الباب الخامس

المتسلسلات SERIES

(١.٥) المتسلسلات المنتهية : Sum of Finite Series

قبل البدء في كتابة إيجاد مجموع بعض المتسلسلات المنتهية نقدم تعريف وخواص ما يسمى بالمتابعة (Sequence).

تعريف (١): المتابعة العددية هي تجمع من الأعداد معرفة فيه موقع كل عدد داخل في تكون المتابعة بالنسبة للأعداد الأخرى المكونة للمتابعة وكل قيمة تدخل في تكوين المتابعة تعرف بحد المتابعة.

والحد العام في المتابعة يعرف بالحد النوني ويرمز له بالرمز a_n وعادة تكتب المتابعة على الصيغة : $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

وإذا كانت $m < n$ فإن الحد a_m يقع قبل الحد a_n وإذا اعتبرنا المتابعة

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$$

فإن : $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}$

فمثلاً الحد العام في المتابعة $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ هو $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

ويقال أن المتابعة منتهية إذا كانت تحتوي على عدد محدود من الحدود أما إذا كان عدد الحدود لانهائياً قيل أن المتابعة لانهائية (Infinite).

تعريف (٢): يقال أن المتابعة التي حدها النوني a_n تزايدية (Increasing) أو تناقصية (Decreasing) إذا كان وكان فقط

$$a_n \leq a_{n+1}, (a_n \geq a_{n+1}), n = 1, 2, \ldots$$

تعريف (٣): يقال أن المتتابعة (a_n) مضطردة (monotonic) إذا كان وكـــان فقط تزايدية أو تناقصية.

تعريف (٤): أي متسلسلة هي مجموع حدود متتابعة فمثلاً إذا كانت $a_1, a_2, \dots, a_n$ هي متتابعة محدودة فإن المجموع

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ يمثل المتسلسلة المحدودة المناظرة لهذه المتتابعة.

أما إذا كان لدينا المتتابعة اللانهائية $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ والتي حدها النـــوني a_n فـــإن المجموع $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يمثل المتسلسلة اللانهائية المنـــاظرة لهذه المتتابعة.

وسندرس الآن طرق جمع بعض المتسلسلات المحدودة.

(١) **المتسلسلة العددية :** المتسلسلة العددية هي على الصورة :

$$a + (a+d) + (a+2d) + \dots + a + (n-1)\, d$$

حيث a هو الحد الأول، d أساس المتسلسلة. ونعلم من الدراسة في المرحلة الثانويـــة أن المجموع يعطى من العلاقة : $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$

(٢) **المتسلسلة الهندسية :** المتسلسلة الهندسية هي على الصورة :

$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ ويعطى المجموع بالقانون :

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}, \; r \neq 1$$

وبوجه عام ليس من السهل إيجاد مجموع أية متسلسلة محدودة ولكن قد يمكن ذلك في بعض الحالات الخاصة التي سنذكرها فيما يلي :

أولاً : طريقة الفروق :

نظرية : في المتسلسلة $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ldots$ إذا أمكن كتابة الحد العام علـــى الصورة :

$$a_r = \phi(r+1) - \phi(r) \qquad (1)$$

فإن $\sum_{r=1}^{n} a_r = \phi(n+1) - \phi(1)$

البرهان: بوضع r=1 في العلاقة (1) نجد أن : $a_1 = \phi(2) - \phi(1)$

وبوضع r=2 في العلاقة (1) نجد أن : $a_2 = \phi(3) - \phi(2)$

وهكذا ...

وبوضع r=n يكون : $a_n = \phi(n+1) - \phi(n)$

وبالجمع ينتج أن : $\sum_{r=1}^{n} a_r = \phi(n+1) - \phi(1)$

مثال (١): أوجد مجموع المتسلسلة :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n+1)$$

الحل: الحد العام للمتسلسلة المعطاة هو $a_r = r(r+1)$ وندرس الفرق

$$r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1) = 3r(r+1) = 3a_r$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{3}\left[r(r+1)(r+2) - (r-1)(r)(r+1)\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{3}\left[n(n+1)(n+2) - 0\right]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

مثال (٢): أوجد مجموع المتسلسلة :

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots \quad \dots \quad \dots$$ إلى الحد النوني

الحل: الحد العام هو $a_r = r\,(r+1)\,(r+2)$ ندرس الفروق

$$r\,(r+1)\,(r+2)\,(r+3) - (r-1)\,(r)\,(r+1)\,(r+2)$$
$$= r\,(r+1)\,(r+2)\left[\cancel{r} + 3 - \cancel{r} + 1\right] = 4\,r\,(r+1)\,(r+2) = 4\,a_r$$

$$\therefore\ a_r = \frac{1}{4}\left[r(r+1)(r+2)(r+3) - (r-1)\,(r)\,(r+2)\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{4}\left[n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\right]$$

مثال (٣): أوجد مجموع المتسلسلة : إلى n حداً ... + $1.1! + 2.2! + 3.3!$

الحل: الحد العام $a_r = r\,r!$ ، ندرس الفرق

$$(r+1)! - (r)! = \left[(r+1)+1\right] - r!$$
$$= r!\,(r+1-1) = r\,r!$$
$$(r+1)! - r! = a_r$$
$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n} a_r = (n+1)! = (n+1)! - 1$$

مثال (٤): أوجد مجموع المتسلسلة :

$$\cos x + \cos 2\,x + \cos 3\,x + \dots$$ إلى n حداً

الحل: الحد العام $a_r = \cos r\,x$ ، ندرس الفرق

$$\sin\frac{2\,r+1}{2}\,x - \sin\frac{2\,r-1}{2}\,x = 2\cos r\,x \sin\frac{x}{2} = 2\,a_r \sin\frac{x}{2}$$

$$a_r = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{2r+1}{2}x - \sin\frac{2r-1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[2\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}\right)$$

<u>مثال (٥):</u> أوجد مجموع المتسلسلة : إلى n حداً ... $\frac{1.2}{3!}+\frac{2.2^2}{4!}+\frac{3.2^3}{5!}+\frac{4.2^4}{6!}+\ldots$

