الباب الأول

المنطق الرياضي

Mathematical Logic

(١.١) معنى المنطق الرياضي :

المنطق هو تحليل طرق التعليل ويهتم بصور الفكر لا بمادته. أما المنطق الرياضي فهو فرع من فروع الرياضيات ويهتم بدراسة أشكال التعليلات التي يتعامل بها الرياضيون وعليه لكي نجد الطريق الطبيعي إلى المنطق الرياضي يجب أن نختبر الطرق التي يستخدمها الرياضيون.

حاول الكثير من علماء الرياضيات أمثال ليبنتز وجورج بول، رسل إيجاد بُنية منطقية تصلح أن تكون أساساً لقوالب كتابات العلم بشكل عام والرياضيات بشكل خاص ولكن التطور السريع في البناء الرياضي المتكامل والتداخل الواضح بين الرياضيات والمنطق حتم إعادة النظر في بناء الرياضيات وكتابتها بشكل موحد يضمن تطبيقها في شتى فروع المعرفة. وحيث أن نظرية المجموعات تعتبر حجر الزاوية في أساسيات الرياضيات والمنطق كذلك هي الأداة التي بواسطتها نعرف ونحلل المفاهيم الرياضية.

ولذلك نقوم بعرض المساواة Equality. من المفاهيم الأساسية التي تعود الطالب على استخدامها هو مفهوم المساواة والذي يرمز له بالرمز (=) ويعرف كالآتي : إذا كان كل من a, b رمزاً لشيء ما فالعبارة a = b تعني أن الرمزين يدلان على الشيء نفسه. وإذا كان a يرمز لشيء معين، b يرمز لشيء أخر فعندئذ يقال أن a

لا تساوي b وتكتب $a \neq b$. والمساواة تحقق الخواص الأساسية التالية (ليكن a,b,c رمز لشيء ما) فإن :

(١) $a = a$ reflexive　　　(٢) إذا كان $a = b$ فإن $b = a$ symmetry

(٣) إذا كان $a = b$, $a = c$ فإن $a = c$ transitive.

(٤) إذا كان $a = b$ فكل خاصية يحققها a يجب أن يحققها b والعكس صحيح وتسمى هذه بقاعدة التعويض substitution.

الجمل : تستخدم الجمل للتعبير عن فكرة أو أفكار معينة فمثلاً يستخدم الرياضيون **الجمل الرياضية** للتعبير عن أفكارهم، مثلاً:

(مجموع قياسات زوايا أي مثلث تساوي $180°$).

والجملة قد تكون خبرية والذي يهمنا هو فقط الجمل الخبرية وبالأخص

العبارات: العبارة هي جملة خبرية مفيدة وتكون إما صادقة وإما كاذبة (لا يجوز أن تكون صادقة وكاذبة في آن واحد) وسوف نرمز للعبارات بالرموز... p, q, r, ويكون :

١. صدق أو كذب العبارة يسمى بقيمة صدق العبارة.

٢. العبارة الصادقة لها قيمة صدق T (truth) والعبارة الكاذبة لها قيمة F (false) وأحياناً يرمز لقيم الصدق بالقيم 1، 0 للقيمة صادق أو كاذب على الترتيب لتتناسب مع بعض التخصصات مثل الدوائر المنطقية في علوم الحاسب، فمثلاً:

١ـــ القاهرة عاصمة مصر : عبارة صادقة.　　٢ـــ $7 = 1 + 2$ عبارة كاذبة.

٣ـــ إلى أين أنت ذاهب؟ هذه جملة استفهامية وليست عبارة.

٤ـــ لا تلعب بالنار، هذه جملة طلبية وليست عبارة.

٥ـــ هو لاعب كرة قدم جيد : ليست عبارة. ٦ـــ $x + 1 = 0$ ليست عبارة.

<u>**المتغيرات:**</u> المتغير هو حـــرف (أو رمز أخر) من الممكن أن يمثل عناصر متعـددة من مجموعة شاملة ما، مثلاً في الجملة (هو لاعب كرة قدم جيد) نلاحظ أن "هــو" متغير وفي الجملة $x + 1 = 0$ نلاحظ أن x متغير (قد يكـــون $x \in N$ أو $x \in R$، ...).

<u>**ملاحظة :**</u> من الممكن <u>تحويل جملة ما إلى عبارة</u> وذلك بإبدال المتغير بعـدد أو بإضافة تعابير مثل "لكل" أو "لا يوجد" إلى الجملة. مثلاً $x < 3$ ليست عبـــارة ولكن $1 < 3$ عبارة (صادقة) كذلك (لكل عدد حقيقي $x <3, x$) هـــي عبــارة (كاذبة).

<u>**الجمل المفتوحة :**</u> لتكن A مجموعة وليكن $P(x)$ تعبير ما في متغـــير x فــإن $P(x)$ يسمى <u>جملة مفتوحة</u> في x معرفة علـــى A إذا وفقـــط إذا كـــانت $P(a)$ (صادقة أو كاذبة) لكل $a \in A$.

<u>أمثلة:</u>

١. لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية فإن التعبير $x < 3$ هو جملة مفتوحـــــة في x معرفة على R لأنه لو أخذنا $r \in R$ فإن $r < 3$ تصبح عبارة صادقة أو كاذبة.

٢. لتكن $A = \{0, 1, 2, 3\}$ فإن التعبير "$x+1 < 3$" يشكل جملة مفتوحـــة في x معرفة على A لاحظ أن $0 + 1 < 3$ عبارة صادقة، $1 + 1 < 3$ عبارة صادقة، $2 + 1 < 3$ عبارة كاذبة، $3 + 1 < 3$ عبارة كاذبة.

مجموعات الحل: لتكن جملة مفتوحة $P(x)$ في x معرفة على مجموعة A ولتكن $a \in A$، إذا كانت $P(x)$ عبارة صادقة فيسمى a حلاً للجملة المفتوحة $P(x)$ وأن مجموعة كل حلول $P(x)$ تسمى مجموعة الحلول للجملة ويرمز لها بالرمز T_P أي أن $T_P = \{a \in A |$ عبارة صادقة $P(a)\}$

مثال: لتكن $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ولتكن $x-2 < 3$ جملة مفتوحة في x معرفة على A فإن $T_P = \{0, 1, 2, 3\} = A$.

