الباب السادس

متسلسلة ذات الحدين

أحد تطبيقات متسلسلات القوى هو متسلسلة ذات الحدين والتي تمكننا من إيجاد مفكوك الكميات المكونة من حدين ومرفوعة إلى أي أس والتي تعارف على تسميتها نظرية ذات الحدين. مثل

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \dots \qquad (1)$$

وهو عبارة عن متسلسلة ماكلورين للدالة $(a+x)^n$ (أنظر مقرر التفاضل).

ويكون الحد الذي ترتيبه $r+1$ هو $\binom{n}{r} a^{n-r} x^r$

حيث $r! = 1\times 2\times 3\times \dots \times r$, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$

ولإثبات صحة هذا المفكوك يمكن استخدام الاستنتاج الرياضي.

وهذا المفكوك صحيح لجميع قيم n الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة بفرض أن القيمة العددية للمقدار x أصغر من a الصحيح. أما إذا كانت n عدداً صحيحاً موجباً ويمكن أن تأخذ x أي قيمة سواء كانت أكبر من أو تساوي أو أصغر من a. وفي حالة n عدد صحيح موجب فإن مفكوك ذات الحدين يكون منتهي ويحتوي على n-1 من الحدود (راجع اختبارات التقارب لمتسلسلات القوى).

وفيما عدا ذلك (عندما تكون n عدد سالب أو كسر) فإن مفكوك ذات الحدين يكون متسلسلة لانهائية.

في مفكوك ذات الحدين إذا كانت a=1 فإن المفكوك يأخذ الصورة:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n\,(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}x^3 + + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \ldots \qquad (2)$$

حالات خاصة:

إذا كانت $n = -1$ فإن:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad (3)$$

وبوضع $-x$ بدلاً من x نحصل على

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (4)$$

بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2\,x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + \ldots \qquad (5)$$

وبوضع $-x$ بدلاً من x في (5) نحصل على

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^3 + \ldots \qquad (6)$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots \qquad (7)$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} - x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (8)$$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \ x + x^2 + \ \ldots \qquad (9)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \ \ldots + (r+1)\,x^r \qquad (10)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2\,x + 3\,x^2 + \ \ldots + (-1)^r\,(r+1)\,x^r + \ldots \qquad (11)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots+ \\ +(-1)^r\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}x^r+\ldots \tag{12}$$

ويلاحظ أن المتسلسلات السابقة صحيحة فقط عندما تكون $|x|<1$ أي القيمة العددية للمقدار x (بصرف النظر عن الإشارة) تكون أصغر من الواحد الصحيح. وهذا هو شرط تقارب المتسلسلات السابقة أي شرط إيجاد مجموعها.

ويمكن إيجاد مفكوك $(a+x)^n$ لأي قيمة للمقدار n بتحويله إلى الصورة $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ وذلك بأخذ مشترك a. فمثلاً إذا كانت $|x|<|a|$ (من اختبارات التقارب) فإن

$$(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n\left[1+\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\ldots\right]$$

<u>مثال (١):</u> أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك كل من

$(1-x)^{\frac{3}{4}},\left(1+x^2\right)^{-2},(8+12x)^{\frac{2}{3}}$ واذكر في كل حالة قيم x التي يكون فيها المفكوك صحيحاً.

<u>الحل:</u>

$$\text{(i)}\ (1-x)^{\frac{3}{4}}=1+\frac{3}{4}(-x)+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)(-x)^2}{2!}+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)(-x)^3}{3!}+\ldots$$

$$=1-\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2-\frac{5}{128}x^3+\ldots$$

وهذا المفكوك يكون صحيحاً فقط عندما تكون القيمة العددية للمقدار x أصغر

من الواحد الصحيح أي لجميع قيم x التي تحقق $-1 < x < 1$

$$\text{(ii)}\ \left(1+x^2\right)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=1-2\left(x^2\right)+\frac{(-2)(-2-1)}{2}\left(x^2\right)^2+\frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3}\left(x^2\right)^3+\dots$$

$$=1-2x^2+3x^4-4x^6+\dots$$

المفكوك يكون صحيحاً فقط إذا كانت $\left|x^2\right|<1$ أي $|x|<1$ أي $-1<x<1$

$$\text{(iii)}\ (8+12x)^{\frac{2}{3}}=\left[8\left(1+\frac{3}{2}x\right)\right]^{\frac{2}{3}}=4\left(1+\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$=4\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{3}{2}x\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)\left(\frac{3}{2}x\right)^3}{3!}+\dots\right]$$

$$=4\left[1+x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\dots\right]$$

المفكوك يكون صحيحاً فقط إذا كان $\left|\frac{3}{2}x\right|<1$ أي $|x|<\frac{2}{3}$ أي $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$.