<u>الحل:</u> الحد العام هو $a_r = \frac{r\,2^r}{(r+2)!}$، ندرس الفروق :

$$\frac{2^r}{(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{2^r\,(r+2)}{(r+2)(r+1)!} - \frac{2^{r+1}}{(r+2)(r+1)!}$$

$$= \frac{2^r}{(r+2)!}(r+2-2) = \frac{r\,2^r}{(r+2)!} = a_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

<u>ثانياً: باستخدام بعض القوانين المعروفة :</u>

باستخدام طريقة الفروق يمكن إيجاد مجموع مربعات ومكعبات الأعـــــداد الطبيعية وكذلك مجموع الأعداد الطبيعية وبذلك يكون لدينا القوانين الآتية :

(i) $\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2}$ ... ... (1)

(ii) $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ... ... (2)

(iii) $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ... ... (3)

باستخدام القوانين (1) ,(2) ,(3) يمكن إيجاد مجموع بعض المتسلسلات كما يتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

<u>مثال (٦):</u> أوجد مجموع المتسلسلة الآتية :

$1.3 + 2.4 + 3.5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ إلى n حداً

<u>الحل:</u> الحد العام هو $a_r = r(r+2) = r^2 + 2r$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r^2 + 2\sum_{r=1}^{n} r$$

وباستخدام (1) ,(2) نجد أن :

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)}{6}[2n+1-6]$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} a_r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$$

<u>مثال (٧):</u> أوجد مجموع المتسلسلة

$3.1^2 + 4.2^2 + 5.3^2 + \ldots\ldots\ldots$ إلى n حداً

<u>الحل :</u> الحد العام هو $a_r = (r+2)r^2 \quad = r^3 + 2r^2$

وباستخدام (2) ,(3) نحصل على $\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} r^3 + 2\sum_{r=1}^{n} r^2$

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1).$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)\left[3n^2 + 11n + 4\right]$$

مثال (٨): أوجد مجموع المتسلسلة

$1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots$ إلى n حداً

الحل: الحد العام هو $a_r=(2r-1)^2$

$$a_r=4r^2-4r+1$$
$$\sum_{r=1}^{n}a_r=4\sum_{r=1}^{n}r^2-4\sum_{r=1}^{n}r+\sum_{r=1}^{n}1$$

وبالاستعانة بالقوانين السابقة نجد أن :

$$\sum_{r=1}^{n}a_r=4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n}a_r=\frac{n}{3}\left(4n^2-1\right)$$

ثالثاً : جمع متسلسلات في قوى x على الصورة :

$$a+(a+d)x+(a+2d)x^2+\ldots+[a+(n-1)d]x^{n-1}$$

هذه المتسلسلة تسمى بالمتسلسلة العددية الهندسية لأن حدها العام يتكون من حاصل ضرب الحد العام لمتسلسلة عددية والحد العام لمتسلسلة هندسية.

ولإيجاد مجموع هذه المتسلسلة نفرض أن :

$$S_n=a+(a+d)x+(a+2d)x^2+\ldots+[a+(n-1)d]x^{n-1} \qquad (1)$$
$$\therefore xS_n=ax+(a+d)x^2+(a+2d)x^3\ldots\ldots$$
$$+[a+(n-2)d]x^{n-1}+[a+(n-1)d]x^n\ldots \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على

$$S_n-xS_n=a+dx+dx^2+\ldots+dx^{n-1}-[a+(n-1)d]x^n$$
$$=a+\frac{dx\left(x^{n-1}-1\right)}{x-1}-[a+(n-1)d]x^n$$

$$\therefore S_n = \frac{[a+(n-1)d]x^n - a}{x-1} - \frac{d\,x\left(x^{n-1}-1\right)}{(x-1)^2},\ x \neq 1$$

<u>مثال (٩):</u> أوجد مجموع المتسلسلة : **إلى الحد النوني** ....+ $1+11x+21x^2$

<u>الحل:</u> الحد العام هو $a_r = [1+10(r-1)]x^{r-1}$، ونفرض أن :

$$S_n = 1+11x+21x^2+\ldots+(10n-9)x^{n-1}$$
$$x\,S_n = x+11x^2+21x^3+\ldots+(10n-19)x^{n-1}+(10n-9)x^n$$

بالطرح نحصل على :

$$(1-x)S_n = 1+10x+10x^2+10x^3+\ldots+10x^{n-1}-(10n-9)x^n$$
$$= 1+10x\frac{\left(x^{n-1}-1\right)}{x-1}-(10n-9)x^n$$
$$\therefore\ S_n = \frac{(10n-9)x^n-1}{x-1} - \frac{10x\left(x^{n-1}-1\right)}{(x-1)^2}$$

<u>رابعاً : جمع المتسلسلة اللانهائية:</u>

نوجد أولاً مجموع n من الحدود وليكن S_n ويسمى المجموع الجزئي ويكون مجموع عدد لانهائي من حدود المتسلسلة هو S ونحصل عليه من $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ فإذا كانت النهاية كمية محدودة يقال أن المتسلسلة تقاربية ومجموعها هو S أما إذا كانت S لانهائية أو غير موجودة فإن المتسلسلة تسمى متسلسلة تباعدية وهذا ما سوف نقوم بدراسته في الباب القادم.

تمارين (١.٥)

(١) اجمع المتسلسلات الآتية إلى n حداً.

(1) $1.5 + 3.7 + 5.9 + \ldots$

(2) $1.2.4 + 2.3.5 + 3.4.6 + \ldots$

(3) $\log 2 + 2\log\frac{3}{2} + 3\log\frac{4}{3} + 4\log\frac{5}{4} + \ldots$

(4) $1.4 + 4.7 + 7.10 + \ldots$

(٢) أوجد مجموع n من حدود المتسلسلات الآتية ومن ثم أوجد مجموعها اللانهائي (مجموع متسلسلة لانهائية)

(1) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \ldots$

(2) $\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \ldots$

(3) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots$

(4) $\frac{1\times 2}{3!} + \frac{2.2^2}{4!} + \frac{3.2^2}{5!} + \frac{4.2^2}{6!} + \frac{5.2^2}{7!}$

(5) $\frac{1}{2.5.8} + \frac{1}{5.8.11} + \frac{1}{8.11.14} + \ldots$

(6) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots$

(٣) اجمع المتسلسلات المنتهية الآتية:

(1) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (4n)^n$ **(2)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2$

(3) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots + (2n+1)^3$

(٤) اجمع كلاً من المتسلسلات الآتية إلى n حداً.