ملاحظة: أن مجموعة الحلول لجملة تكون دائماً مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة.

تمارين (1.1)

١. أي من الجمل الآتية عبارات مع التعليل :

(i) $x < 5$ (ii) $x + y = y + x$

(iii) لا يوجد عدد طبيعي x بحيث $x < 3$ (iv) هذه جملة كاذبة.

(v) إذا كان x, y عددين حقيقين فإن $x + y = y + x$

٢. عين المتغيرات في كل الجمل أعلاه.

٣. أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي :

(i) $x - 2 < 5$، المجموعة الشاملة هي $\{0, 1, 2, 8\}$

(ii) $x^2 + 1 = 0$، المجموعة الشاملة هي R.

٤. أوجد قيمة صدق كل مما يأتي، حيث $f, x \in R$ دالة ذات قيم حقيقية:

(i) لكل x يكون $x^2 = 0$.

(ii) إذا كان $x = 0$ أو $x = 1$ فأن $x^2 = x$.

(iii) لكل عدد طبيعي a يكون $a^2 = a$.

(iv) يوجد عدد طبيعي a بحيث أن $a^2 = a$.

(v) يوجد عدد قياسي (نسبي) b بحيث أن $b < 2$.

(٢.١) جداول الصدق :

النفي Negation : لتكن P عبارة فإن العبارة "ليس P" تسمى نفي P ويرمز لها بالرمز $\sim P$.

مثال (١): P الرياضيات لغة العلم فإن $\sim P$: ليست الرياضيات لغة العلم.

ويحقق النفي البديهية الآتية : إذا كانت العبارة P صادقة فإن $\sim P$ تكون عبارة كاذبة والعكس بالعكس.

لتوضيح العلاقة بين عبارة ونفيها من خلال جدول يسمى جدول الصدق

P	~P
T	F
F	T

ملاحظة: $\sim\sim P = P$

العبارات المركبة : من الممكن ربط عباراتين أو أكثر بإحدى الروابط التالية : الرابطة $\wedge$ وتسمى دالة الربط، أو $\vee$ وتسمى دالة الفصل، إذا كان ... فإن ...، إذا وفقط إذا، ... وهكذا.

فالناتج من عملية الربط يكون عبارة تسمى عبارة مركبة ويطلق على العبارات الأصلية أسم مكوناتها، أن قيمة صدق العبارة المركبة تعتمد على قيم صدق مكوناتها وعلى نوع الروابط الموجودة ويتضح ذلك من :ـ

١ـ دالة الوصل Conjunction (باختصار and) :

لتكن p, q عبارات فأن العبارة p و q ويرمز لها بـالرمز $p \wedge q$ وتسمى وصل p, q وتكون صادقة فقط في الحالة التي فيها q, p لهما قيمة الصدق صادق ويتضح ذلك من خلال الجدول التالي :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال (٢) : إذا كان p : الخوارزمي عالم عربي، q : أرشميدس عالم إغريقي. واضح أن العبارة $p \wedge q$ وهي الخوارزمي عالم عربي وأرشميدس عالم إغريقي، صادقة.

مثال (٣) : $p : 5 + 3 = 6, q : 4 + 4 = 8$

p كاذبة، q صادقة بينما $p \wedge q$ وهي $5 + 3 = 6 \wedge 4 + 4 = 8$ كاذبة.

٢ـ دالة الفصل Disjunction (باختصار or) :

لتكن كل من p, q عبارات فإن العبارة p أو q ويرمز لها بـالرمز $p \vee q$ ونسميها فصل p, q وتكون صادقة إذا كانت واحدة على الأقل من مكوناتها صادقة، ويتضح ذلك من :ـ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال (٤): P :الإسكندرية في جنوب مصر، q: أسيوط في شمال مصر واضح أن كل من p, q لهما قيمة صدق كاذب. وعليه فإن

$p \vee q$: الإسكندرية في جنوب مصر أو أسيوط في شمال مصر، تكون كاذبة.

$\sim q$: أسيوط في جنوب مصر فأن $q \vee \sim q$: أسيوط في جنوب مصر أو أسيوط في شمال مصر، تكون صادقة.

ومن هذا المثال نتوصل إلى الصورة العامة $p \vee \sim p$ تكون دائماً صادقة ويتضح هذا من خلال هذا الجدول

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

مثال (٥) : العبارة $(5 > 20) \vee \left(\sqrt{x^2} = |x|\right)$ تكون صادقة باعتبار أن $x \in R$.

٣ــ الاشتراط Conditional: إذا كان p, q عبارتين، نرمز للعبارة المركبة : إذا كانت p فإن q بالرمز $p \to q$ ونسميها عبارة إشتراطية، نسمي p الفرضية hypothesis، ونسمي q النتيجة conclusion أو المقدمة والتالية.

والاشتراط (دالة الشرط) تحقق بديهية أن العبارة المركبة $p \to q$ تكون صادقة دائماً ماعدا في حالة p صادقة، q كاذبة ولها جدول الصدق التالي :

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(*)

مثال (٦) : نفرض أن أحد الطلاب ذكر العبارات التالية :ـ إذا حصلت على امتياز في مادة الرياضيات فإنني سوف أتخصص في قسم الرياضيات بالكلية.

لتكن p : حصلت على امتياز في الرياضيات، q : سوف أتخصص في قسم الرياضيات.

الحالات الأربع التي سبق عرضها في جدول الصدق (*) هي :

(i) p صادقة، q صادقة.

(ii) p (صادقة) : حصلت على امتياز في الرياضيات، q (كاذبة) : بمعنى لا أتخصص في الرياضيات.

(iii) p : (كاذبة) بمعنى لا أحصل على امتياز في الرياضيات، q (صادقة) : أتخصص في الرياضيات.

(iv) p (كاذبة) : بمعنى لا أحصل على امتياز في الرياضيات، q (كاذبة) : بمعنى لا أتخصص في الرياضيات.