<u>مثال (٢):</u> أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك $\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}}$

<u>الحل:</u>

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}}=(1+2x)^{\frac{1}{2}}+\left(1+3x^2\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(2x)^2}{2!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(2x)^3}{3!}+\dots$$

$$=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\dots$$

$$\left(1+3x^2\right)^{-\frac{1}{3}}=1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(3x^2\right)+\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(3x^2\right)^2}{2!}+\dots$$

$$=1-x^2+2x^4+\ldots\ldots$$

لذلك يكون مفكوك المقدار حتى x^4 يساوي

$$\left(1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\left(1-x^2\right)=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3-x^2-x^3$$

$$=1+x-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3$$

<u>مثال (٣):</u> إذا كانت $y=\dfrac{x^2}{2-x+x\sqrt{1-x}}$ أثبت أن $y=2-x-2\sqrt{1-x}$ ثم أثبت أنه إذا كانت x صغيرة فإن $y=\dfrac{1}{4}x^2$ تقريباً.

<u>الحل:</u> بما أن $y=\dfrac{x^2}{2-x+2\sqrt{1-x}}$ فبالضرب في مرافق المقام ينتج أن

$$y=\frac{x^2\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}{\left(2-x+2\sqrt{1-x}\right)\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}=\frac{x^2\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}{(2-x)^2-4(1-x)}$$

$$=\frac{\cancel{x}^2\left(2-x-2\sqrt{1-x}\right)}{\cancel{4}-4\cancel{x}+\cancel{x}^2-\cancel{4}+4\cancel{x}}=2-x-2\sqrt{1-x}=2-x-2(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

ونظراً لأن x صغيرة أي أصغر من الواحد الصحيح ينتج أن:

$$y=2-x-2\left[1+\frac{1}{2}(-x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(-x^2\right)+\ldots\right]$$

$$=2-x-2\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots\right)\cong 2-x-2+x+\frac{1}{4}x^2\cong\frac{1}{4}x^2$$

وذلك بإهمال x^3 والقوى الأعلى في x (الرمز $\cong$ يعني تساوي تقريباً).

<u>مثال (٤):</u> بتطبيق نظرية ذات الحدين أوجد القيمة التقريبية لكل من

(i) $\sqrt{4.004}$ (ii) $\dfrac{1}{(0.998)^2}$

الحل: بوضع القيم المعطاة على صورة ذات الحدين نجد أن

$$\text{(i)}\ \sqrt{4.004}=(4+0.004)^{\frac{1}{4}}=2\,(1+0.001)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[1+\frac{1}{2}(0.001)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(0.001)^2+\dots\right]=2\,(1+0.0005-\dots)$$

مقرباً لأربعة أرقام عشرية $\cong 2.001$

$$\text{(ii)}\ \frac{1}{(0.998)^2}=\frac{1}{(1-0.002)^2}=(1-0.002)^{-2}$$

$$=1+2(0.002)+3\,(0.002)^2+\dots=1+0.0040+0.000012+\dots$$

مقرباً لأربعة أرقام عشرية $\cong 1.0040$

مثال (٥): إذا كانت x كبيرة أثبت أن $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}\cong\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^5}$

الحل: إذا كانـــت x كبيرة فإن $\frac{1}{x}$ تكون صغيرة لذلك نعبر عن المفكوك بدلالـــة قوى $\frac{1}{x}$

$$\sqrt[3]{x^3+6}=\left(x^3+6\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{6}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^6}+\dots\right)$$

$$=x+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^5}\quad \text{تقريباً}$$

$$\sqrt[3]{x^3+3}=\left(x^3+3\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1+\frac{3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}\left(\frac{3}{x^3}\right)^2+\dots\right]=x\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^6}+\dots\right)$$

$$=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^5}\quad \text{تقريباً}$$

$\therefore \sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}=x+\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^5}-x-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^5}$ تقريباً

مثال (٦): أثبت أن المتسلسلة ... $1+\frac{21}{8}+\frac{21}{8}.\frac{27}{16}+\frac{21}{8}.\frac{27}{16}.\frac{33}{24}+\frac{21}{8}.\frac{27}{16}.\frac{39}{32}+...$

هي متسلسلة ذات الحدين وأوجد مجموعها إلى مالانهاية.