(i) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ **(ii)** $1 + 3x + 5x^2 + \ldots$

(٢.٥)تقارب وتباعد المتسلسلات اللانهائية

Convergence and divergence of infinite series

تعريف (٢): نفرض أن لدينا عدد لانهائي من حدود متتابعة على الصورة

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

وبذلك يكون :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

والذي عادة يسمى المتسلسلة العددية اللانهائية أو ببساطة يسمى بالمتسلسلة. ويسمى الحد a_k في (1) حد المتسلسلة. مجموع n من الحدود في المتسلسلة (1) يسمى بالمجموع الجزئي (partial sum) ويرمز له عادة بالرمز S_n

وبذلك يكون :

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

أي أن $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

إذا يكون لدينا المتتابعة : $S_1, S_2, \ldots, S_n$ من المجاميع الجزئية.

والآن ندرس الاحتمالات الأربعة الآتية :

(١) إذا كانت S_n تؤول إلى نهاية محدودة S عندما $n \to \infty$ أي إذا كان $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ فإنه يقال أن المتسلسلة المعطاة تقاربية أو متقاربة (Convergent) وأن مجموعها هو S. أي أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كان مجموعها عدداً محدوداً.

(٢) إذا كانت $S_n \to +\infty$ أو $S_n \to -\infty$ حينما $n \to \infty$ يقال أن المتسلسلة المعطاة تباعدية أو متباعدة (Divergent).

(٣) إذا كانت S_n تتذبذب بين عددين محدودين عندمـــا $n \to \infty$، وفي هـــذه الحالة يقال أنها تتذبذب تذبذباً محدوداً ويقال أنها تباعدية.

(٤) إذا كانت S_n تتذبذب بين $-\infty , +\infty$ عندما $n \to \infty$، في هذه الحالة يقال أن المتسلسلة تتذبذب تذبذباً غير محدود ويقال أنها تباعدية.

ملحوظة: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يقال أنها تباعدية إذا كانت $S_n \to \infty$ أو $S_n \to -\infty$ أو S_n تذبذبية.

مثال (١): المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\ldots$، متسلسلة تذبذبية لأن :

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ if } n \text{ is even} \\ 1 \text{ if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

أي أن : $\lim_{n \to \infty} S_n$ غير موجودة وبذلك تكون المتسلسلة تباعدية.

مثال (٢): نفرض أن لدينا المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}$$

ونفرض أن S_n هو المجموع الجزئي $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}$

$$\therefore\ S_n = \frac{1-a^n}{1-a}, a \neq 1$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^n}{1-a} \qquad (3)$$

وندرس الآن الحالات الآتية

(١) إذا كانت $|a| < 1$ فإن $a^n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

$$\therefore\ \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-a}$$

$\therefore$ المتسلسلة الهندسية تكون تقاربية إذا كان $|a|<1$ ومجموعها هو $\frac{1}{1-a}$

(٢) إذا كان $|a|>1$ فإن $a^n \to \infty$ عندما $n \to \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة الهندسية تكون تباعدية عندما يكون $|a|>1$.

<u>مثال (٣):</u> أدرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots$

<u>الحل:</u> الحد العام هو $a_r = \frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية ومجموعها 1.

<u>تمرين:</u> أثبت أن المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5}$$

تقاربية وأن مجموعها يساوي ¼.

<u>الشرط الضروري والكافي لتقارب متسلسلة ما :</u>

من المعروف أن تقارب أي متسلسلة $\sum a_n$ يعتمد على تقارب مجموعها الجزئي، أي أن نهاية المجموع الجزئي يكون موجود ويساوي عدداً محدوداً عندما $n \to \infty$.

والسؤال الآن ما هو الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة تقاربية وللإجابة على هذا السؤال نقدم التعريف الآتي :

تعريف: الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتابعة (S_n) تقاربية هـو أنـه لأي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد العدد N بحيث

$$|S_{n+P} - S_n| < \varepsilon , \forall n \geq N; p = 1, 2, 3, ...$$

وبناء على التعريف السابق يمكن ذكر النظرية الأساسية (بدون برهان) والتي تعرف بنظرية كوشي (Cauchy)

نظرية (٢):

الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية هو أنـه لأي عدد موجب $\varepsilon > 0$ لابد من وجود العدد N بحيث يكون لكـل الأعـداد $n \geq N , n$ ولأي عدد طبيعي P يكون : $\left|\sum_{k=n+1}^{n+P} a_r\right| < \varepsilon$

الشرط الضروري لتقارب متسلسلة ما :

قد يتساءل القارئ متى تكون المتسلسلة بالضرورة تقاربية وللإجابة عن هذا السؤال سوف نناقش الشرط الضروري $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ لكي تكون أي متسلسـلة تقاربية.

أي أن المتسلسلة تكون تقاربية إذا كان حدها العام يؤول إلى الصفر عندما n تؤول إلى ∞.

البرهان: نفرض المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ تقاربية أي أن

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S \qquad (1)$$

حيث S_n هو مجموع المتسلسلة المحدودة.

وبالمثل يمكن القول أن

$$\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S \qquad (2)$$

وبطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) نجد أن :

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

وبوضع $S_n - S_{n-1} = a_n$ $\qquad \therefore \lim_{n \to \infty} a_n = 0$

وهذا يبرهن النظرية.

نتيجة ٢:

إذا كان الحد العام a_n في المتسلسلة $\sum a_n$ لا يؤول إلى الصفر عندما $n \to \infty$ تكون المتسلسلة تباعدية.