فيبدو معقولاً أن نقول أنه كان كاذباً فقط في الحالة (ii).

مثال (٧) : إذا كان $p:2=3\,,\, q=\sqrt{9}=5$

p عبارة كاذبة، q عبارة كاذبة وفي نفس الوقت $p\rightarrow q$ عبارة صادقة.

مثال (٨): إذا كانت $p:\sqrt{x^2}=|\,x\,|\,,\, x\in R$ عبارة صادقة، $q = 5 + 2 = 8$ عبارة كاذبة، وفي نفس الوقت $p\rightarrow q$ عبارة كاذبة.

ملاحظة: على القارئ أن يلاحظ أن التعابير الآتية تعطي نفس المعنى :

(١) $p\rightarrow q$ ، (٢) إذا كان p فإن q

(٣) p تؤدي إلى q (p تفضي إلى q)　　　(٤) q إذا p (p فقط إذا q)

(٥) q هي شرط ضروري إلى p necessary condition

(٦) p هي شرط كافي إلى q sufficient condition

(٧) q تستنتج من p

العبارة (٦) حسب جدول الصدق (*) حيث نلاحظ أنه إذا كانت p صادقة، $p \to q$ صادقة فأن q يجب أن تكون صادقة. كذلك يمكن شرح العبارة (٥) حيث أنه إذا كانت $p \to q$ صادقة وكانت q كاذبة فيجب أن تكون p كاذبة أيضاً. أي أن q تكون كاذبة تحتم p أن تكون كاذبة لأن p لو كانت صادقة وكانت $p \to q$ صادقة أيضاً لأصبحت q صادقة.

<u>مثال (٩)</u> : العبارة p : المضلع ليس له أقطار، العبارة q : المضلع مثلثاً. يمكن ربط p، q بالدالة $p \to q$.

<u>**ملاحظة :**</u> العبارة المركبة ($p \to q$) تختلف عن ($q \to p$) كما في الجدول الآتي :

p	q	$p \to q$	$q \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

لنوضح الجدول السابق بهذا المثال.

<u>مثال (١٠)</u>: العبارة : إذا درس محمد فسوف ينجح تختلف عن العبارة : إذا نجح محمد فهذا يعني أنه درس.

٤ـ العبارة ثنائية الاشتراط Biconditional statements: لتكن p, q عبارة، سنرمز للعبارة المركبة "p إذا وفقط إذا q" بالرمز $p \leftrightarrow q$ ونسميها عبارة ثنائية الاشتراط، وتكون العبارة المركبة $(p \leftrightarrow q)$ صادقة عندما تكون p, q لهما نفس قيم الصدق وخلاف ذلك تكون كاذبة وتوضح من خلال الجدول الآتي :

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ملاحظة : العبارة المركبة $p \leftrightarrow q$ تعني أن "p إذا وفقط إذا q" وهذا بدورها تعني (p إذا q) و (p فقط إذا q) أي $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ كما هو موضح بجدول الصدق الآتي :

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ملاحظة : التعابير الآتية لها نفس المعنى :

(i) $p \leftrightarrow q$ (ii) p هي شرط ضروري وكافي إلى q.

(iii) q هي شرط ضروري وكافي إلى p. (iv) p إذا وفقط إذا q.

(v) q إذا وفقط إذا p. (vi) إذا p، فإذن q وبالعكس.

(vii) إذا q، فإذن p وبالعكس.

ملاحظة : أحد معاني $(p \leftrightarrow q)$ هو (p هي شرط ضروري وكافي إلى q) وهـذا يتضح من : $p \leftrightarrow q$ تعني $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p هي شرط ضروري إلى q يعني $p \rightarrow q$ ، p شرط كـافي إلى q يعـني $p \rightarrow q$

فإذن p شرط ضروري وكافي إلى q يعني $((q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q))$ أي $p \leftrightarrow q$.

تمارين (١.٣)

(أ) أوجد قيم الصدق للعبارات (التقارير) الآتية :

١ـــ $\forall x \in R : (q \neq 3) \wedge \left(\sqrt{x^2} = |x|\right)$ ٢ـــ (π عدد غير قياسي).

٣ـــ $2 = \sqrt{4} \longrightarrow \int x^2\, dx = x^4$

٤ـــ 5 عدد حقيقي $\longleftrightarrow$ $\frac{2}{3}$ عدد طبيعي

٥ـــ 2 عدد صحيح $\longleftrightarrow$ نهر النيل في مصر.

(ب) اكتب كلاً من الجمل الآتية بالشكل $p \rightarrow q$ وبين المقدمة والتالية

١ـــ لا يوجد تحليل إلى n طالما n عدد أولي. ٢ـــ $x \in II$ إذا كان $x \in N$.

٣ـــ العدد الصحيح هو عدد نسبي. ٤ـــ المربع هو مستطيل.

٥ـــ $x = y$ لأنه $3x = 3y$. ٦ـــ المربعات ليست مثلثات.

(جـــ) عبر عن كل مما يلي بالشكل $p \leftrightarrow q$

١ـــ $a\,b = 0$ إذا وإذا فقط $a=0$ أو $b=0$.

٢ـــ $2x - 1 = 0$ تكافئ $x = \frac{1}{2}$.

٣ـــ الدالة f مستمرة (متصلة) إذا وإذا فقط f تفاضلية.

٤ـــ $x=4$ إذا وفقط إذا $3x = 12$.

(٣.١) عبارات تحتوي على أكثر من رابط : إذا كان $p, q \in II$ وكان $q \neq 0$ فأن $\frac{p}{q} \in Q$ ولنحاول أن نعبر عن ذلك بشكل رموز كما يلي:

$$(p \in II \wedge q \in II \wedge q \neq 0) \rightarrow \frac{p}{q} \in Q$$

الأمثلة الآتية توضح للطالب كيفية كتابة جداول الصدق لجمل فيها أكثر من رابط.

مثال (١): جدول الصدق للعبارة $p \wedge \sim q$ يأخذ الشكل الأتي :

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

مثال (٢): جدول الصدق للعبارة $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ له الشكل الآتي:

p	q	$p \vee q$	$q \wedge p$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

التكافؤ المنطقي Logical equivalence : يقال بأن العبارة p تكافئ العبارة q منطقياً إذا وفقط إذا كان (جدول صدق p هو نفسه جدول صدق q) ونعبر عن ذلك بالرمز $p \equiv q$.