الحل: نفرض أن المتسلسلة المعلومة هي متسلسلة ذات الحدين لذلك نفرض أنها على

الصورة $(1+x)^n$

$$\because (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...$$

بالمقارنة $nx=\frac{21}{8}$ ، $\frac{n(n-1)}{2}x^2=\frac{21}{8}.\frac{27}{16}$

وبحل المعادلتين نحصل على :

$$\left(\frac{21}{8}\right)^2-\frac{21}{8}x=2.\frac{21}{8}.\frac{27}{16} \quad , \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$$

ومنها نحصل على

$$(1+x)^n=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{7}{2}}=1-\frac{7}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^2+...$$

$$=1+\frac{21}{8}+\frac{21}{8}.\frac{27}{16}+\frac{21}{8}.\frac{27}{16}.\frac{33}{24}+...$$

من هنا يتضح أن المتسلسلة المعطاة هي متسلسلة ذات الحدين ومجموعها هو

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{7}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{7}{2}}=2^7=128$$

مثال (٧): أثبت أن المتسلسلات اللانهائية التالية تمثل مفكوكات لذات الحدين ثم

أوجد مجموعها إلى مالانهاية

$$(i)\ \ 1+6\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{6.7}{1.2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{6.7.8}{1.2.3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots \quad (ii)\ 1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\ldots$$

(i) إذا كانت المتسلسلة اللانهائية (i) تمثل مفكوك لذات الحدين فإنه يمكن وضعها

على الصورة ... $(1+x)^n = 1+n\,x+\frac{n\,(n-1)}{2!}x^2+\ldots$

بمساواة كل حد من هذا المفكوك بنظيرة في المتسلسلة نحصل على

$$(1)\ n\,x = 6\left(\frac{4}{5}\right) \quad , \quad (2)\ \frac{n\,(n-1)}{2!}x^2=\frac{6.7}{1.2}\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

ومن المعادلة (1) بالتربيع نحصل على

$$(3)\ n^2\,x^2 = 36\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

وبقسمة المعادلة (2) على (3) نحصل على

$$\frac{2\,n^2\,x^2}{n\,(n-1)\,x^2}=\frac{36.2}{6.7},\ \ \therefore\ \frac{n}{n-1}=\frac{6}{7}\ \therefore\ 6\,n-6=7\,n \Rightarrow n=-6$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن $(-6)\,x = 6\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$

وبذلك يصبح مجموع المتسلسلة اللانهائية على الصورة :

$$1+6\left(\frac{4}{5}\right)+\frac{6.7}{1.2}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\frac{6.7.8}{1.2.3}\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots=\left(1-\frac{4}{5}\right)^{-6}=52651$$

(ii) بنفس الخطوات المتبعة في مثال (i) نجد أن :

$$n\,x=\frac{1}{4},\ \ \frac{n\,(n-1)}{2!}x^2=\frac{3}{4.8}$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $x=-\frac{1}{2}, n=-\frac{1}{2}$.

إذن مجموع المتسلسلة اللانهائية هو

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

مثال (٨): حلل الكسر الآتي $\frac{1}{x^2+3x+2}$ إلى كسوره الجزئية وأكتب مفكوك كل كسر بدلالة قوى x التصاعدية وأوجد الأربعة حدود الأولى في النتيجة النهائية مبيناً قيم x التي تجعل المفكوك صحيحاً.

الحل: الكسر $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+1)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

وبوضع $x=-1 \Leftarrow a=1$ وبوضع $x=-2 \Leftarrow b=-1$

∴ الكسر $=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

كل كسر نضعه في الصيغة المناسبة للفك بدلالة قوى x التصاعدية كالآتي :

$$\text{الكسر}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2\left(\frac{x}{2}+1\right)}=(1+x)^{-1}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}$$

$$=1-x+x^2-x^3-\ldots-\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{15}{16}x^3$$

المفكوك الأول يكون صحيحاً عندما $|x|<1$ أي $-1<x<1$، والمفكوك الثاني يكون صحيحاً عندما $|x|<2$، إذن مفكوك الكسر يكون صحيحاً عندما $-1<x<1$.

مثال (٩): حلل الكسر الآتي $\frac{4+3x}{6-x-x^2}$ إلى كسوره الجزئية ثم أوجد مفكوكه أولاً بدلالة قوى x وثانياً بدلالة قوى $\frac{1}{x}$ مبيناً قوى x التي تجعل المفكوك صحيحاً

في كل حالة.

