الباب الثالث

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

يقصد بالاستنتاج الرياضي إثبات صحة كثير من القوانين الرياضية ذات المستويات المختلفة وهي تعتمد في جوهرها على خطوتين أساسيتين الأولى لها الطابع التجريبي والثانية لها الطابع المنطقي (الاستدلالي).

طريقة الاستنتاج الرياضي:

تعتمد طريقة الاستنتاج الرياضي أساساً على المسلمة (axiom) الثالثة من مسلمات العالم الرياضي (Piano) (1858-1932) والتي أوضحت خواص الأعداد الطبيعية N وهذه المسلمات هي :

(i) لكل عنصر $n \in N$ يوجد عدد آخر n' يسمى تالي العنصر n.

(ii) العنصر 1 ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية N وهو ليس تالي لأي عنصر أخر في N وأن العنصر 1 هو أول عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية.

(iii) كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية تحتوي العنصر 1 وتحتوي العنصر التالي لكل عنصر فيها هي المجموعة N بذاتها.

وتعتمد طريقة البرهان باستخدام الاستنتاج الرياضي على الخطوات الثلاث التالية:

أولاً: نختبر صحة العلاقة الرياضية عند بعض القيم الصحيحة الموجبة ولتكن فرضاً عند $n = 1, n = 2$ وهذه الخطوة في حد ذاتها لا تحمل يقيناً مطلقاً يثبت صحة تعبير ما أو عدم صحته.

ثانياً: نفرض صحة العلاقة عند $n \in N, n = k$

ثالثاً: نثبت أن العلاقة المعطاة يجب أن تكون صحيحة عند $n = k + 1$ إذا صح ما افترضنا صحته في ثانياً ومن ذلك نستنتج أن التعبير صحيح دائماً لكل قيم $n \in N$.

ملاحظات:

(١) هناك حالات خاصة فيها التعبير المعطى لا يتحقق صحته عند $n=1$ ولكنها تكون صحيحة لكل الأعداد التي تلي نقطة بداية أخرى ولذا نبدأ بإثبات صحة التعبير المعطى اعتباراً من نقطة البداية هذه كما يتضح من الأمثلة التي سنتكلم عنها فيما بعد.

(٢) هناك حالات نجد فيها أن التعبير المعطى تتحقق صحته عند $n=1$ ولكنها تكون غير صحيحة عند $n=2, 3, \ldots$ ولهذا يجب اختبار صحة التعبير عند $n=1, 2, \ldots$ على الأقل ويتضح ذلك من المثال التالي:

مثال: لنفترض العلاقة $1+2+3+\ldots+(2n-1)=\dfrac{n^2+1}{2}$

هذه العلاقة صحيحة عند $n = 1$ حيث الطرف الأيمن (R. H. S)

$R.H.S=\dfrac{(1)^2+1}{2}=1$، إذن

الطرف الأيسر (L. H. S) $L.H.S = 1$

ولكن عند $n = 2$ نجد أن العلاقة غير صحيحة حيث $R.H.S=\dfrac{(2)^2+1}{2}=2.5$

$L.H.S=1+3=4\neq R.H.S$

ونستنتج أن العلاقة غير صحيحة لجميع قيم $n \in N$.

(٣) الخطوات الثلاث للبرهان في طريقة الاستنتاج الرياضي متلازمة ولا يمكن

الاستغناء عن إحداها.

ويمكننا فهم واستيعاب طريقة الاستنتاج الرياضي من حلول الأمثلة الآتية :

<u>مثال (١):</u> باستخدام طريقة الاستنتاج الرياضي برهن أن

$$\text{(i)}\quad \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{(iii)}\quad \sum_{r=1}^{n} r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

<u>الحل:</u> يجب على الطالب أن يتذكر دائماً القوانين الثلاث السابقة للحاجة إليـــها في بعض مسائل جمع المتسلسلات فيما بعد.

(i) لسهولة البرهان نضع $f(n) = \sum_{r=1}^{n} r\ ,\ g(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

نستخدم خطوات الاستنتاج الرياضي كالأتي :

(١) عند $n = 1$ نجد أن: $f(1) = 1,\ g(1) = 1$ إذن $f(1) = g(1)$

أي أن العلاقة صحيحة عند $n = 1$.

