تمارين (٣.١١)

(١) أوجد $|z|$, $\arg \bar{z}$, $\arg z$ لكل من $z = 1 - i\sqrt{3}$, $-2-3i$, i, 4, -2

(٢) هل توجد علاقة بين $\arg z$, $\arg \bar{z}$؟ وضح ذلك هندسياً.

(٣) برهن أن $\left|\frac{1-z}{z-1}\right| = 1$، حيث $z \neq 1$.

(٤) برهن أنه إذا كان $z + \frac{1}{z}$ عدد حقيقي فإن $I(z) = 0$ أو $|z| = 1$.

(٥) برهن أن $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ & $|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2|$ وضح ذلك هندسياً.

(٦) اكتب الأعداد المركبة الآتية $(2+3i)(1-i)$, $\frac{2+3i}{1-i}$ في الصورة القطبية.

(٧) أوجد مقياس وسعة العدد المركب $\frac{(1+2i)^{12}}{(1-2i)^9}$

(٨) إذا كان $z\,w = 0$ فبرهن أن z أو w يساوي صفر.

(٩) أوجد المحل الهندسي للنقطة z التي تحقق

(a) $|z| = 2$ (b) $|z - i| = 2$ (c) $|z-1| + |z+1| = 3$,

(d) $|z| \leq 4$ (e) $|z - (1+i)| \geq 9$, (f) $|R(z)| \geq 1$

(g) $-1 < I(z-2) \leq 3$

إرشاد: في بعض الحالات السابقة يكون المحل الهندسي عبارة عن منحنى والبعض الآخر يكون مجموعة نقاط داخل أو خارج منحنى أي عبارة عن منطقة في المستوى المركب.

(١٠) برهن باستخدام هندسة الأعداد المركبة أن قطري الشكل المعين يتقاطعان على التعامد.

(١١) برهن أن z_1 , z_2 , z_3 تقع على استقامة واحدة إذا كان وفقط إذا كان $\dfrac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}$ عدد حقيقي.

(١٢) برهن أن المتجهين z_1 , z_2 يكونان متعامدين إذا كان وفقط إذا كان

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$$

(١٣) برهن أنه إذا وقعت النقط z_1 , z_2 , z_3 على استقامة واحدة، فإنه توجد الأعداد الحقيقية p, q, r والتي ليست جميعها أصفار بحيث يكون

$$p + q + r = 0 \;, p z_1 + q z_2 + r z_3 = 0$$

(١٤) برهن أن أي دائرة مركزها $z_\circ$، معادلتها تعطى بالصورة :

$$z \bar{z} - z_\circ \bar{z} - \bar{z}_\circ z + k = 0 \;, k \in R$$

(١٥) باستخدام نظرية ديموافر أثبت أن :

(a) $\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos\theta \sin^4 \theta$

(b) $\cos^8\theta + \sin^8 \theta = \dfrac{1}{64}\left(\cos 8\theta + 28 \cos 4\theta + 35\right)$

(١٦) إذا كانت n عدد صحيح موجب، وكان $x_n + i y_n = (1 + i/3)^n$ برهن

$$x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1} = 2^{2n-2} \sqrt{3}$$

(١٧) برهن أن $\left(\dfrac{1 + \sin\theta + i\cos\theta}{1 + \sin\theta - i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin n\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

(١٨) أكتب $\left\{1 + i \tan \dfrac{4m+1}{4n}\right\}^n$ في صورة $a+i\ b$ حيث m,n أعداد صحيحة.

(١٩) برهن أن المعادلة $\varepsilon z\bar{z}+\alpha z+\bar{z}+\gamma=0$ حيث ε, γ أعداد حقيقيـــة، α عدد مركب ــ تمثل دائرة إذا كانت $\alpha \neq 0 , \left|\alpha^2\right|>\gamma$ وتمثل خــط مستقيم إذا كان $\alpha \neq 0 \,\&\, \varepsilon=0$.

(٢٠) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين z_2 , z_1.

(٢١) نفرض المجموعتـــين $A=\{z:|z-1|\leq 3\}, B=\{z:|z-2i|\leq 2\}$ أوجــد $A\cap B, A\cup B$.

(٢٢) ناقش خطأ ما يأتي $-1=\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$.

(٢٣) تحرك رجل 12 كم في اتجاه شمال الشرق، ثم 20 كم في اتجاه 30° غــرب الشمال ثم 18 كم في اتجاه 60° جنوب الغرب. أوجد بعد الرجل عن نقطة البداية. وفي أي اتجاه يوجد (إرشاد : استخدم أسلوب المتجهات).

(٢٤) برهن صحة المتطابقات الآتية:

(a) $\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$

(b) $\cos^4\theta=\frac{1}{6}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$.