مثال (٤): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ تباعدية لأن :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

مثال (٥): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 400n}$ تباعدية لأن

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{5n^2 + 400n} = \frac{1}{5} \neq 0$$

ملحوظة : نلاحظ أن الشرط الضروري لتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن يكون

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

ولكنه ليس شرطاً كافياً ويتضح ذلك من المثال الآتي :

مثال (٦): في المتسلسلة التوافقية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \qquad (*)$$

يكون $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

في حين أن المتسلسلة (*) تباعدية ولإثبات ذلك نعتبر أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) + + 8\left(\frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

$\therefore$ المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ تباعدية.

بعض خواص المتسلسلات التقاربية :

(١) نفرض أن المتسلسلتين التقاربتين $\sum a_n$, $\sum b_n$ وأن مجموعهما على الترتيب R, H فإن المتسلسلة $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ تكون تقاربية وأن مجموعها هـــو R+H كذلك المتسلسلة $\sum (a_n - b_n)$ تكون تقاربية وأن مجموعها هـــو R-H. وإذا كانت λ أي عدد ثابت فإن $\sum \lambda a_n$ تكون تقاربية ومجموعها λ H.

البرهان: نفرض أن : $R_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $H_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$\therefore$ $R_n + H_n$ هو المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة $\sum (a_n + b_n)$.

، $\because$ $R_n \to R$, $H_n \to H$ عندما $n \to \infty$

$\therefore$ $R_n + H_n \to R + H$ عندما $n \to \infty$

$\therefore$ $\sum a_n + b_n$ تقاربية ومجموعها هو R+H.

ويمكن برهنة الحالات الأخرى بنفس الطريقة.

(ب) إذا كانت $\sum a_n , \sum b_n$ متسلسلتين تقاربيتين ومجموعهما على الـــترتيب R,H ونفرض أن $a_n \le b_n$ لكل قيم n فإن $R \le H$.

البرهان:

$$R_n = H_n \Leftarrow n \quad a_n \le b_n$$
$$R = \lim_{n \to \infty} R_n \;,\; \lim_{n \to \infty} H_n \; H$$

(جـ) نفرض أن $\sum a_n$ متسلسلة تقاربية وأن مجموعها R.

إذا حذفنا عدد محدود من حدود المتسلسلة فإن المتسلسلة الناتجة تقاربية ومجموعـــها هو $R - P$ حيث P مجموع الحدود المحذوفة.

إذا أضفنا عدد محدود من الحدود إلى المتسلسلة فإن المتسلسلة الناتجة تظل تقاربيـــة ومجموعها $R+P$ حيث P مجموع الحدود الباقية التي أضيفت.

مثال (٧): المتسلسلة $|x|<1 \quad x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ يمكن إيجادها من المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

بحذف الحدين الأول والثاني، إذن مجموع المتسلسلة المعطاة هو

$$\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$$

(٣.٥) اختبارات التقارب للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة:

هدفنا الآن أن نبحث عن اختبارات تقارب تمكننا مـــن أن نقـــرر هـــل المتسلسلة $\sum a_n$ تقاربية أم لا؟ (ليس من الضروري أن نجد مجموعـــها) وقبـــل دراسة اختبارات التقارب المختلفة نذكر النظرية الآتية :

نظرية (٣): الشرط الضروري والكافي لكي تكون المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تقاربية هو أن المجاميع الجزئية تكون محدودة.

البرهان: الشرط الضروري يتضح من الحقيقية التي تقول أن كل متتابعة تقاربية تكون محدودة، أثبت؟

الشرط الكافي : يتضح من الحقيقية التي تقول أن متتابعة المجاميع الجزئية تقاربية لابد وأن تكون محدودة.

الاختبار الأول : الصورة الأولى لاختبار المقارنة :

نفرض أن $\sum b_n , \sum a_n$ متسلسلتين ذاتا حدود غير سالبة (أي أن $a_n \geq 0 , b_n \geq 0$ لكل قيم n)

(i) إذا كان $a_n \leq b_n$ لكل قيم n وكانت $\sum b_n$ تقاربية فإن $\sum a_n$ تكون تقاربية.

(ii) إذا كانت $a_n \geq b_n$ لكل قيم n وكانت $\sum b_n$ تباعدية فإن $\sum a_n$ تكون تباعدية.

البرهان: نفرض أن $(t_n),(S_n)$ هما متتابعتي المجموعات الجزئية للمتسلسلتين $\sum a_n , \sum b_n$ على الترتيب أي أن

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ , t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

ونلاحظ أن $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$ ، $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq \ldots$

(i) إذا كانت $\sum b_n$ تقاربية فإن $n \to \infty$ عندما $t_n \to T$ ونلاحظ أن $t_n \leq T$ لكل قيم n . وبما أن $a_n \leq b_n$ لكل قيم n. إذن $S_n \leq t_n \leq T$ لكل قيم n.

ومن ذلك نستنتج أن S_n تـؤول إلى نهاية محدودة عندمــا $n \to \infty$. إذن $\sum a_n$ تقاربية.

(ii) إذا كانت $\sum b_n$ تباعدية فإن $t_n \to \infty$ عندما $n \to \infty$.

$\because$ $S_n \geq t_n$ لكل قيم n فإن $S_n \to \pm\infty$ عندما $n \to \infty$. $\therefore$ $r \sum_r a_n$ تباعدية.

<u>مثال (٨) :</u> اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ حيث $k > 1$.

<u>الحل:</u>

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{5^k} + \frac{1}{6^k} + \frac{1}{7^k} < \frac{4}{4^k} = \frac{1}{4^{k-1}} = \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2$$

$\therefore$ مجموع المتسلسلة أقل من $1 + \frac{1}{2^{k-1}} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^3 + \ldots$

والمتسلسلة الأخيرة هندسية لانهائية أساسها أقل من الواحد الصحيــح أذن فــهي متقاربة وبالتالي فإن المتسلسلة المعطاة تقاربية.

<u>مثال (٩) :</u> اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ حيث $k < 1$.