مثال (٣): وضح أن $p \to q \equiv \sim p \vee q$ وذلك باستخدام جدول الصدق

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

لاحظ أن العمودين (5) ,(3) متماثلان فإن $p \to q \equiv \sim p \vee q$

ملاحظات: لأي عبارة p يكون $p \vee p \equiv p, p \wedge p \equiv p, p \equiv p$ ،

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$$

التتولوجي (تحصيل حاصل) Toutology: إذا كانت عبارة مركبة صادقة بغض النظر عن قيمة صدق مكوناها فتسمى تتولوجياً أو قانون (تحصيل حاصل) الوسط المرفوع.

مثال (٤): العبارة $p \vee \sim p$ هي تحصيل حاصل (ويمكن التأكد من ذلك من خلال جدول الصدق)

ملاحظة : لتكن P، Q عبارة فإن $P \equiv Q$ إذا وفقط إذا كانت العبارة $P \leftrightarrow Q$ تحصيل حاصل.

قانون القياس Law of syllogism: لتكن كل من R, Q, P عبارة فإن العبارة $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$ هي تتولوجي (وهذا يسمى قانون القياس) والذي له جدول الصدق الآتي

1	2	3	4	5	6	7	8
P	Q	R	$P\to Q$	$Q\to R$	$(4)\wedge(5)$	$P\to R$	$(6)\wedge(7)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

لاحظ أن العمود (8) يحتوي على T's فقط (صادق دائماً).

التناقض Contradiction: إذا كانت عبارة مركبة كاذبة بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى تناقضاً.

مثال (٥): العبارة $P\wedge\sim P$ هي تناقض وهذا ما يسمى بقانون التناقض.

ملاحظة: العبارة Q تكون تناقضاً إذا وفقط إذا كانت $\sim Q$ هي تتولوجي.

مثال (٦): $P\vee\sim P$ هي تتولوجي إذن $\sim(P\vee\sim P)$ تناقض وباستخدام جدول الصدق نرى أن $\sim(P\vee\sim P)\equiv P\wedge\sim P$ فعلية فإن $P\wedge\sim P$ تكون تناقضاً كما ذكرنا سابقاً.

ملاحظة: لتكن P عبارة ما فأن

$P\wedge I\equiv P$ (I رمز تحصيل حاصل)، $P\wedge O\equiv O$ (O رمز التناقض)،

$P\vee O\equiv P, P\vee I\equiv I$

ويتضح ذلك من جدول الصدق

P	I	O	$P\wedge I$	$P\wedge O$	$P\vee I$	$P\vee O$
T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	F

تمارين (١.٣)

(١) أكتب جدول الصدق للعبارات الآتية :

$$\sim p\wedge q\,,\, p\rightarrow \sim q\,,\, p\wedge q\rightarrow p\vee q,\sim(p\wedge q)\vee\sim(p\leftrightarrow q)\,.$$

(٢) عبر عما يلي باستخدام $\vee, \wedge, \sim, \leftrightarrow, \rightarrow$

(i) إذا كان $q\neq 0, p, q\in \mathrm{II}$ فيكون $\frac{p}{q}\in Q$.

(ii) الدالة f قابلة للأشتقاق و g قابلة للأشتقاق فقط إذا كانت $g\circ f$ قابلة للأشتقاق.

(٣) أي من العبارات التالية هي تتولوجي

(i) $P\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$ (ii) $\sim(P\wedge Q)\leftrightarrow(\sim P\vee\sim Q)$

(٤) بين صدق كل مما يلي :

(i) $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ (ii) $p\wedge t\equiv p,$ t عبارة صادقة

(iii) $p\vee f\equiv p,$ f عبارة كاذبة (iv) $(p\rightarrow\sim q)\equiv(q\rightarrow\sim p)$

(٥) بين أن $((p\rightarrow q)\wedge p)\wedge\sim q$ تناقض.

(٤.١) الاستنتاج المنطقي(الأقتضاء المنطقــي)Logical implication:

لتكن كل من p، q عبارة، يقال أن العبارة p تقتضي منطقيـــاً العبـــارة q (أو q تستنج منطقياً من p) إذا وفقط إذا كانت العبارة $(p \to q)$ هي تتولوجي ويعبر عن ذلك بالرمز $(p \Rightarrow q)$.

مثال (١): لتكن $P:[(p \to q) \wedge (q \to r)]$، $Q:(p \to r)$

لقد برهنا سابقاً بأن العبارة $(P \to Q)$ هي تتولوجي فأن $P \Rightarrow Q$

نظرية : لتكن كل من P, Q عبارة فإن

(i) $P \Rightarrow Q$ إذا وفقط إذا $\sim P \vee Q$ هي تتولوجي.

(ii) إذا كانت $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ فأن $P \equiv Q$

البرهان:

(i) حسب التعريف يكون $P \Rightarrow Q$ إذا وفقط إذا $P \to Q$ هي تتولوجي ولكـــن $P \to Q \equiv P \vee Q \sim$ فإذن $P \Rightarrow Q$ إذا وفقط إذا $\sim P \vee Q$ هي تتولوجي.

(ii) $P \Rightarrow Q$ تعني أن $P \to Q$ تتولوجي، $Q \Rightarrow P$ فـــإذن $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ هي تتولوجي. أي أن $P \leftrightarrow Q$ هي تتولوجي. أي أن $P \equiv Q$

تعريف: العبارة $Q \to P$ تسمى معكوس Converse العبارة $P \to Q$، لاحظ أن العبارة ومعكوسها غير متكافئين بصورة عامة، أي أن $(P \to Q) \not\equiv (Q \to P)$ فإذن $P \Rightarrow Q$ لا تعني بالضرورة $Q \Rightarrow P$.

تعريف: العبارة $(\sim Q \to \sim P)$ تسمى معاكس إيجابي Contra positive للعبارة $(P \to Q)$

لاحظ أن $(P \rightarrow Q) \equiv (\sim Q \rightarrow \sim P)$ فإذن $(P \Rightarrow Q)$ تعني $(\sim Q \Rightarrow \sim P)$.