(٢) نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي يكون $f(k) = g(k)$

$$\sum_{r=1}^{k} r = \frac{k(k+1)}{2}$$

(٣) نحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k + 1$

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 1 + 2 + 3 + \dots + k + k + 1 = g(k) + k + 1 \\ &= f(k) + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = g(k+1) \end{aligned}$$

ومن ذلك يتضح صحة العلاقة عند $n = k+1$ متى كان صحيحاً في حالة $n = k$ مع إثبات أن القانون صحيح في حالة $n = 1$ إذن فهو صحيح لجميع قيم n.

(ii) نفرض أن $f(n) = \sum_{r=1}^{n} r^2 \ , g(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(١) عند $n = 1$ يكون : $f(1) = 1, g(1) = \frac{1\times2\times3}{6} = 1$

$\therefore f(1) = g(1)$

(٢) نفرض صحة العلاقة عند $n = k$ أي يكون $f(k) = g(k)$

$$\therefore 1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

(٣) نحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k+1$

$$f(k+1) = 1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = g(k) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = g(k+1)$$

$\therefore \ f(k+1) = g(k+1)$

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج صحة العلاقة لجميع قيم n.

(iii) يترك للطالب.

<u>مثال (٢):</u> أثبت بطريقة الاستنتاج الرياضي صحة العلاقة التالية :

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$$

<u>الحل:</u> للسهولة نضع $f(n) = \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2), g(n) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

(i) عند $n = 1$ فإن $f(1) = 6, g(1) = 6$

أي أن $f(1) = g(1)$ ويمكن إثبات أن $f(2) = g(2)$

(ii) نفرض صحة العلاقة عند القيمة الصحيحة الموجبة $n = k$ أي يكون

$$f(k) = g(k)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{k} r\,(r+1)\,(r+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) \qquad (1)$$

(iii) نحاول إثبات صحة العلاقة عند القيمة الصحيحة الموجبة التاليــة $n = k + 1$

وذلك بإضافة الحد $(k+1)\ (k+2)\ (k+3)$ إلى طرفي العلاقة (1)

$$\therefore f(k+1) = \sum_{r=1}^{k} r\,(r+1)\,(r+2) + (k+1)\,(k+2)\,(k+3)$$

$$= \frac{1}{4}k\,(k+1)\,(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= (k+1)\,(k+2)\,(k+3)\left[\frac{1}{4}k + 1\right]$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = g(k+1)$$

وبهذا نكون قد أثبتنا صحة العلاقة عند $n = 1, 2, \ldots, k, k+1$ إذن فهي صحيحـــة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

<u>مثال (٣):</u> مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن

$$1\times2\times3\times4 + 2\times3\times4\times5 + 3\times4\times5\times6 + \ldots \text{ إلى } n \text{ حداً}$$

$$= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

<u>الحل:</u> نحاول أن نستنتج الصورة العامة للحد النوني في الطرف الأيسر من العلاقـــة المعطاة وهو $n\ (n+1)\ (n+2)\ (n+3)$، ولذا يمكن صياغة العلاقة المعطاة على الصورة

$$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\ldots+n(n+1)(n+2)(n+3)=$$
$$\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \qquad (1)$$

ولإثبات صحة العلاقة (1)

أولاً: نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة

(١) عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S=1\times2\times3\times4=24$$
$$R.H.S=\frac{1}{5}(1)(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)=24$$

$\because$ الطرفان متساويان، $\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=1$

(٢) عند القيمة $n= 2$

$$L.H.S=1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5=144$$
$$R.H.S=\frac{1}{5}(2)(2+1)(2+2)(2+3)(2+4)=144$$

$\because$ الطرفان متساويان، $\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n=2$

ثانياً: لنفرض صحة العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n = k$ أي

$$1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\ldots+k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n=k+1$

وذلك بإضافة الحد $(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ إلى كل من طرفي العلاقة (2)

$$\therefore\ 1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+3\times4\times5\times6+\ldots+$$
$$+k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$
$$=\frac{1}{5}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) \qquad (3)$$

واضح أن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعد استبدال k بـ (k+1) وذلك يؤكد صحة العلاقة (2) وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة المعطاة صحيحة عند $n = 1, 2, ..., k, k+1$ إذن فهي صحيحة لجميع القيم الصحيحة الموجبة.