<u>الحل:</u> إذا كانت $k < 1$ فإن $n^k \leq n$ لكل قيم n. إذن $\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n}$ (لكل قيــم n)

وبالتالي يكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ وحيــث أن المتسلســلة $\sum \frac{1}{n}$ تباعديــة، إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ تباعدية.

ملحوظة : من المثالين (٨)، (٩) نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ تكون تقاربية إذا كان $k > 1$. وتكون تباعدية إذا كان $k \leq 1$.

مثال (١٠): اختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

الحل: من الواضح أن $\frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n}}$. إذن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

ولكن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ تباعدية، ∴ المتسلسلة الأصلية تباعدية.

الاختبار الثاني: الصورة الثانية لاختبار المقارنة :

نفرض أن $\sum a_n$, $\sum b_n$ متسلسلتين ذوي حدود موجبة إذا كان

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$$

حيث ℓ عدد محدود فإما أن تكون المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعدتين معاً.

مثال (١١): أختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$$

الحل: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

نقارن المتسلسلة السابقة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

وبذلك يكون $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1 \neq 0$

∴ المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعديتين معاً ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقاربيـــة

∴ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية.

مثال (١٢): نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n+1}{n^5+1}$

نقارن المتسلسلة $\sum a_n$ بالمتسلسلة $\sum \frac{1}{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^5+n^4+n^3}{n^5+1} = 3 \neq 0$$

∴ المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعدتين معاً ولكن المتسلسلة $\sum b_n$ تقاربية.

∴ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية.

مثال (١٣): أختبر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-n}{n^3+1}$.

الحل: نفرض أن $a_n = \frac{4-n}{n^3+1}$ وأن $b_n = n^{1-3} = \frac{1}{n^2}$، إذن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -1 \neq 0$

∴ المتسلسلتين تقاربيتين معاً أو تباعدتين معاً ولكن المتسلسلة $\sum b_n$ تقاربية.

∴ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية.

الاختبار الثالث (اختبار دالمبرت): الصورة الأولى لاختبار النسبة:

نفرض أن $\sum a_n$ متسلسلة ذات حدود موجبة ونفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

فيكون لدينا الحالات الآتية:ـــ

(i) إذا كان $L < 1$ تكون المتسلسلة تقاربية.

(ii) إذا كان $L > 1$ تكون المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كان $L=1$ يفشل الاختبار.

مثال (١٤) : اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n!}$$

$$\text{(iii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad \text{(iv)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}$$

الحل: (i) نفرض أن $a_n=\dfrac{3^n}{n},\ a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=3>1$$

∴ المتسلسلة تباعدية.

(ii) نفرض أن $a_n=\dfrac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n!},\ a_{n+1}=\dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(\sqrt{n}\right)^n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2},\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right)$$

$$=0.\sqrt{e}=0<1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(iii) نفرض أن $a_n=\dfrac{x^n}{n!},\ a_{n+1}=\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\frac{n!}{(n+1)!}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(iv) يترك كتمرين للطالب.

<u>الاختبار الرابع : (اختبار كوشي).</u> هذا الاختبار للمتسلسلات ذات الحدود الموجبة فقط. نفرض أنه لدينا متسلسلة ما $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بحيث $a_n>0$ لكل قيم n.

ونفرض أن $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$ ونعتبر الحالات الآتية :ـ

(i) إذا كانت $L<1$ ⇐ المتسلسلة تقاربية.

(ii) إذا كانت $L>1$ ⇐ المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كانت $L=1$ ⇐ الاختبار يفشل.

<u>مثال (١٥):</u> اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلات الآتية :

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n} \qquad \text{(iii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

<u>الحل:</u> نفرض أن $a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ولأن $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\frac{n}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(ii) نفرض أن $a_n=\frac{1}{(\log n)^n}$ إذن $\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\log n}$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة تقاربية.

(iii) نفرض أن $a_n = \frac{n}{2^n}$ إذن $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$

∴ المتسلسلة تقاربية.

ملحوظة: اختبار كوشي ودالمبرت يعتبرا غير عمليين في أيضاح تقارب بعض المتسلسلات ذات الحدود الموجبة وكمثال على ذلك إبحث تقارب المتسلسلة التوافقية التي على الصورة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \ k \in R \qquad (1)$$

وكما أثبتنا أن المتسلسلة (1) تباعدية إذا كان $k \leq 1$ والمشكلة تبقى غير محلوله عندما يراد بحث تقارب المتسلسلة (1) عندما $k > 1$ ولذلك نقدم اختباراً والذي يعتبر أهم من اختبار كوشي ودالمبرت وخاصة في بحث تقارب المتسلسلة (1) عندما $k>1$ والذي يسمى اختبار التكامل.

الاختبار الخامس : اختبار التكامل (Integral Test)

نظرية (١): نفرض أن الدالة $f(x)$ غير سالبة وغير تزايدية على الفترة $\{x : x \geq m\}$ حيث m عدد ثابت. إذن المتسلسلة

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \dots \qquad (2)$$

تكون تقاربية إذا كان وكان فقط نهاية المتتابعة (a_n) عندما $n \to \infty$ موجودة وتباعدية خلاف ذلك حيث

$$a_n = \int_m^n f(x)\,dx\,,\ \text{as}\, n \to \infty \tag{3}$$

<u>البرهان:</u> نفرض أن k أي عدد ويحقق الشرط $k \geq m-1$ ونفرض أن x بحيث يكون $k-1 \leq x \leq k$. ولكن من الفرض أن الدالة $f(x)$ غير تزايدية على الفترة المغلقة $[k-1, k]$.

والمتباينة

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \tag{4}$$

تكون محققة لكل $x \in [k-1, k]$ وحيث أن الدالة محدودة ومضطردة.

$\therefore$ الدالة $f(x)$ تكاملية على الفترة المغلقة $k-1 \leq x \leq k$. ويتضح من المتباينة (4) أن $\int_{k-1}^{k} f(k)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dx$

أو

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1) \tag{5}$$

والآن نبرهن المتباينة (5) لأي $k \geq m+1$

نفرض أنه كتبنا المتباينات لأي k حيث $k = m+1\ ,\ m+2\ , \ldots ,\ n$

حيث n أي عدد $(n > m)$

$$f(m+1) \leq \int_{m}^{m+1} f(x)\,dx \leq f(m)\,,\quad f(m+2) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x)\,dx \leq f(m+1)$$

....

$$f(n) = \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1)$$

وبجمع المتباينات السابقة نحصل على :

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \qquad (6)$$

وبوضع $s_n = \sum_{k=m}^{n} f(k)$ وباستخدام العلاقة (3) يمكن كتابة المتباينات (6) على الصورة

$$[S_n - f(m)] \le a_n \le S_{n-1} \qquad (7)$$

وباستخدام العلاقة (5) يمكن بسهولة برهان $a_n = \int_{m}^{n} f(x)\,dx$ موجودة.

<u>مثال (١٦):</u> أبحث تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \qquad (8)$$

<u>الحل:</u>

∵ هذه المتسلسلة يمكن اعتبارها على الصورة (2) عندما يكون $f(x) = \frac{1}{x^k}, m = 1$ والدالة $f(x)$ دالة تناقصية وموجبة على المنطقة $x > 1$.

∴ الاهتمام ببحث تقارب المتسلسلة (8) يكافئ بحث تقارب المتتابعة $\{a_n\}$

حيث

$$a_n = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^k}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-k}}{1-k}\right|_{x=1}^{n} = \dfrac{n^{1-k}-1}{1-k}, & k \ne 1 \\ \ln x \Big|_{x=1}^{x=n} = \ln n, & k = 1 \end{cases}$$

ومن ذلك يتضح أن المتتابعة $\{a_n\}$ تباعدية عندما $k \le 1$ وتقاربية عندما يكون $k>1$ ويكون

موجوده $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{k-1}$

مثال (١٧): أبحث تقارب المتسلسلة الآتية :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^B n} \qquad B>0 \qquad (9)$$

الحل: المتسلسلة يمكن اعتبارها على صورة المتسلسلة (2) عندما m=2 ،

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^B x}$$

وحيث أن الدالة $f(x) \geq 0$ غير تزايدية على الفترة $\{x \;\; x \geq 2\}$

$\therefore$ تقارب المتسلسلة (9) يكافئ تقارب المتتابعة (a_n) حيث

$$a_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln^B x}\, dx = \begin{cases} \left.\dfrac{\ln^{1-B} x}{1-B}\right|_{x=2}^{x=n} = \dfrac{\ln^{1-B} n - \ln^{1-B} 2}{1-B}, & B \neq 1 \\ \ln \ln n - \ln \ln 2 & , B=1 \end{cases}$$

ومن ذلك يتضح أن المتتابعة (a_n) تقاربية عندما $B>1$ وتباعدية عندما $B \leq 1$.

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية عندما $B>1$ وتباعدية عندما يكون $B \leq 1$

ملحوظة : باستخـــدام اختبار دالمبرت أو كوشي لبحث تقارب المتسلسلـــة في مثال (١٦) نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 1 \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^k = 1,\ \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$$

نجد أن اختبار كوشي ودالمبرت يفشلان في بحث تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$. ومـــن

ذلك يكون اختبار التكامل أقوى من اختبار دالميرت وكوشي.

الاختبار السادس : (اختبار راب) (Raabe's test)

نفرض أنه لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ ونفرض أن $\lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ فإن

(i) إذا كان $L > 1$، تكون تقاربية.

(ii) إذا كان $L < 1$، تكون المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كان $L = 1$، يفشل الاختبار.

مثال (١٨): اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)} \quad a > 0 \quad \text{عدد ثابت}$$

الحل: الحد العام هو

$$a_n = a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)} , \quad a_{n+1} = a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$$

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{a^{-\frac{1}{n}} - 1}{\left(-\frac{1}{n}\right)} = \frac{a^{-m} - 1}{-m}$$

$$\because \lim_{n \to \infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{m \to \infty} \frac{a^{-m} - 1}{-m} = \ln a$$ (باستخدام نظرية بيوبتال في النهايات)

$\therefore$ المتسلسلة تباعدية إذا كان $\ln a < 1 \Rightarrow a < e$ وتكون تقاربية إذا كان $\ln a > 1$ أي عند $a > e$ وإذا كان $a = e$ فإن الاختبار يفشل.

الاختبار السابع : (الصورة العامة لاختبار النسبة):

نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حدودها غير صفرية ونفرض أن $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

ونعتبر الحالات الآتية :ـــ

(i) إذا كانت $L < 1$، المتسلسلة تقاربية.

(ii) إذا كانت $L > 1$، المتسلسلة تباعدية.

(iii) إذا كانت $L = 1$، يفشل الاختبار.

مثال (١٩): اختبر من حيث التقارب والتباعد المتسلسلة :

$$1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\ldots$$

الحل: حيث أن المتسلسلة ذات حدود سالبة وموجبة فلذا نستخدم الصورة العامة لاختبار النسبة:

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\ ,\ a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{n}\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0<1$$

$\therefore$ المتسلسلة تقاربية.

(٤) المتسلسلات التذبذبية : (Alternating Series):

لقد تعاملنا حتى الآن مع المتسلسلات ذات الحدود الموجبة ونعلم أن المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون متتابعة المجموعات الجزئية لها متزايدة ولكن إذا أخذنا متسلسلة مثل : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ والتي لهـا حدود موجبة وسالبة فإن المجموعات الجزئية لها (S_n) سوف لا تكون متزايدة.

تعريف : المتسلسلة التي تتعاقب فيها الحدود الموجبة والسالبة تسمى متسلسلة تذبذبية.

الاختبار الثامن : (اختبار ليبنتز أو اختبار المتسلسلات التذبذبية):

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \ , \ a_n > 0$ تكون تقاربية إذا تحققت الشروط الآتية :

(i) المتتابعة $(a_n)=(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

تنازلية (أي تتناقص باستمرار). أي $a_{n+1} < a_n$ لجميع قيم n

(ii) نهاية الحد العام للمتتابعة (i) يقترب من الصفر $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

البرهان: حاصل جمع الحدود الأولى التي عددها 2 n هو

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

ومن (i) يكون كل قوس هذه الأقواس موجباً إذن S_{2n} مستمرة في الزيادة مع

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

ومن (i) أيضاً كل قوس من هذه الأقواس موجباً وهو أصغر من a لجميع قيم n

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} \quad , \ S < a_1$$

ولكن : $S_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

∴ المتسلسلة تقاربية ومجموعها S.

مثال (٢٠): اختبر من حيث التقارب والتباعد

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

الحل: (i) المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

واضح أن $\dots,\frac{1}{3}<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<1$ ، $\therefore$ حدود المتسلسلة تنازلية.

وبما أن
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$\therefore$ من اختبار ليبنتز المتسلسلة تقاربية.

(ii) المتسلسلة
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

واضح أن $\dots,\frac{1}{5}<\frac{1}{3},\frac{1}{3}<1$ ، $\therefore$ حدود المتسلسلة تناقصية.

وبما أن
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$$

$\therefore$ من اختبار ليبنتز تكون المتسلسلة تقاربية.

<u>(٥) التقارب المطلق والتقارب المشروط:</u>

(Absolutely and Conditionally Convergent Series)

<u>تعريف (١):</u> المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مطلقة التقارب إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ تقاربية.

<u>نظرية :</u> المتسلسلة مطلقة التقارب تكون تقاربية.

<u>البرهان:</u> نبرهن الآن أنه لأي عدد $\varepsilon>0$ يوجد العدد n بحيث يكون لكل الأعداد $n\,(n\ge N)$ ولآي عدد طبيعي p يكون

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

وباستخدام نظرية (٢) يكون

$$\sum_{K=n+1}^{N+P} |a_k|<\varepsilon \qquad (2)$$

$$\therefore \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \qquad (3)$$

وباستخدام (٢)، (٣) نحصل على $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \varepsilon$ وهذا يبرهن النظرية.

تعريف (٢): المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون مشروطة التقارب إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ تباعدية.

مثال (٢١): اختبر تقارب المتسلسلتين الآتيتين :

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{n^2}$$

الحل:

$$\text{(i)} \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية، إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ مطلقة التقارب

$\Leftarrow$ أنها تقاربية.

$$\text{(ii)} \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2x}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 2x}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ تقاربية، إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ مطلقة التقارب

وباستخدام النظرية السابقة فهي تكون تقاربية.

مثال (٢٢): اختبر تقارب كل من المتسلسلات الآتية :

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

الحل:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تباعدية، إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ مشروطة التقارب أو قصيرة التقارب.

(ii) يترك للطالب.

الاختبار التاسع : (اختبار دريشلت ــ آبل)(Dirichlet –Abel's test)

قبل ذكر اختبار دريشلت ــ آبل لتقارب المتسلسلات والتي ليس من الضروري أن تكون ذات حدود موجبة بل غالباً تكون متسلسلة ذات حدود متعاقبة. نقدم ما يسمى بخاصية آبل والتي تتشابه مع التكامل بالتجزئ.

خاصية آبل (Abel's Identity):

نفرض أن $u_1, u_2, u_3, \ldots, v_1, v_2, \ldots, v_n$ اعداد اختيارية ونفرض أن

$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

p, n اعداد اختيارية أيضاً، إذا الخاصية الآتية صحيحة

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k-1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n \qquad (*)$$

وتسمى الخاصية (*) بخاصية آبل.

<u>البرهان:</u> نفرض أن

$$u_k = S_k - S_{k-1} \qquad (**)$$

بالتعويض من (**) في الطرف الأيسر من (*) نحصل على

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k\ v_k = \sum_{k=n}^{n+p} \left(S_k - S_{k-1}\right) v_k$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p} S_k\ v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1}\ v_k$$

وبإنقاص دليل المجموع الأخير بمقدار الوحدة نحصل على

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k\ v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k - u_{k+1}$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k\ v_k + S_{n+p} - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k\ v_{k+1} - S_{n-1}\ v_n$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \left(v_k - v_{k+1}\right) + S_{n+p}\ v_{n+p} - S_{n-1}\ v_n$$

وهذا يبرهن خاصية آبل.

والآن نذكر اختبار دريشلت ـــ آبل لتقارب المتسلسلات التي تتعاقب فيها الحدود الموجبة والسالبة.

<u>اختبار دريشلت ـــ آبل :</u>

نفرض أن لدينا المتسلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k\ v_k \qquad (***)$$

تكون هذه المتسلسلة تقاربية إذا كانت المتتابعة (v_k) غير تزايدية وتتناقص باستمرار.

(ii) المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ لها المجاميع الجزئية محدودة.

<u>البرهان:</u> نفرض أن S_n هو المجموع الجزئي للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ولكن من الفـــرض يوجد العدد $M > 0$ بحيث يكون $S_n \leq M \text{ for all } n$

وباستخدام النظرية (٢) يكون من الكافي إثبات أنه لأي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد العـــدد N، $n \in N$ ولأي عدد طبيعي p يكون

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\, v_k\right| < \varepsilon \tag{1}$$

∵ المتابعة غير تزايدية ومتضاءله ∴ يوجد العدد N، لكـــــل عـــدد موجـــب $\varepsilon/(2M)$ بحيث يكون:

$$0 \leq v_n \leq \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (\text{for } n \geq N) \tag{2}$$

وباستخدام خاصية آبل لحساب الكمية التي في الطرف الأيسر للعلاقة (1) نجد أن

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k\, v_k \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_k|\left(v_k - v_{k+1}\right) + |S_{n+p}|\, v_{n+p} + |S_{n-1}|\, v_n \tag{3}$$

$$|S_n| \leq M$$

∵ يمكن الحصول على

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k\, v_k \leq \left(\sum_{k=n}^{n+p-1}\left(v_k - v_{k+1}\right) + v_{n+p}\right) + M\, v_n \tag{4}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\, v_k\right| \leq 2M\, v_n$$

من المتباينة (٢) نحصل على $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\, v_k\right| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$ وهذا يثبت المطلوب.