الحل: الكسر $\frac{4+3x}{(3+x)(2-x)}=\frac{a}{3+x}+\frac{b}{2-x}$

$$=\frac{a(2-x)+b(3+x)}{(3+x)(2-x)} \therefore 4+3x=a(2-x)+b(3+x)$$

وبوضع $x=-3$ فإن $a=-1$ وبوضع $x=2$ فإن $b=2$

$\therefore$ الكسر يصبح على الصورة $\frac{2}{2-x}-\frac{1}{3+x}$

أولاً: لإيجاد مفكوك الكسر بدلالة قوى x التصاعدية، نضع الكسر في صيغ مناسبة على الصورة

$$\frac{2}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{3\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)$$

$$=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}+\ldots-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}-\frac{x^3}{27}+\ldots\right)=\frac{2}{3}+\frac{11}{18}x+\frac{23}{108}x^2+\ldots$$

ثانياً: لإيجاد مفكوك الكسر بدلالة قوي $\frac{1}{x}$ نضع الكسور في الصورة المناسبة لذلك أي نضع $\frac{2}{2-x}-\frac{1}{3+x}=\frac{2}{-x\left(1-\frac{2}{x}\right)}-\frac{1}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

والكسر يصبح على الصورة:

$$-\frac{2}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-1}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-1}$$

$$=-\frac{2}{x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}+\ldots\right)-\frac{1}{x}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{27}{x^3}+\ldots\right)$$

مفكوك الكسر الأول يصبح صحيحاً عندما $\left|\frac{2}{x}\right|<1$ أي $2<|x|$ ومفكوك

الكسر الثاني يكون صحيحاً عندما $\left|\frac{3}{x}\right|<1$ أي $3<|x|$ ويكون الكسر صحيحاً عندما $|x|>3$.

<u>مثال (١٠):</u> أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\dots$$

(حيث α ليس عدداً صحيحاً موجباً أو صفر) تقاربية.

<u>الحل:</u> نفرض أن $a_n=\binom{\alpha}{n}x^n\ ,a_{n+1}=\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}$ وباستخدام اختبار النسبة المطلق نجد أن $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right||x|=|x|$

وتكون المتسلسلة تقاربية إذا كان $-1<x<1$ وتباعدية إذا كان $|x|>1$.

وبذلك يكون نصف قطر التقارب لهذه المتسلسلة $=1$.

<u>مثال (١١):</u> أوجد باستخدام نظرية ذات الحدين

(i) $\sqrt[2]{37}\ ,\sqrt[3]{37}$ (ii) $\dfrac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{(1+3x^2)^{\frac{1}{3}}}$

(i) $\sqrt{37}=(36+1)=6\left(1+\frac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=6\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{36}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{36}\right)^2+\frac{1}{30}\left(\frac{1}{36}\right)^3+\dots\right)$$

$$=6\left(1+\frac{1}{72}-\frac{1}{10368}+\frac{1}{746496}+\dots\right)$$

$$=6\,(1+0.01389-0.00009+0.0000)=6.0828$$

وبالمثل يمكن إيجاد $\sqrt[3]{37}$

$$\text{(ii)}\quad (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}(2x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}(2x)^3+\ldots$$

$$=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\ldots$$

$$\left(1+3x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = 1-x^2+2x^4$$

لذلك لقوى x حتى x^3 يكون

$$\frac{(1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{3}}} = 1+x^1-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3 .$$

الطريقة العامة لإيجاد مجموع بعض المتسلسلات اللانهائية :

(١) طريقة ذات الحدين:

من المعلوم أن

$$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+\ldots$$

هذان المفكوكان يساعدان على إيجاد جمع بعض المتسلسلات كما في الأمثلة التالية:

مثال (١٢): أثبت أن مجموع المتسلسلة $1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2!3^2}+\frac{1.3.5}{3!3^3}+\ldots$ إلى ∞ يساوي $\sqrt{3}$.

الحل: نفرض أن المتسلسلة هي متسلسلة ذات الحدين أي يمكن فرض أن

$$(1+x)^n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2!3^2}+\frac{1.3.5}{3!3^3}+\ldots \qquad (1)$$

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots \qquad (2)$$

وبمقارنة (1) ,(2) ينتج أن

$$\text{(i)}\ \ n\,x=\frac{1}{3},\quad \text{(ii)}\ n(n-1)\ x^2=\frac{1}{3}$$

وبحل المعادلتين (i) ,(ii) في x , n نحصل على $x=-\frac{2}{3}\ ,\ n=-\frac{1}{2}$

وبالتالي يكون مجموع المتسلسلة (2) هو $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

(٢) طريقة شيزارو (طريقة المتوسطات):

Cesaro's method (or method of arithmetic means)

إذا كان المطلوب إيجاد مجموع المتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

باستخدام طريقة شيزارو نوجد $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n}$

حيث $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$ هي المجاميع الجزئية. إذا كانت هذه النهاية محدودة فهي مجموع المتسلسلة المعطاة.

