 8 \\ &= a^2x^2 + 2abx + b^2\end{aligned}$$

أي أن $a^2 = 2(5+m),\ b^2 = m^2 - 8,\ 2ab = -4(m-5)$

ومنها نحصل على $(5+m)(m^2 - 8) = 2(m-5)^2$

أي أن (*) $m^3 + 3m^2 + 12m - 90 = 0$

والآن لحل هذه المعادلة من الدرجة الثالثة نلاحظ أن الحد المطلق يساوي حاصل ضرب الجذور الثلاثة. فمثلاً العامل 3 هو أحد عوامل العدد 90- لذلك نختبر الجذر 3 بالنسبة لهذه المعادلة فنجد أن

	1	3	12	-90
3	1	6	30	$\boxed{0}$

أي أن العدد 3 هو جذر للمعادلة (*) ومن ثم بالتعويض عن قيمة هذا الجذر في المعادلة $\left(x^2+2x+m\right)^2=2(5+m)x^2-4(m-5)x+m^2-8$

نحصل على $\left(x^2+2x+3\right)^2=16x^2+8x+1=(4x+1)^2$

ومنها نحصل على $x^2+2x+3=4x+1,\ x^2+2x+3=-4x-1$

أي أن $x^2-2x+2=0,\ x^2+6x+4=0$

بحل هذه المعادلات من الدرجة الثانية نحصل على الجذور الأربعة للمعادلة المعطاة وهي $x_{1,2}=1\pm i\ \ ,\ \ x_{2,3}=-3\pm\sqrt{5}$

<u>مثال (٢):</u> أوجد جذور المعادلة $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ بطريقة فراري.

<u>الحل:</u> من المعادلة المعطاة نحصل على $x^4-10x^3=-35x^2+50x-24$

بإكمال المربع نجد أن

$$\left(x^2-5x\right)^2=-10x^2+50x-24 \qquad (1)$$

أو $\left(x^2-5x+\lambda\right)^2=\left(x^2-5x\right)^2+2\lambda\left(x^2-5x\right)+\lambda^2$

ومن (1) نحصل على

$$\left(x^2-5x+\lambda\right)^2=(2\lambda-10)x^2+(50-10\lambda)x+\lambda^2-24 \qquad (2)$$

نختار λ بحيث يكون الطرف الأيمن في (2) مقدار مربع أي المميز للطرف الأيمن يساوي صفر، إذن

$$(50-10\lambda)^2-4(2\lambda-10)\left(\lambda^2-24\right)=0 \qquad (*)$$

واضح أن $\lambda = 5$ أحد جذور المعادلة (*).

بوضع $\lambda = 5$ في (2) نحصل على $\left(x^2 - 5x + 5\right)^2 = 1$

إذن $x^2 - 5x + 5 = \pm 1$ أو ما يكافئ $x^2 - 5x + 6 = 0$ or $x^2 - 5x + 4 = 0$

والجذور هي 1, 4, 2, 3.

مثال (٣): أوجد جذور المعادلة $2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ بطريقة فراري.

الحل: المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$x^4 + 3x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 0x + 1 = 0 \qquad (1)$$

بضرب جذور المعادلة (1) في 2 أي بضــــرب حــــدود المعادلـــة (1) في المقـــادير $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ نحصل على $x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 0x + 16 = 0$

$$\therefore\ x^4 + 6x^3 = 6x^2 - 16 \qquad (2)$$

نضع الطرف الأيسر في صورة مقدار مربع أي $x^2 + 16x^3 + 9x^2 = 15x^2 - 16$

أو $\left(x^2 + 3x\right)^2 = 15x^2 - 16$

إذن

$$\left(x^2 + 3x + \lambda\right)^2 = \left(15 + 2\lambda\right)x^2 + 6\lambda x + \lambda^2 - 16 \qquad (3)$$

نختار λ بحيث يكون الطرف الأيمن في (3) مربع تام أي أن مميز الطـــرف الأيمـــن يساوي صفراً.

إذن $36\lambda^2 - 4\left(15 + 2\lambda\right)\left(\lambda^2 - 16\right) = 0$ أو $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 16\lambda - 120 = 0$

واضح أن $\lambda = 5$ جذر لها، بوضع $\lambda = 5$ في (3) نحصل على

$$\left(x^2 + 3x + 5\right)^2 = \left(5x + 3\right)^2$$

أو $(5x+3) \pm = x^2 + 3x + 5$ والجذور هي $-2 \pm \sqrt{2}$, $\frac{1}{2}(1 + \pm i)$

<u>ملاحظة:</u> دائماً نختار جذور للمميز بحيث يساوي صفراً.