مثال (٤): مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots \text{ إلى } n \text{ حداً } = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

الحل: الحد النوني في الطرف الأيسر هو $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

∴ يمكن كتابة العلاقة المعطاة في الصورة

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \qquad (1)$$

أولاً: لإثبات صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة

(١) عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S=\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}\ ,\ R.H.S=\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1}{6}$$

∵ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

(٢) عند القيمة $n= 2$

$$L.H.S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}=\frac{5}{24}, L.H.S=\frac{2(2+3)}{4(2+1)(2+2)}=\frac{5}{24}$$

∵ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 2$

ثانياً: نفترض صحية العلاقة (1) عند القيمة الموجبة $n = k$ أي

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} \quad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n=k+1$

وذلك بإضافة الحد $\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ إلى كل من طرفي العلاقة (2)

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} \quad (3)$$

واضح أن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعد استبدال كل k بـ $k+1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2)، وبهذا نكون قد أثبتنا العلاقة المعطاة عند $n = 1, 2, \dots, k, k+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٥): مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن :

مجموع n من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r يساوي $\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ حيث $r\neq1$ وأن $a, r\in R$.

الحل: أي المطلوب إثبات أن

$$a+ar+ar^2+\dots \text{ إلى } n \text{ حداً } = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (*)$$

والحد النوني في هذه الحالة هو ar^{n-1} ولذلك يمكن كتابة (*) على الصورة :

$$a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}=\frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1} \qquad (1)$$

ولإثبات صحة العلاقة (1) نتبع الآتي :

أولاً: نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة

(١) عند القيمة $n = 1$:

$$L.H.S=a,\ \ R.H.S=\frac{a\left(r^1-1\right)}{r-1}=a$$

∵ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

(٢) عند القيمة $n = 2$:

$$L.H.S=a+ar=a(1+r)$$
$$R.H.S=\frac{a\left(r^2-1\right)}{r-1}=\frac{a(r+1)(r-1)}{r-1}=a(r+1)$$

∴ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 2$.

$$a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}=\frac{a\left(r^{k-1}-1\right)}{r-1} \qquad (2)$$

نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التاليـــة $n = k+1$

وذلك بإضافة الحد $a\,r^k$ إلى كل من طرفي العلاقة (2).

$$\therefore\ a+ar+ar^2+...+ar^{k-1}+ar^k=\frac{a\left(r^k-1\right)}{r-1}+ar^k$$
$$=\frac{a\left(r^k-1\right)+ar^k(r-1)}{r-1}=\frac{ar^k-a+ar^{k+1}-ar^k}{r-1}=\frac{a\left(r^{k+1}-1\right)}{r-1} \qquad (3)$$

وواضح أن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعـــد استبدال k بـــ $k + 1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2).

وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة المعطاة صحيحة عند $n = 1, 2, 3, ..., k, k+1$
إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٦): مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن :

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots \text{ إلى } n \text{ حداً } = 1-\frac{1}{(1+n)!}$$

الحل: الحد النوني للطرف الأيسر في العلاقة المعطاة هو $\frac{n}{(n+1)!}$ ولذا يمكن صياغة العلاقة المعطاة على الصورة :

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(1+n)!} \qquad (1)$$

ولإثبات صحة العلاقة (1) نتبع الآتي :

أولاً: نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة.

١ــ عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2},\ R.H.S=1-\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$$

$\because$ الطرفان متساويان، $\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

٢ــ عند القيمة $n = 2$

$$L.H.S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}, R.H.S=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$\because$ الطرفان متساويان، $\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n = 2$

ثانياً: لنفترض صحة العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n = k$ أي

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(1+k)!} \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n=k+1$

وذلك بإضافة الحد $\frac{(k+1)}{(k+2)!}$ إلى كل من طرفي العلاقة (2).

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(1+k)!}+\frac{(k+1)}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{(k+2)}{(k+2)(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{(k+2)}{(k+2)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=1-\frac{k+2-k-1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!} \qquad (3)$$

وواضح أن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعـــد استبدال k بـــ $k+1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2).

وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة المعطاة صحيحة عند $n = 1, 2, ..., k, k+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٧): مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينة :

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,,\, x>-1 \qquad (1)$$

الحل: لإثبات صحة العلاقة (1) نتبع الآتي :

أولاً: نثبت صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة.

١ــ عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S=(1+x)^1=1+x,\ \ R.H.S=1+(1)x=1+x$$

وبتحقيق أن المتباينة (1) صحيحة عند $n = 1$ نظراً لتحقق علاقة التساوي بين طرفي المتباينة.

٢ــ عند القيمة $n = 2$

$$L.H.S=(1+x)^2=1+2x+x^2\ ,\ R.H.S=1+2x$$

ويتحقق أن المتباينة (1) صحيحة عند $n = 2$ نظراً لتحقق علاقة أكبر من بين طرفي المتباينة.

ثانياً: لنفترض صحة العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n = k$ أي

$$(1+x)^k \geq 1+kx \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التاليـة $n=k+1$ أي:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx)\\ &\geq 1+x+kx+kx^2\\ &\geq 1+(k+1)x \qquad (3)\end{aligned}$$

وواضح أن العلاقة (3) على صورة العلاقة (2) بعد استبدال كل من k بـــ $k+1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2). وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة (1) صحيحة عنــد $n=1, 2, ..., k, k+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (٨): أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي صحة

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ ,n>1 \qquad (1)$$

الحل: لإثبات صحة المتباينة (1) نتبع الآتي :

أولاً: نختبر صحة المتباينة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة الأكبر من الواحد الصحيح.

$$L.H.S=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+0.7071=1.7071,\ R.H.S=\sqrt{2}=1.4140$$

$L.H.S > R.H.S$ ∵ ، ∴ المتباينة صحيحة عند $n = 2$.

٢ـــ عند القيمة $n = 3$

$$L.H.S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.2845, R.H.S = \sqrt{3} = 1.7321$$

$L.H.S > R.H.S$ ∵ ، ∴ المتباينة صحيحة عند $n = 3$.

ثانياً: لنفرض صحة المتباينة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n = k$ حيث $k > 1$

أي :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} \qquad (2)$$

نحاول إثبات صحة المتباينة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n = k+1$

وذلك بإضافة الحد $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ إلى كل من طرفي المتباينة (2).

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \qquad (i)$$

$$= \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \sqrt{k+1} \qquad (3)$$

حيث أن $k > 0$، $\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$

وواضح أن الطرف الأيمن للمتباينة (3) على صورة الطرف الأيمن للمتباينة (2) بعد استبدال كل من k بـــ (k+1) وذلك يؤكد صحة المتباينة (2). وبهذا نكون قد أثبتنا أن المتباينة المعطاة صحيحة عند $n = 2, 3, \ldots, k, k+1$ إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الموجبة الأكبر من الواحد الصحيح.

مثال (٩): باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن $(x^n - y^n)$ يقبل القسمة على $x-y$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

$$P_{n-1}(x, y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} \qquad (1)$$

حيث $P_{n-1}(x, y)$ هي دالة كثيرة الحدود في x, y من الدرجة n-1 ولإثبات صحة قابلية القسمة في العلاقة (1)

أولاً: نختبر صحة قابلية القسمة في العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة.

١ــ عند القيمة $n = 1$

$$P_0(x, y) = \frac{x - y}{x - y} = 1$$

$\therefore$ $x^n - y^n$ يقبل القسمة على $x - y$ عند $n = 1$.

٢ــ عند القيمة $n = 2$

$$\therefore \; P_1(x, y) = \frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} = x + y$$

$\therefore$ $x^n - y^n$ يقبل القسمة على $x - y$ عند $n = 2$.

ثانياً: لنفترض صحة قابلية القسمة في العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة أي $n=k$

$$P_{k-1}(x, y) = \frac{x^k - y^k}{x - y} \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة قابلية القسمة في العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n = k + 1$

$$P_k(x, y) = \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} = \frac{x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1}}{x - y}$$

$$= \frac{x^k(x-y)}{x-y} + \frac{y\left(x^k - y^k\right)}{x-y} \qquad (3)$$

وواضح أن الحد الأيسر من الطرف الأيمن في العلاقة (3) يقبل القسمة على $x - y$ بينما الحد الأيمن من الطرف الأيمن فهو أيضاً يقبل القسمة على $x - y$ بناء على افتراض صحة ذلك في ثانياً ونستنتج أن $\left(x^{k+1} - y^{k+1}\right)$ يقبل القسمة على $(x-y)$ وبهذا نكون قد أثبتنا أن $x^n - y^n$ يقبل القسمة على $x - y$ عند $n=1, 2,...,k,k+1$

$\therefore$ فهو يقبل القسمة على $(x-y)$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

<u>مثال (١٠):</u> مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت أن $3^{2n} + 7$ يقبل القسمة دائماً على 8 حيث n عدد صحيح موجب.

<u>الحل:</u> لنفترض أن $3^{2n} + 7$ يقبل القسمة على 8 ولنفترض أن

$$P(n) = \frac{3^{2n} + 7}{8} \qquad (1)$$

ولإثبات صحة قابلية القسمة في العلاقة (1) نتبع الآتي :

<u>**أولاً:**</u> نختبر صحة قابلية القسمة عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة.

١ــ عند القيمة $n=1$

$$P(1) = \frac{3^2 + 7}{8} = \frac{9+7}{8} = 2$$

$\therefore$ $3^{2n} + 7$ تقبل القسمة على 8 عند $n = 1$.

٢ــ عند القيمة $n= 2$

$$\therefore\ P(2) = \frac{3^4 + 7}{8} = \frac{81+7}{8} = 11$$

$\therefore$ $3^{2n} + 7$ تقبل القسمة على 8 عند $n=2$.

ثانياً: لنفترض صحة قابلية القسمة في العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة n=k أي :

$$P(k)=\frac{3^{2k}+7}{8} \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة قابلية القسمة في العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية n = k+1 أي :

$$P(k+1)=\frac{3^{2(k+1)}+7}{8} \qquad (*)$$

وبطرح (2) من (*) نحصل على

$$P(k+1)-P(k)=\frac{3^{2(k+1)}+7}{8}-\frac{3^{2k}+7}{8}$$

$$=\frac{3^{2k}\left(3^{2}-1\right)}{8}=\frac{3^{2k}(8)}{8} \qquad (3)$$

وواضح أن بسط الطرف الأيمن في (3) يقبل القسمة على 8 وبناء على افتراض صحة أن P(k) في ثانياً يقبل القسمة على 8 فإن P(k+1) يقبل القسمة على 8 أيضاً وبهذا نكون قد أثبتنا أن $3^{2n}+7$ يقبل القسمة على 8 عند n=1,2,...,k,k+1

∴ فهي تقبل القسمة على 8 لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

مثال (١١): باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n}\right)=n\,x^{n-1} \qquad (1)$$

الحل: لإثبات صحة العلاقة (1) نتبع الآتي :

أولاً: نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة.

١ــ عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S = \frac{d}{dx}(x) = 1, \quad R.H.S = 1x^{n} = 1$$

∵ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n=1$

٢ــ عند القيمة $n=2$

$$L.H.S = \frac{d}{dx}\left(x^{2}\right) = 2x, \quad R.H.S = 1x^{2-1} = 2x$$

∵ الطرفان متساويان، ∴ العلاقة صحيحة عند $n=2$

ثانياً: نفترض صحة العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n=k$ أي

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k}\right) = k\,x^{k-1} \qquad (2)$$

ثالثاً: نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة التالية $n=k+1$ وذلك بإيجاد المعامل التفاضلي للدالة x^{k+1} كما يلي:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{k+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{k}\,.\,x\right) = x^{k}\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}x^{k} = x^{k} + x\left[k\,x^{k-1}\right]$$

$$= x^{k} + k\,x^{k} = (k+1)\,x^{k} \qquad (3)$$

واضح أن الطرف الأيمن للعلاقة (3) على صورة الطرف الأيمن للعلاقة (2) بعد استبدال كل k بـ $k+1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2). وبهذا نكون قد أثبتنا صحة العلاقة (1) عند $n=1, 2, ..., k, k+1$. إذن فهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

تمارين (٣)

١ــ مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن :

(i) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots +$ إلى n حداً $=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(ii) $2\times 5+3\times 7+4\times 9\ \ldots +$ إلى n حداً $=\frac{1}{6}n\left(4n^2+21n+35\right)$

(iii) $1\times 3+3\times 5+5\times 9\ \ldots +$ إلى n حداً $=\frac{1}{3}n\left(4n^2+6n-1\right)$

(iv) $2+3\times 2+4\times 2^2+5\times 2^3+\ldots$ إلى n حداً $=n\,2^n$

(v) $1\times 2\times 3+3\times 4\times 5+5\times 6\times 7+\ldots$ إلى n حداً $=n(n+1)\left(2n^2+2n-1\right)$

(vi) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{5}{2\times 3}+\frac{11}{3\times 4}+\ldots$ إلى n حداً $=\frac{n^2}{1+n}$

(vii) $\frac{1}{3\times 4\times 5}+\frac{2}{4\times 5\times 6}+\frac{3}{5\times 6\times 7}+\ldots$ إلى n حداً $=\frac{n(n+1)}{6(n+3)(n+4)}$

٢ــ مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن

(i) $1!+2\times 2!+3\times 3!+\ldots$ إلى n حداً $=(n+1)!-1$

(ii) $\sum_{r=1}^{n}\left(r^2+1\right)r!=n(n+1)!$ (iii) $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+4r^2}=\frac{n}{1+2n}$

(iv) $\sum_{r=1}^{n}\left[(2r-1)^2-(2r)^2\right]=-n(2n+1)$

(v) $\sum_{r=1}^{n}\left(r^3+r\right)=\frac{1}{4}n(n+1)\left(n^2+n+2\right)$

(vi) $\sum_{r=1}^{n}\left(r^3-r\right)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)$

(vii) $\sum_{r=1}^{n}\left(r^2+r\right)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

٣ـــ مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت صحة المتباينات الآتية :

(i) $n^3 - 3n^2 + 2n \geq 0$ (ii) $n! > 2^n, n > 3$

(iii) $(a+1)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)a^2}{2}, \ a > 0$

٤ـــ مستخدماً طريقة الاستنتاج الرياضي أثبت صحة قابلية القسمة في كل من

(i) $\left(5^{2n} - 1\right) \div 24$ (ii) $\left(6^{2n-1} + 8\right) \div 7$

(iii) $\left(5^n - 2^n\right) \div 3$ (iv) $\left(49^n + 16n - 1\right) \div 64$

(v) $\left(4^{2n+1} + 1\right) \div 5$ (vi) $\left(n^3 + 2n\right) \div 3$

(vii) $\left(3^{2n+2} - 8 - 9\right) \div 64$ (viii) $\left(7^{2n} - 48n - 1\right) \div 2304$

(ix) $\left(n^2 - 17\right) \div 8$ حيث n فردية (x) $\left\{\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n\right\} \div 2, n \in Z^+$

٥ـــ مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت أن :

(i) $\left(x^n - 1\right)$ يقبل القسمة على (x-1) لجميع قيم n الصحيحة، $x \neq 1$.

(ii) $\left(x^{2n} - y^{2n}\right)$ يقبل القسمة على (x+y) لجميع قيم n حيث $x \neq y$.

(iii) $\left(x^{2n-1} - y^{2n-1}\right)$ يقبل القسمة على x+y لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(iv) $\left(a^n - b^n\right)$ تقبل القسمة على (a-b) وذلك لجميع قيم n الصحيحة الموجبة الأكبر من الواحد الصحيح.

٦ـــ مستخدماً الاستنتاج الرياضي أثبت صحة أن

(i) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$

(ii) $(x+a)^n = \sum_{r=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} x^{n-r} a^r, \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(iii) $\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$

(iv) $\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

(v) $\dfrac{d^n}{dx^n}[\ln(1+x)] = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

(vi) $\dfrac{d^n}{dx^n}\left[a^{mx}\right] m^n\, a^{mx}\,(\ln a)^n \;,\; a \neq 1, a > 0$

(vii) $\dfrac{d^n}{dx^n}[\cos ax] = a^n \cos\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

(viii) $\dfrac{d^n}{dx^n}[\sin ax] = a^n \sin\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

العلاقات السابقة تعتبر قوانين مشهورة في الجبر والتفاضل.