مثال (٢): العبارة : (المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الساقين) تكافئ العبارة (المثلث غير المتساوي الساقين يكون غير متساوي الأضلاع) لأن العبارة الأولى من نوع $P \rightarrow Q$ والعبارة الثانية من نوع $\sim Q \rightarrow \sim P$.

جبر العبارات : لتكن P عبارة فإن

(١) خواص التحايد Idempotent Laws

(i) $P \wedge P \equiv P$ (ii) $P \vee P \equiv P$

(٢) خاصية التجميع Associativity

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R), \quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

(٣) خواص التبادل Commutativity

$$P \vee Q \equiv Q \vee P, \; P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

(٤) خواص التوزيع Distributivity

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R), \quad P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

(٥) خواص العبارات المحايدة Identity

$$P \vee O \equiv P, P \wedge I \equiv P, \; P \vee I = I, \; P \wedge O = O$$

علماً بأن O هو تناقض، I تتولوجي.

(٦) خواص المتممات Complementarity

$$P \vee \sim P \equiv I, \; P \wedge P \equiv O, \; \sim(\sim P) \equiv P, \sim I \equiv O, \sim O \equiv I$$

(٧) قوانين دي مورجن De Morgen Laws

$$(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q, \quad \sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$$

ويمكن إثبات القوانين السابقة كلها وذلك باستخدام جداول الصدق. وباستخدام هذه القوانين نستطيع أن نستغني في كثير من الأحيان عن جداول الصدق ونوضح

ذلك من المثال الآتي :

مثال (٣) : بسط العبارة الآتية $\sim(P \vee \sim Q)$

الحل: قانون دي مورجن $\sim(P \vee \sim Q) = \sim P \wedge \sim(\sim Q)$

قانون المتمم $= \sim P \wedge Q$

تمارين (١.٤)

(١) بين بمثال أن $P \Rightarrow Q$ لا تعني $Q \Rightarrow P$

(٢) أثبت أن $P \Rightarrow Q$ إذا وفقط إذا $\sim Q \Rightarrow \sim P$

(٣) بين أن $P \Rightarrow Q$ إذا وفقط إذا $P \wedge \sim P$ هي تناقض.

(٤) بين أن $P \Rightarrow P$

(٥) بين أنه إذا كانت $Q \Rightarrow R, R \Rightarrow Q$ فأن $P \Rightarrow R$

(٦) ضع العبارة التالية (كل دالة قابلة للأشتقاق في نقطة تكون مستمرة في تلك النقطة) في الشكل $P \to Q$ ثم اكتب معكوسها ومعاكسها الإيجابي.

(٧) بين ما يلي:

(i) $\sim(p \to q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (ii) $\sim(p \to q) \equiv p \to \sim q$

(٨) بسط ما يلي:

(i) $\sim(\sim p \leftrightarrow q)$ (ii) $\sim(\sim p \to \sim q)$

(iii) $(P \vee Q) \vee (\sim P \wedge Q)$ (iv) $(P \vee Q) \wedge \sim P$

(٩) بين أن $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

(١٠) بين أن $(p \to q) \not\equiv (\sim p \to \sim q)$، العبارة $\sim p \to \sim q$ تسمى نظير العبارة $p \to q$.

(١.٥) المسورات Quantifiers

لاحظ العبارات الآتية:ـــ

(أ) يوجد طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

(ب) كل طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

العبارة الأولى تسمى عبارة مسورة جزئياً وكلمة يوجد تسمى مسوراً جزئياً.

والعبارة الثانية تسمى عبارة مسورة كلياً وكلمة كل تسمى مسوراً كلياً.

تعريف المسور الجزئي Existential

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A، العبارة (يوجد $x \in A$ بحيث $P(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة جزئياً وبالرموز $\exists x \in A, P(x)$

الرمز $\exists$ والذي يقرأ (يوجد) يسمى بالمسور الجزئي. أن العبارة $(\exists x \in A, P(x))$ تكون صادقة إذا كانت مجموعة الصدق T_P غير خالية أي $T_P \neq \phi$.

مثال (١) :

(١) العبارة $(\exists n \in N, 3n+1>2)$ عبارة صادقة لأن $n=1$ مثلاً يحقق المتباينة.

(٢) العبارة $(\exists x \in R, x^2+1=0)$ كاذبة لأنه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة $x^2+1=0$.

تعريف: لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على الفئة A وأن العبارة (لكل $x \in A$ تكون $P(x)$ صادقة) تسمى بعبارة مسورة كلياً. وبالرموز تكتب $\forall x \in A, P(x)$

الرمز $\forall$ يقرأ (لكل for all) ويسمى بالمسور الكلي.

ملاحظة: العبارة $\forall x \in A, P(x)$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت $T_P = A$.

مثال (٢): (١) العبارة $(\forall n \in N, n > 2)$ هي عبارة صادقة.

(٢) العبارة $(\forall x \in Q, x > 1)$ تكون عبارة كاذبة (حيث Q مجموعة الأعداد القياسية).

ملاحظة: قد يكون في نفس العبارة المطروحة مسور كلـي (واحد أو أكثر) ومسور جزئي (واحد أو أكثر).

مثال (٣): (١) $\forall x \in A, \exists y \in B, P(x, y)$

(٢) $\forall x \in A, \forall y \in N, \forall z \in P, P(x, y, z)$

مثال (٤): لتكن $A = \{-1, 0, 1\}$ فإن العبارة $\forall x \in A, \exists y \in A, x + y = 0$ تكون صادقة. لكن العبارة $\forall y \in A, \forall x \in A, x + y = 0$ تكون كاذبة.

ومن مثال (٣)، (٤) تتضح الحقيقة التالية:

$$\exists y, \forall x , P(x, y) \not\equiv \forall x, \exists y, P(x, y)$$

نفي القضايا المحتوية على مسورات:

لنأخذ العبارة (كل طالب في الفرقة الأولى بكلية العلوم معدله ثمانون)، ممكن نفيها كالآتي (ليس صحيحاً أن كل طالب في الفرقة الأولى بكلية العلوم معدلة ثمانون)، وهذا يعني أنه يوجد على الأقل طالب واحد في هذا الصف بحيث معدلة لا يساوي ثمانون.