<u>مثال (١٣):</u> إذا كان $0<x<2\pi$ أوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,x + \cos x + \cos 2\,x + \cos 3\,x + \ldots$$

حصلنا على المجموع الجزئي S_n لهذه المتسلسلة في مثال (٢٣) في الباب السابق

وكان على الصورة $S_n=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$

والآن نحسب المتوسط الحسابي للمجاميع الجزئية

$$\frac{S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n}{n}=\frac{1}{4\,n\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\cos mx - \cos(m+1)x\right)\right] - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n \to \infty$ فإن مجموع المتسلسلة $-\frac{1}{2}$.

تمارين (٦)

(١) أوجد الأربعة حدود الأولى في مفكوك كل من

$$(1+3x)^{-\frac{1}{2}} \;,\; \frac{1}{\left(1-x^2\right)^3} \,,\; (16-3x)^{\frac{5}{4}}$$

وأذكر في كل حالة قيم x التي يكون فيها المفكوك صحيحاً.

(٢) باستخـــدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل من $\sqrt{1-2x}\,,\ \frac{2-3x}{2-x}$ في قوى x التصاعدية حتى الحد الذي يحتوي على x^4. أوجد الفترة التي تنتمـــي إليها x حتى يكون كل مفكوك صحيحاً. وبوضع $x = \frac{1}{50}$ في مفكـــوك ذات الحدين أثبت أن $\sqrt{6}$ يساوي $\frac{485}{198}$ تقريباً.

(٣) حقق أن $100 = 128\left(1-\frac{7}{32}\right)$ ومن ثم احسب قيمة $(100)^{\frac{1}{7}}$ مقربـــة لثلاثـــة أرقام عشرية.

(٤) أوجد قيمة k حتى يكون مفكوك $\frac{1-kx^2}{\sqrt{1-x^2}}$ في قوى x التصاعدية لا يحتـــوي على x ولهذه القيمة لـــ k أوجد الثلاثة حدود التالية.

(٥) إذا كانت $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$ أثبت أن $y=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$ وإذا كـــانت x صغيرة فإن $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}x^2+16x^2$ تقريباً.

(٦) إذا كان $|x|<1$ فبرهن على أن

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3=1+6x+18x^2+\ldots+\left(4n^2+2\right)x^n+\ldots$$

(٧) برهن أن المتسلسلة الآتية تمثل مفكوكاً لذات حدين وأوجـــد مجموعـــها إلى مالانهاية $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1.3}{3.6}+\dfrac{1.3.5}{3.6.9}+\ldots$.

(٨) إذا كانت $(1+mx)^n=1+\dfrac{5}{6}x+\dfrac{5}{6}.\dfrac{7}{12}x^2+\dfrac{5}{6}.\dfrac{7}{12}.\dfrac{9}{18}x^3+\ldots$ أوجد قيمة كل من m, n وأوجد مجموع المتسلسلة إلى مالانهاية عندما $x=\dfrac{5}{3}$.

(٩) أوجد الثلاثة حدود الأولى والحد العام في مفكوك كل من

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}},\ (3+x)^{-3},\ \left(2-x^2\right)^{-2},\ \frac{1-x}{1-2x}$$

(١٠) أوجد قيمة $(1.01)^{-5}$, $\sqrt[3]{29}$ مقرباً لثلاثة أرقام عشرية.

(١١) إذا كانت x كبيرة بحيث يمكن إهمال $\dfrac{1}{x^4}$ أثبت أن

$$\frac{x\sqrt{x^2-2x}}{(1+x)^2}\cong 1-\frac{3}{2}+\frac{9}{2x^2}-\frac{13}{2x^3}$$

(١٢) أثبت أن معامل x^n في مفكوك $\dfrac{x^2}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ يمكن كتابتـــه على الصورة

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^n & b^n & c^n \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(١٣) اجمع كلاً من المتسلسلات الآتية

(i) $1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$

(ii) $1+\frac{1}{6}+\frac{2\times5}{6\times12}+\frac{2\times5\times8}{6\times12\times18}+\ldots$

(iii) $1+\frac{1}{8}+\frac{1\times3}{8\times16}+\frac{1\times3\times5}{8\times16\times24}+\ldots$

(v) $1-\frac{1}{4}+\frac{1\times3}{4\times8}-\frac{1\times3\times5}{4\times8\times12}+\ldots$

(vi) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots$