الباب الرابع

الكسور الجزئية

Partial fractions

كثيراً ما يصادفنا في مبادئ الجبر عملية إيجاد المجموع الجبري لعدة كسور معطاة فنحصل على كسر واحد وذلك بتوحيد مقامات هذه الكسور وإيجاد المجموع الجبري لهذه الكسور فنحصل على كسر واحد وعكس هذه العملية وهو تحويل الكسر الواحد إلى عدد من الكسور والتي تسمى كسور جزئية.

وتستخدم هذه الطريقة لتحويل الكسر (الدالة الكسرية) $\frac{f_n(x)}{g_m(x)}$ إلى كسوره الجزئية حيث كل من $g_m(x)$، $f_n(x)$ كثيرة حدود على الصورة

$$f_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$g_m(x) = b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$$

<u>تعريف:</u> يسمى الكسر $\frac{f_n(x)}{g_m(x)}$ كسراً حقيقياً Proper إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام أي أن $n < m$. أما إذا كان $n \geq m$ يسمى الكسر غير حقيقي improper ومثال ذلك الكسور الآتية :

$$\frac{x+1}{x^2+1}, \frac{x^4+1}{x^5+2x^4+3}, \frac{1}{x+1}$$

كسور حقيقية (دوال كسرية) proper rational function.

بينما الكسور الآتية :

$$\frac{x+1}{x-1}, \frac{x^2+1}{x+1}, \frac{x^5+3x^4+2}{x^4+2x+3}$$ كسور غير حقيقية.

ويمكننا في الواقع وبدون أي خسارة في التعميم أن نفترض أن درجة البسط $f_n(x)$ أقل من درجة المقام أي أن $n < m$ لأن خلاف ذلك يمكننا أن نبدأ بقسمة البسط على المقام إلى أن نحصل على خارج قسمة عبارة عن كثيرة حدود أخرى درجتها تساوي درجة البسط مطروحاً منه درجة المقام وباقي درجته تقل عن درجة المقام.

وتتلخص فكرة الكسور الجزئية في تجزئ الكسر الحقيقي $\dfrac{f_n(x)}{g_m(x)}$ حيث $n<m$ إلى مجموع جبري بأشكال أبسط وذلك بحسب العوامل الأولية للمقام $g_m(x)$ ولإجراء التحليل إلى كسور جزئية نعتبر الحالات الآتية :

(١) المقام يقبل التحليل الى عوامل أولية جميعها من الدرجة الأولى ومختلفة:

ليكن المقدار في هذه الحالة على الصورة $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\phi x)}{\lambda (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)}$

حيث $\lambda \neq 0$ ، $\alpha_r \neq \alpha_s$ حيث $r, s = 1, 2, 3, \dots, n, r \neq s$

في هذه الحالة المقدار يقبل التحليل إلى كسور جزئية على الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, A_n$ ثوابت تتعين من المتطابقة

$$\frac{1}{\lambda} f(x) = A_1(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) + A_2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n) + \dots + $$
$$+ A_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_{n-1})$$

وهذه متطابقة صحيحة لجميع قيم x.

ويتعين $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بوضع $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على الترتيب وبذلك نحصل على التحليل المناظر لكسوره الجزئية.

__مثال (١):__ حلل الكسر الآتي إلى كسوره الجزئية

$$\frac{5-2x}{6x^3+x^2-x} \qquad (*)$$

__الحل:__ نحاول تحليل المقام إلى عوامله الأولية :

$$\therefore \frac{5-2x}{6x^3+x^2-x} = \frac{5-2x}{x(3x-1)(2x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{3x-1} + \frac{A_3}{2x+1}$$

$$\therefore A_1(3x-1)(2x+1) + A_2\, x(2x+1) + A_3\, x(3x-1) = 5-2x$$

بوضع $x = 0$ نحصل على $A_1 = -5$ ، وبوضع $x = \frac{1}{3}$ نحصل على $A_2 = \frac{39}{5}$ وبوضع $x = -\frac{1}{2}$ نحصل على $A_3 = \frac{24}{5}$.

وبالتعويض عن قيم A_1, A_2, A_3 بالقيم التي حصلنا عليها نجد أن الكسر (*) تحول إلى كسورة الجزئية:

$$\frac{5-2x}{6x^3+x^2-x} = \frac{-5}{x} + \frac{\frac{30}{5}}{3x-1} + \frac{\frac{24}{5}}{2x+1}$$

(٢) جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى وبعضها مكرر :

ليكن من بين عوامل المقام $g(x)$ العامل $\alpha x + \beta$ مكرر r من المرات فقط أي من بين هذه العوامل يوجد العامل $(\alpha x + \beta)^r$ بحيث لا تقبل $g(x)$ القسمة على $(\alpha x + \beta)^m$ إذا كانت $m < r$ يناظر هذا العامل تحليل جزئي على الصورة

$$\frac{f(x)}{(\alpha x + \beta)^r} = \frac{A_1}{\alpha x + \beta} + \frac{A_2}{(\alpha x + \beta)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(\alpha x + \beta)^r}$$

مثال (٢): حلل الكسر الآتي إلى كسورة الجزئية $\frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)}$

الحل: الكسر يناظر تحليل جزئي على الصورة:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{3x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+1}$$

بوضع $x = -1$ نحصل على $A_1 = -\frac{1}{2}$ وبوضع $x=1$ نحصل على $A_3 = 2$ وبمقارنة معامل x^2 على الطرفين نحصل على $A_1 + A_2 = 0, A_2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{3x+1}{(x-1)(x^2-1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

(٣) المقام g(x) يشتمل من بين عوامله على عامل من الدرجة الثانية غير مكرر ولا يقبل التحليل إلى عاملين حقيقين من الدرجة الأولى:

ليكن هذا العامل هو $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ حيث $\beta^2 < 4x\gamma$ جزء التحليل المناظر لهذا العامل يكون على الصورة: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Ax+B}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$

مثال (٣): حلل الكسر الآتي إلى كسورة الجزئية $\frac{1-2x}{x^3+1}$

الحل: $\frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{A}{x+1} = \frac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)} =$ الكسر

$$\therefore 1-2x = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$$

وبوضع $x=-1$ نجد أن $A=1$ وبمقارنة x^2 على الطرفين نجد أن: $A+B=0 \Rightarrow B=-1$

والحد المطلق نحصل على $A+C=1 \Rightarrow C=0$

التحليل المناظر هو: $\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-x+1}$

مثال (٤): حلل الكسر الآتي إلى كسوره الجزئية: $\dfrac{5x-7}{(x+3)\left(x^2+2\right)}$

الحل: $\dfrac{5x-7}{(x+3)\left(x^2+2\right)}=\dfrac{A_1}{x+3}+\dfrac{A_2x+A_3}{x^2+2}$

$$\therefore A_1\left(x^2+2\right)+(x+3)\left(A_2x+A_3\right)=5x-7$$

بوضع $x=-3$ نحصل على $A_1=-2$ وبمقارنة معامل x^2 على الطرفين ينتج أن:

$A_1+A_2=0\Rightarrow A_2=2$ وبمقارنة الحد المطلق على الطرفين نجد أن:

$$2A_1+3A_3=-7 \therefore 3A=-7-2A_1 \therefore A_3=-1$$

الكسر يناظر تحليل جزئي على الصورة :

$$\frac{5x-7}{(x+2)\left(x^2+2\right)}=\frac{-2}{x+3}+\frac{2x-1}{x^2+2}$$

مثال (٥): حلل الكسر الآتي إلى كسوره الجزئية: $\dfrac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)\left(x^3-1\right)}$

الحل:

$$\therefore \frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)\left(x^3-1\right)}=\frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+x+1}$$

$$\therefore A_1(x-1)\left(x^2+x+1\right)+A_2\left(x^2+x+1\right)+\left(A_3x+A_4\right)(x-1)^2=$$
$$x^3+5x^2+5$$

نضع $x=1$ نحصل على $A_2=5$ وبمقارنة معامل x^3 نحصل على $A_1+A_3=1$.

وبمقارنة معامل x^2 نحصل على $A_4=2A_3$. وبمقارنة الحد المطلق نجد أن:

$$-A_1+A_4=0 \quad \therefore A_1=A_4$$

ويكون $A_1=\dfrac{2}{3}, A_3=\dfrac{1}{3}, A_4=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \frac{x^3+5x^2+4x+5}{(x-1)\left(x^3-1\right)}=\frac{\frac{2}{3}}{(x-1)}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2+x+1}$$

(٤) المقام يشمل على عامل مكرر من الدرجة الثانية:

نفرض أن المقام يشتمل على العامل $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^r$ $r \geq 2$ العامل مكـــرر r من المرات أي يقبل القسمة على $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^r$ ولا يقبل القسمة على قوة أعلى.

∴ يناظر المقدار $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^r$ تحليل جزئي على الصورة

$$\frac{A_1 x+B_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{A_2 x+B_2}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^2}+\frac{A_3 x+B_3}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^3}$$

$$+\ldots+\frac{A_r x+B_r}{\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)^r}$$

مثال (٦): حلل الكسر الآتي إلى كسوره الجزئية : $\frac{2x^2+x+4}{x\left(x^2+2\right)^2}$

الحل: نحلل الكسر إلى كسوره الجزئية كالآتي

$$\frac{2x^2+x+4}{x\left(x^2+2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{A_1 x+B_1}{x^2+2}+\frac{A_2 x+B_2}{\left(x^2+2\right)}$$

$$2x^2+x+4=A\left(x^2+2\right)^2+\left(A_1 x+B_1\right)+\left(x^2+2\right)x+\left(A_2x+B\right)(x)$$

بوضع x=0 نحصل على A=1 وبمقارنة معامل x^4 نجد أن $A_1+A=0 \Rightarrow A_1=-1$

وبمقارنة معامل x نجد أن $B_1=0$ ويكون $B_2=0, A_2=0$

$$\therefore \frac{2x^2+x+4}{x\left(x^2+2\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\left(x^2+2\right)^2}$$

تمارين (٤)

(١) حلل الكسر $\frac{x^2+20}{(x-2)^2(x+4)}$ إلى كسوره الجزئية

(٢) حلل الكسور الآتية :

(i) $\frac{2x+8}{x^3-8}$ (ii) $\frac{1}{1-x^4}$

(iii) $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$ (iv) $\frac{x^2+3x+1}{x^2-1}$

(v) $\frac{2x^2+3x+1}{(x^2+1)(x^2+3)^2}$ (vi) $\frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

(vii) $\frac{3x^3-6x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$ (viii) $\frac{x^2+7x+1}{(x+2)^2(x^2+1)^2}$

(ix) $\frac{1}{x(x^2+4)}$ (x) $\frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

(٣) أوجد قيمة a, b, c إذا كان $\frac{x^3-1}{(x+1)(x+2)}=x+a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x+2}$

(إرشاد: $\frac{x^3-1}{(x+1)(x+2)}=x-3+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$)

(٤) حلل الكسر الأتي $\frac{x^2}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ إلى مجموعة كسوره الجزئية.

(٥) إذا كان $\frac{x^2+a}{(x-a)(x-a^2)(x-a^3)}=\frac{b}{x-a}+\frac{c}{x-a^2}+\frac{d}{x-a^3}$ فأوجد قيم الثوابت b, c, d بدلالة a حيث $a\neq 0, a\neq 1$