الآن نفرض أن M هي فئة طلاب الصف فمن الممكن التعبير عن الكلام بالرموز كالآتي :

$\sim(\forall x \in M$, معدلة ثمانون $x) \equiv \exists x \in M$, معدله لا يساوي ثمانون x

وبصورة عامة إذا كانت A فئة ما، P(x) جملة مفتوحة في X معرفة على A فأن

نظرية:

$$(\ \forall x \in A, P(x)) \equiv \exists x \in A, \sim P(x)$$

بالمثل التكافؤ التالي صحيح

$$\sim (\ \exists x \in A, P(x)) \equiv \forall x \in A, \sim P(x)$$

مثال (٥) : أوجد $\sim (\exists x \in R, \forall y \in R, y + x = y)$

الحل:

$$\sim (\exists x \in R, \forall y \in R, y + x = y) \quad \equiv \forall x \in R, \sim (\forall y \in R, y + x = y)$$
$$\equiv \forall x \in R, \exists y \in R, \sim (y + x = y) \equiv \forall x \in R, \exists y \in R\ , y + x \neq y$$

مثال (٦) : انف العبارة التالية

$$((\ 2n + 3 > 7), \forall n \in N)$$

الحل: العبارة بالرموز هي :

$$\forall n \ \in N, 2n + 3 > 7$$
$$\sim (\forall n \in N, 2n + 3 > 7) \equiv \exists n \in N, 2n + 3 \leq 7$$

اجراء هلبرت على تعبير مفتوح:

Hilbert operator on an open sentence

لتكن P(x) تعبيراً مفتوحاً في X ولتكن العبارة $\exists x, P(x)$ صادقة، فأنه قد يوجد أكثر من قيمة واحدة لـــx تحقق P(x). فإذا أردنا اختيار واحـــدة إلى P(x) فنستخدم التعبير $i_x\ (P(x))$ فإذا كان $i_x\ (P(x)) = c$ فهذا يعني أن P(x) عبـــارة صادقة (x=c تحقق P(x)) i_x يسمى مؤشر هلبرت (إجراء هلبرت).

مثال (٧): لتكن P(x) تعني أن x أحمر فأن $i_x\ P(x))$ قد يكون دم لأن الدم أحمر.

تمارين (٥.١)

(١) عبر عما يأتي باستخدام الرموز المنطقية

(i) يوجد p ويوجد q بحيث $pq = 32$. (ii) لكل x يوجد y بحيث $x < y$.

(iii) يوجد y بحيث لكل x، $x + 0 = y$ (iv) لكل x ولكل x، $x + y = y + x$

(v) كل مثلث هو مضلع.

(vi) لأي x، إذا كان x عدداً طبيعياً فإن x عدداً صحيحاً.

(vii) لكل x عدد طبيعي، x عدد زوجي أو x عدد فردي.

(viii) يوجد x بحيث x عدد أولي و x عدد زوجي.

(٢) هل العبارات الآتية صادقة :ـــ

(i) $\forall x \in A, \forall y \in A, x + y = y + x$ حيث $A = \{0, 1, 2\}$

(ii) $\exists x \in A, \exists y \in A, x + 3 = 2y$ حيث $A = \{1, 2, 3, \ldots\}$

(٣) هل أي عبارة من النوع $\forall x, \exists y, P(x, y) \to \exists y, \forall x, P(x, y)$ صادقة.

(٤) أثبت العبارات التالية: (i) $\forall x, \forall y, \forall z, x + y + z = 18$

(ii) يوجد y بحيث لكل x، $x\,y \le 2$ (iii) $\exists x, (P(x) \to Q(x))$

(٥) لتكن $P(x)$ تعني $x + 2 > 3$ ولتكن الفئة الشاملة $u = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

أوجد $i_x\,(P(x))$

(٦) وضح كل مما يلي (بالأمثلة أو بطريقة أخرى)

(i) $\forall x\,(p(x) \wedge q(x)) \equiv \forall x, p(x) \wedge \forall x, q(x)$

(ii) $\exists x\,(p(x) \vee q(x)) \equiv \exists x, p(x) \vee \exists x, q(x)$

(iii) $\exists x\,(p(x) \to q(x)) \equiv (\forall x, p(x) \to \exists x, q(x))$

(٦.١) التعليل المنطقي Logical reasoning

تعريف: لتكن $S_1, S_2, ..., S_n$ فئة من العبارات ولتكن S عبارة ممكن استنتاجها من هذه الفئة. العبارة(S تستنتج من $S_1, S_2, ..., S_n$) تسمى مجادلة Argument و $S_1, S_2, ..., S_n$ تسمى المقدمات أو الفرضيات Premises و S تسمى النتيجة Conclusion، سنرمز للمجادلة كما يلي : $S_1, S_2, ..., S_n \mapsto S$.

من التعريف نلاحظ أن المجادلة إما صائبة Valid أو غير صائبة (مغالطة Invalid (fallacy).

مثال (١): المجادلة التالية غير صائبة

الفرضيات:

S_1 : بعض الرياضيون فلاسفة

S_2 : أحمد رياضي

النتيجة : إذن أحمد فيلسوف : S

المجادلة $S_1, S_2 \mapsto S$ غير صائبة لأن ليس كل الرياضيون فلاسفة.

ملاحظات:

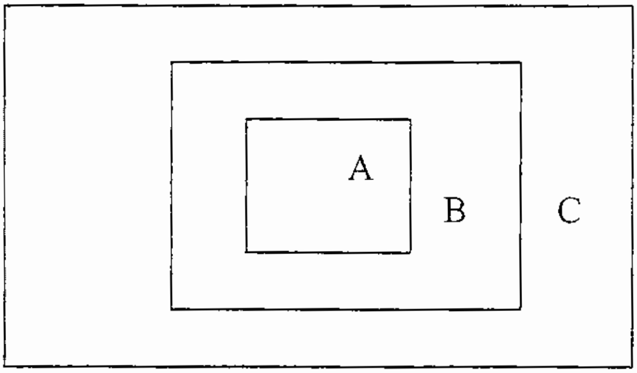
(١) أن قيمة صدق المجادلة $S_1, ..., S_2 \mapsto S$ لا تعتمد على قيم صدق معينة للعبارات المطروحة في المجادلة.