هذا الجذر نحصل عليه بالتخمين العلمي Scientific Guess أي أن λ هي أحد عوامل الحد المطلق في شرط المميز يساوي صفر.

ولهذا نفرض بعض النتائج الهامة للتخمين عن جذر :ـ

١ـ إذا كانت جذور المعادلة $f(x) = 0$ جميعها حقيقية فإن المعاملات a_i يجب أن تكون مترددة الإشارة (موجب ـ سالب) وإذا كانت الجذور جميعها سالبة فإن المعاملات يجب أن تكون جميعها موجبة.

٢ـ من العلاقة $\sigma_n = (-1)^n a_n$ نستنتج أن أي جذر صحيح للمعادلة $f(x)=0$ والتي جميع معاملاتها أعداد صحيحة ومعامل x^n فيها الوحدة. يكون عاملاً من عوامل الحد المطلق a_n أي أن a_n يقبل القسمة على كل جذر من جذور المعادلة بدون باقي.

<u>مثال (٤) :</u> أوجد جذور المعادلة $x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$.

<u>الحل:</u> حيث أن $a_n = 4$ فإن بعض الجذور تقع داخل المجموعة $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ فمثلاً $x=2$ يحقق المعادلة المعطاة وبالتالي فهو جذر. بالقسمة على $x-2$ نحصل على معادلة من الدرجة الثالثة حدها المطلق يساوي 2 على الصورة

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

إذن بعض جذورها ينتمي إلى المجموعة $\{\pm 1, \pm 2\}$. واضح أن $x=-1$ جذر لها بالقسمة على $x+1$ نحصل على $x^2 + x + 2 = 0$ وجذورها $(-1 \pm \sqrt{7}\, i)$ وبالتالي

جذور المعادلة المعطاة هي $-1, 2, \left(-1+\sqrt{7}\,i\right)/2$

تمارين (٧)

(١) استخدم طريقة هورنر في حساب $f(x_o)$ عند النقطة x_o المبينة

(i) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16 \qquad x_o=4$

(ii) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7 \qquad x_o=-2-i$

(٢) استخدم طريقة هورنر في الحصول على مفكوكات كثيرات الحدود الآتية بدلالة قوى $(x-x_o)$.

(i) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1 \ , \ x_o=-1$

(ii) $f(x)=x^5 \ , \qquad x_o=1$

(iii) $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-50x+90 \ , \ x_o=2$

(vi) $f(x)=x^4+2i\,x^3-(1+i)\,x^2-3x+7+7+i \ , \ x_o=-i$

(v) $f(x)=x^4+(3-8i)\,x^3-(21-18i)x^2-(33-20i)\,x+7+18i,$
$x_o=1-+2i$

(٣) باستخدام طريقة هورنر في الحصول على الكسور الجزئية للكسرين الآتيين

a) $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$, b) $\dfrac{x^4-2x^2+3}{(x+1)^5}$

(٤) استخدم طريقة هورنر (بطريقة عكسية) في الحصول على مفكوك الدوال الأتية بدلالة قوى x التصاعدية

a) $(x+3)^4-(x+3)^3+1$,

b) $(x-2)^4+4(x-2)^3+6(x-2)^2+10(x-2)+20$

(٥) أوجد قيم كثيرات الحدود الآتية ومشتقاتها الممكنة عند النقطة $x=x_o$

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10 \ , \ x_o=2$

b) $f(x) = x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \; x_o = 1 + 2i$

(٦) ما هو عدد تكرار الجذور المعطاة لكثيرات الحدود المناظرة

(i) الجذر 2 لكثيرة الحدود $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

(ii) الجذر 2- لكثيرة الحدود $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$

(٧) عين قيمة a التي تجعل لكثيرة الحدود $x^5 - ax^2 - ax + 1$ الجذر 1- مكـــــرر ليس أقل من مرتين.

(٨) عين قيمة B, A التي تجعل كثيرة الحدود $Ax^4 + Bx^3 + 1$ تقبـــل القســـمة بدون باق على $(x-1)^2$.

٩ــ عين قيم B, A التي تجعل كثيرة الحدود $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ تقبل القســـمة على $(x-2)^2$ بدون باق.