ملاحظة : نلاحظ أن اختبار ليبنتز يعتبر حالة خاصة من اختبار دريشلت آبل.

مثال (٢٣): اختبر تقارب المتسلسلة الآتية:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{2}{3n}+\ldots$$

الحل: يمكن ترتيب المتسلسلة السابقة لكي تكون على الصورة (***)

بوضع : $u_k=\frac{1}{k}, u_1=1, u_2=1, u_3=-2, u_4=1, u_5=1, u_6=-2$

وبذلك يكون

(١) المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ يكون لها مجاميع جزئية محدودة لأن:

$$S_1=1, S_2=2, S_3=0, S_4=1, S_5=2$$

(٢) المتسلسلة (v_k) غير تزايدية ومتضاءلة.

∴ باستخدام اختبار دريشلت ــ آبل يكون المتسلسلة تقاربية.

مثال (٢٤): ابحث تقارب المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}, x\in R$.

الحل: نضع $u_k=\cos kx, v_k=\frac{1}{k}$

والآن نحاول حساب متتابعة المجاميع الجزئية $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ للمتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$.

∴ لأي عدد k يكون

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

وبجمع العلاقة السابقة بالنسبة إلى k من 1 إلى n نحصل على

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{1}{2}x = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$$= 2 S_n \sin\frac{x}{2}$$

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

لذلك إذا كانت $x \notin \{2\pi k : k \in Z\}$ فإن $|S_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$

∴ يمكننا حينئذ استخدام اختبار دريشلت آبل لنستنتج أن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$ تتقارب لكل $x \notin \{2\pi k, k \in Z\}$، نلاحظ أن المتسلسلة تتباعد عند $x = 2k$ لبعض قيم $k \in Z$.

تمرين: ابحث تقارب المتسلسلة $x \in R$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$

(متروك للطالب والحل يماثل مثال (٢٤)).

(٦) متسلسلات القوى (Power Series):

المتسلسلة التي على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

تسمى متسلسلة قوى في x والمتسلسلة تكون تقاربية لبعض قيم x (الموجبة والسالبة) وقد تكون غير تقاربية لبعض القيم الأخرى وإذا كانت المتسلسلة

$$|a_o| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots \qquad (2)$$

تقاربية لبعض قيم x فإن المتسلسلة (١) تكون مطلقة التقارب وبالتالي تقاربية لهذه

القيم.

تعريف: إذا كانت المتسلسلة مطلقة التقارب لقيم x والتي تحقق $|x|<r$ وتباعدية إذا كانت $|x|>r$ فإن العدد r يسمى نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وفي هذه العجالة نعطي بعض الأمثلة لمتسلسلات القوى :

مثال (٢٥): أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة الأسية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ تقاربية.

الحل: نفرض أن $a_n = \frac{x^n}{n!}, a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

∴ باستخدام الصورة الثانية لاختبار النسبة نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

∴ المتسلسلة مطلقة التقارب (تقاربية) لجميع قيم n .

مثال (٢٦): أوجد قيمة x التي تجعل المتسلسلة اللوغاريتمية

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ تقاربية.

الحل: نفرض أن $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{n+1}$

باستخدام اختبار النسبة المطلق نجد أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\,n}{n+1}\right| = |x|$$

وتكون المتسلسلة تقاربية إذا كان $-1 < x < 1$ ويكون $R = 1$ وتباعدية إذا كان

$|x|>1$

<u>مثال (٢٧):</u> أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلتان

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots \qquad (i)$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots \qquad (ii)$$

تقاربيتان.

<u>الحل:</u> باستخدام اختبار النسبة المطلقة يمكن أن نثبت أن (i), (ii) تقاربيتان لجميع قيم $x\in R$ وبالتالي يكون نصف قطر التقارب لانهائي.

تمارين (٣.٥)

أ) اختبر من حيث التقارب والتباعد كلاً من المتسلسلات الآتية :

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n-3}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n}$ (5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+4n}{n^4-8}$ (6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$

(7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n+2}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+n}$

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (11) $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\dots$

(12) $\frac{2}{1}+\frac{2\times5}{1\times5}+\frac{2\times5\times8}{1\times5\times9}+\dots+\frac{2\times5\times8\dots(2n-1)}{1\times5\times9\times\dots(4n-3)}$

(13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-9}{n^4+2n^3+7n+11}$

(14) $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\dots$

(15) $\frac{6}{1\times3\times5}+\frac{8}{3\times5\times7}+\frac{10}{5\times7\times9}+\dots$

(16) $\frac{1+2}{2^3}+\frac{1+2+3}{3^3}+\frac{1+2+3+4}{4^3}+\dots$

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+1}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{n(n+3)(n+5)}$

(19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$ (20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1/n}$

(21) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ (22) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+6}}$

ب) استخدم اختبار التكامل لاختبار تقارب وتباعد المتسلسلات الآتية:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$

(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ (5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$

(6) أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{-p}}{n}$ تقاربية إذا كان $p>1$ وتباعدية عندما يكون $p\le 1$.

(7) هل يستخدم اختبار ليبنتز لبحث تقارب المتسلسلة؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\dots$$

(جـ) أي من المتسلسلات الآتية تتقارب تقارباً مطلقاً وأيـــها يتقـــارب تقاربـــاً مشروطاً

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\,2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} / n$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, n}{\log n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, 5^n}{n!}$ (8) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^7}$

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}\, 2^n}{\left(n^6+1\right)^2}$ (10) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\log n}$

(د) أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة الآتية تقاربية (نصف قطر التقارب)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2}\, x\, n^2$

(4) $1+\frac{100x}{1.3}+\frac{1000x^2}{1.3.5}+\frac{1000000x^3}{1.3.5.7}+\dots$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2m)!}{(n!)^2} x^n$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$