(٢) كثير من المجادلات ممكن توضيح صوابها أو عدم صوابها باستخدام مخططات فن حيث يعبر عن العبارة الكلامية بلغة المجموعات. لنأخذ المثال التالي :

المجتهد معدله عال: S_1، الذي معدله عال يكمل الدراسات العليا : S_2، حسن مجتهد : S_3

إذن حسن يكمل الدراسات العليا: S النتيجة.

نفرض أن مجموعة المجتهدين : A ومجموعة الذين معدلهم عال : B ومجموعة الذين يكملون الدراسات العليا : C وأن العنصر الذي ينتمي إلى A ينتمي إلى B ينتمي إلى C.



(٣) المجادلة $P_1,\ldots,P_n \mapsto P$ تكون صائبة إذا وفقط إذا كانت العبارة $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow P$ تتولوجي $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow P$

<u>البرهان الرياضي: Mathematical Proof</u>

<u>تعريف:</u> لتكن $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعة من العبارات وأن S عبارة استنتجت من $S_1, S_2, \ldots, S_n$ إذا كانت المجادلة $S_1, S_2, \ldots, S_n \vdash S$ صائبة فإنها تسمى بالبرهان.

الآن نشرح كيفية برهان جمل من نوع $P \rightarrow Q, P \leftrightarrow Q$، ... الخ.

<u>برهان جمل من نوع $(P \rightarrow Q)$:</u> هناك طريقتين لبرهان مثل هذه الجمل:ـ

<u>(١) قاعدة البرهان الاشتراطي Conditional Proof</u>

عند دراسة الهندسة المستوية كنا نبرهن جملة من نوع $(P \rightarrow Q)$ وذلك بفرض أن P تم استنتاج Q، حيث أن Q اعتبرت النتيجة. ولكن الحقيقية أن

$(P \to Q)$ هي النتيجة. كي نبرهن $P \to Q$ نفرض أولاً أن P صادقة ثم باستخدام P والمبرهنات والبديهيات السابقة نستنتج Q. عند استنتاج Q بهذه الطريقة نكـــون قد أكملنا برهان $P \to Q$. يلاحظ هنا بأننا لم نبرهن Q صادقة وإنما برهنا على أن Q تكون صادقة عندما تكون P صادقة. لتوضيح ذلك : نفرض أن $S_1, S_2, \ldots, S_n$ بديهيات ومبرهنات مبرهنة سابقاً. كي نبرهن على أن $P \to Q$ يكفي أن نـــبرهن على أن $S_1, S_2, \ldots, S_n ; P \to Q$ هي مجادلة صائبة.

وهذه العملية تسمى بالبرهنة الاستناجية Deduction Theorem. وأحياناً نعتبرهـــا بديهية برهان Proof axioms.

<u>مثال (٢):</u> برهن على أن : a^2 عدد زوجي $\leftarrow$ a عدد زوجي.

<u>البرهان:</u> نفرض أن a زوجي فإذن $a = 2k$ حيث $k \in Z$، بتربيع الطرفين نجد أن

$$a^2 = 4k^2 = 2\left(2k^2\right)$$

وبما أن $2k^2$ عدد صحيح فإن a^2 عدد زوجي.

<u>ملاحظة:</u> في البرهان السابق استخدمنا التتولوجي

$$(P \to S_1) \wedge (S_1 \to S_2) \wedge (S_2 \to R) \to (P \to R)$$

حيث أن a عدد زوجي : P، $S_1 : a = 2k$، a^2 عدد زوجي : R

<u>(٢) المعاكس الإيجابي Contra positive</u>

من الممكن أن نبرهن على أن $P \to Q$ ببرهان معاكسة الإيجابي $\sim Q \to \sim P$ حيث أن $P \to Q \equiv \sim Q \to \sim P$.

<u>مثال (٣):</u> برهن على أن a عد زوجي $\rightarrow$ a^2 عدد زوجي.

البرهان: لنعتبر المعاكس الإيجابي: a^2 عدد فردي $\leftarrow$ a عدد فردي.

بما أن a عدد فردي فإن $a = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح. بتربيع الطرفين ينتج أن $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$، إذن a^2 عدد فردي.

برهان جمل من نوع $P \leftrightarrow Q$: توجد ثلاث طرق للبرهان وهي :ـــ

١ـــ بما أن $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ لذا فإننا نبرهن أولاً $P \to Q$ ومن ثم نبرهن $Q \to P$.

٢ـــ نبرهن $P \to Q$ ولكن بدلاً من برهنة $Q \to P$ نبرهن المعاكس الإيجابي وهو $\sim P \to \sim Q$.

٣ـــ ننتقل من P إلى Q خلال سلسلة من الجمل المتكافئة كما يلي :

$$P \leftrightarrow Q_1, Q_1 \leftrightarrow Q_2, \ldots, Q_n \leftrightarrow Q$$

وهذه الطريقة يوضحها ويؤكدها التتولوجي

$$[(P \leftrightarrow Q_1) \wedge \ldots \wedge (Q_n \leftrightarrow Q)] \to (P \leftrightarrow Q)$$

برهان جمل من نوع $\forall x ; P(x)$: لبرهان الجمل من نوع $\forall x ; P(x)$، نفرض أن x **يمثل عنصراً ما** (اختياري) من الفئة الشاملة ثم نبرهن على أن P(x) صادقة وهذا يبرهن على أن $\forall x; P(x)$.

برهان جمل من نوع $\exists x ; P(x)$: كي نبرهن على أن $\exists x; P(x)$ فإننا نبرهن على أنه **يوجد عنصر** x في الفئة الشاملة الذي يجعل P(x) صادقة.

مثال (٤): برهن على أن (f غير قابلة للتفاضل $\wedge$ f متصلة) ; $\exists f$.

البرهان: الدالة $f(x) = |x|$ تكون متصلة وغير قابلة للتفاضل.

برهان جملة من نوع $(P \vee R \to Q)$: بالاعتماد على التتولوجي

$$\{(P \to Q) \wedge (R \to Q)] \to [(P \vee R) \to Q]$$

يجب أن نبرهن على أن $R \to Q, P \to Q$ وهذا معناه أن Q ممكن استنتاجها من R أو من P.

مثال (٥): برهن على أن $(a = 0 \vee b = 0) \to a\,b = 0$

البرهان: **الحالة الأولى :** نبرهن على أن $a = 0 \to a\,b = 0$

أفرض أن $a = 0$ فإن $b = 0 \,.\, a\,b = 0$

الحالة الثانية: نبرهن على أن $b = 0 \to a\,b = 0$

أفرض أن $b = 0$ فإن $a\,b = a \,.\, 0 = 0$

ويمكن برهنة جمل عامة باستخدام ما يسمى **البرهان بطريقة التناقض:**
التناقض عبارة كاذبة دائماً مهما كانت قيمة صدق مكوناتها فمثلاً الجملة $R \wedge \sim R$ تكون دائماً كاذبة.

البرهان بطريقة التناقض هو نوع من البرهان غير المباشر indirect proof.

لبرهان جملة P بطريقة التناقض: نفرض أن $\sim P$ ومن ثم نحاول أن نجد جملة من نوع $R \wedge \sim R$ حيث R أي جملة تحتوي على P أو أي مبرهنة سابقاً أو أي بديهية ويدعم هذه العملية التتولوجي: $[\sim P \wedge (R \wedge \sim R)] \to P$

كذلك **بواسطة البرهان بطريقة التناقض** نستطيع أن نبرهن جملاً من نوع $\forall x; P(x)$ أو $\exists x; P(x)$ أو $P \to Q$

فمثلاً لبرهان جملة من نوع $P \to Q$ بطريقة التناقض نتبع ما يلي:ـــ

أفرض نفي الجملة أي $\sim(P \to Q)$

وبما أن $\sim(P \to Q) \equiv \sim(\sim P \vee Q) \equiv P \wedge \sim Q$

ومن التكافؤ أعلاه فرضنا أن P صادقة وأن $\sim Q$ صادقة. ثم **نحاول الحصول على تناقض** ومنه نبرهن على أن $\sim(P \to Q)$ كاذبة. أي أن $(P \to Q)$ صادقة.

مثال (٦): برهن على أن $x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0$

البرهان: نفرض أن $P: x \neq 0,\ \ q: x^{-1} \neq 0$

يجب أن نبرهن على $P \to Q$

أفرض أن $\sim(P \to Q)$ صادقة وبما أن $\sim(P \to Q) \equiv P \wedge \sim Q$ فإن $P \wedge \sim Q$ صادقة أي أن $P \wedge \sim Q = (x \neq 0) \wedge (x^{-1} = 0)$ صادقة.

بما أن $x . x^{-1} = 1$ (معلومات سابقة) و $\sim Q: x^{-1} = 0$ فإن $x . x^{-1} = x . 0 = 0$.

إذن $0 = 1$، إذن التناقض هو $(1 \neq 0) \wedge (1 = 0)$ إذن $\sim(P \to Q)$ كاذبة لذا فإن $P \to Q$ صادقة.

إذن $x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0$.

مثال (٧): لتكن A فئة ما، برهن على أن $\phi \subseteq A$

البرهان: المطلوب برهان $x \in \phi, \to x \in A$

سنبرهن على المعاكس الإيجابي $x \notin A \to x \notin \phi$

واضح أن $x \notin \phi$ لأن ϕ فئة خالية لا تحتوي على أي عناصر

فإذن $x \notin A \to x \notin \phi$ صادقة. أي أن $x \in \phi \to x \in A$ فإذن $\phi \subseteq A$

تمارين (٦.١)

(١) أوجد نتيجة مجموعة المقدمات الآتية، بحيث تكون المجادلة صائبة وكل مقدمة تكون ضرورية للنتيجة :ـ

لا يوجد طالب كسلان : S_1، أحمد فنان : S_2، كل الفنانين كسالى : S_3

النتيجة : S

(٢) هل المجادلات الآتية صائبة

$$p \to q, \sim p \vdash \sim q \quad ، \quad p \leftrightarrow q, q \vdash p$$

(٣) بين أن المجادلة الآتية صائبة $p \to \sim q, r \to q, r \vdash \sim p$

(٤) هل المجادلة الآتية صائبة؟

S_1 إذا أمطرت السماء فإن أحمد سوف يكون مريضاً، S_2 لم تمطر السماء.

S : النتيجة : فإذن أحمد لم يكن مريضاً.

(٥) بين صواب المجادلات الآتية

$$\text{(i)}\ (\forall x \in A)\, P(x), x_0 \in A \vdash P(x_0)$$
$$\text{(ii)}\ x_0 \in A, P(x_0) \vdash (\exists x \in A)\, P(x)$$

(٦) أعط برهاناً مباشراً على كل مما يأتي مستخدماً **قاعدة البرهان الشرطي:**

(i) إذا كان a عدداً زوجياً و b عدد زوجياً فإن a + b يكون عدداً زوجياً.

(ii) إذا كان a عدداً زوجياً وكان b عدداً فردياً فيكون a + b عدداً فردياً.

(٧) برهن باستخدام **طريقة المعاكس الإيجابي:**

(i) "يعرف العدد التام بأنه العدد الذي يساوي مجموع قواسمة". أثبت أنه إذا كان n عدداً تاماً فإن n ليس عدداً أولياً.

(ii) $[\forall \varepsilon > 0, (|a| < \varepsilon)] \to a = 0$

(٨) استخدام **أساليب البرهان التي درستها** في إثبات :

(i) برهن إذا كان x عدد نسبي و y عدد غير نسبي فإن x + y يكون عدد غـــير نسبي.

(ii) برهن على أن لكل $0 < x$, $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

(iii) برهن على أن لكل $0 < x$, $x + x^{-1} \geq 2$