(١٠) أثبت أن الشرط الضروري والكافي لكي تقبل كثيرة الحدود

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

على المقدار $(x-1)^{k+1}$ هو

$$a_o + a_1 + \ldots a_n = 0, \quad a_1 + 2a_2 + \ldots n a_n = 0$$
$$a_1 + 4a_2 + \ldots n^2 a_n = 0, \quad a_1 + 2^k a_2 + \ldots + n^k a_n = 0$$

١٢ــ عين عن طريقة الاختبار، كثيرات الحدود $M_2(x), M_1(x)$ التي تحقق $f_1(x)M_1(x) + f_2(x)M_2(x) = 1$ لكثيرات الحدود حيث f_1, f_2 تعطى من

(i) $f_1(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \; f_2(x) = x^2 - x + 1$

(ii) $f_1(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \; f_2(x) = x^2 - x - 1$

(iii) $f_1(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$f_2(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$

(iv) $f_1(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2, \; f_2(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$

(v) $f_1(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1\ ,\ f_2(x)=3x^3-2x^2+x$

(vi) $f_1(x)=x^5+5x^4+9x^3+7x^2+5x+1$

$f_2(x)=x^4+2x^3+2x^2+x+1$

(١٢) حل المعادلات الآتية :

(i) $x^3-6x+9=0$,

(ii) $x^3+12x+63$,

(iii) $x^3-6x+4=0$

(iv) $x^3+6x+2=0$,

(v) $x^3+18x+5=0$,

(vi) $x^3+9x-26=0$,

(vii) $x^3+45x-38$,

(x) $x^3+24x-50=0$,

(١٣)حل المعادلات الآتية :

(i) $x^3+9x^2+18x+28=0$, (ii) $x^3+6x^2+30x+28=0$,

(iii) $x^3+3x^2+6x+4=0$, (iv) $x^3+3x^2-3x-1=0$,

(v) $x^3-6x^2+57x-196=0$, (vi) $x^3-3x^2-3x+11=0$,

(١٤) حل المعادلات الآتية :

(i) $x^3+3x-2i=0$, (ii) $x^3-61x+4(1-i)=0$,

(iii) $x^3-3abfgx+f^2ga^3+fg^2b^3=0$

(١٥) أثبت أن $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-4p^2-27q^2$

حيث x_1, x_2, x_3 هي جذور المعادلة $x^3+px+q=0$.

(١٦) حل المعادلات الآتية:

(i) $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$ (ii) $x^4+2x^3-2x^2+6x-13=0$

(iii) $x^4-x^3-x^2+2x-2=0$ (iv) $x^4-4x^3+3x^2+2x-1=0$

(v) $x^4-3x^3+x^2+4x-6=0$ (vi) $x^4-6x^3+6x^2+27x-55=0$

(vii) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$ (viii) $x^4-x^3-3x^2+5x-10=0$

(ix) $x^4+2x^3+8x^2+2x+7=0$

(١٧) أوجد قيم a, b بحيث يكون $x-1, x-3$ عوامل لكثيرة الحدود

$$f(x)=2x^4-7x^3+ax+b$$

(١٨) إذا كان ax^3+bx+c لها عـــامل في الصـــورة x^2+kx+1 بـــين أن

$$a^2-c^2=ab$$

(١٩) إذا كانت $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ جذور للمعادلة $x^n-1=0$ فأثبت أن

$$(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\ldots(1-\alpha_{n-1})=n$$

(٢٠) كون معادلة ذات أقل درجة لها معاملات قياسية إذا كان أحـــد جذورهـــا $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

(٢١) أوجد جذور المعادلـــة $x^4+5x^3-30x^2-40x+64=0$ إذا علـــم أن جذورها في توالي هندسي.

(٢٢) أوجد جـــذور المعادلـــة $x^4+2x^3-21x^2-22x+4=0$ إذا علـــم أن جذورها في توالي عددي.

(٢٣) أوجد شرط أن تكون جذور المعادلة $x^3-ax^2+p=0$ في توالي عددي.

(٢٤) أوجد شرط أن تكون جذور المعادلة $px^3+qx^2+rx+5=0$ في تـــوالي هندسي.

(٢٥) حول المعادلة $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ إلى معادلة أخرى فيها معـــامل x^2 يساوي صفر.

(٢٦) أوجد جذور المعادلة $16x^4-8x+3=0$ إذا علم أن لها جذران متساويان.

(٢٧) أوجد المعادلة التي جذورها تقل بمقدار 2 عن جذور المعادلة

$$x^4-3x^2+6x-8=0$$