(٢٥) إذا كانت $z=\operatorname{cis}\theta=e^{i\theta}$ برهن أن

(أ) عندما n تكون عدد فردي صحيح موجب

$$\cos^n\theta=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{r}\cos(n-2r)\theta$$

$$\sin^n\theta=\frac{(-1)}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r\binom{n}{r}\sin(n-2r)\theta$$

(ب) عندما n تكون عدد صحيح زوجي موجب

$$\cos^n\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{r}\cos(n-2r)\theta + \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

$$\sin^n\theta = \frac{(-1)}{2^{n-1}}\sum_{r=0}^{\frac{n-2}{2}}(-1)^r\binom{n}{r}\cos(n-2r)\theta + \frac{1}{2^n}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

(٢٦) بفك $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ باستخدام ذات الحدين، برهن أن

(a) $$\cos n\theta = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\cos^{(n-2r)}\theta\,\sin^{2r}\theta\binom{n}{2r}$$

(b) $$\sin n\theta = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{n}{2r+1}\cos^{(n-2r-1)}\theta\,\sin^{2r+1}\theta$$

حيث $k=\left[\frac{n}{2}\right], m=\left[\frac{n-1}{2}\right]$، الرمز [x] يعني أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي العدد الحقيقي x.

مثال على ذلك:

$$[1/2]=0\ ,\ [1.50]=1\ ,\ [8]=8\ ,\ [-0.578]=-1$$

<u>**ملاحظة:**</u> $(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n)(1-z)=1-z^{n+1}$، وعندما $z\neq 1$ ، فإن

$$1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad (*)$$

(٢٧) باستخدام العلاقة (*)، برهن أن

(a) $$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\ ,$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}-\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}\quad (0<\theta<2\pi)$$

(٢٨) برهن أن $r_1e^{i\theta_1}+r_2e^{i\theta_2}=r_3e^{i\theta_3}$.

حيث $$r_3=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2\,r_1\,r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\&\ \ \theta_3=\tan^{-1}\frac{r_1\sin\theta_1+r\sin\theta_2}{r_1\cos\theta_1+r_2\cos\theta_2}$$

(٢٩) أوجد الجذور الرابعة للعدد : 1

(٣٠) أوجد قيم $i^{\frac{1}{4}}$, $(2+2i)^{\frac{1}{3}}$, $(-32)^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{\frac{2}{3}}$.

(٣١) حل المعادلة $z^4+1=0$.

(٣٢) حل المعادلة $z^3+z^2+z+1=0$.

(٣٣) أثبت أن المعادلة $z^5=(z+1)^5$ لها أربع جذور أعداد مركبة. (إرشاد : استخدم مثال (٣).

(٣٤) برهن أن الأجزاء الحقيقية للمقدار $\sqrt[n]{z}+\sqrt[n]{\bar{z}}$ هي

$$2\sqrt[n]{r}\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,\ldots,n-1$$

حيث $z=r\,e^{i\theta}$

(٣٥) إذا كانت z_1, z_2, z_3 تمثل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع، فبرهن أن :

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1\,z_2+z_2\,z_3+z_3\,z_1$$

(إرشاد: اعتبر أن z رأس لمتجه واستخدم خواص المتجهات والمثلث المتساوي الأضلاع).

(٣٦) أوجد عددين مجموعهما = ٤ وحاصل ضربهما = ٨.

(٣٧) إذا كانت $z=e^{\frac{\pi i}{3}}$، أوجد $\left|e^{iz}\right|$..

(٣٨) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $1\text{-}i$, $2\dot{i}$, $1+i$.

(٣٩) برهن أن

(a) $R(z_1 z_2) = R(z_1)R(z_2) - I(z_1)I(z_2)$

(b) $J(z_1 - z_2) = R(z_1)I(z_2) + I(z_1)R(z_2)$

(٤٠) أوجد جذور المعادلة $z^8+1=0$ وعين هذه الجذور في المستوى المركب.

ومن ثم حلل z^8+1 إلى عوامل حقيقية من الدرجة الثانية واستنتج أن

$$\cos 4\theta = \left(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(\cos\theta - \cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

(إرشاد: استخدم مثال (٤٠)).

(٤١) حلل z^5+1 ثم استنتج أن $4\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=1$.

(إرشاد: استخدم تمرين (٢)).

(٤٢) برهن أن جذور المعادلة $(z-1)^6+(z+1)^6=0$ هي

$$\pm i\cos\frac{\pi}{12},\ \pm\cot\frac{5\pi}{12},\ \pm i$$

(إرشاد: استخدم مثال (٣)).

(٤٣) أوجد مجموع المتسلسلة

$$\cos\theta - \binom{n}{1}\cos 2\theta + \binom{n}{2}\cos 3\theta + \ldots + (-1)^n \cos(n+1)\theta$$

(٤٤) أوجد القيم المختلفة للمقدار $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ عندما n كسرية.

(٤٥) أوجد كلاً من

(i) $\log(-1)$ (ii) z^i (iii) i^i

(v) $\log(1-i\tan\alpha)\ ,\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

(٤٦) إذا كانت $\sin z = u + i\,v$ حيث u, v دوال حقيقية فأثبت أن :

$$u^2\cos^2 x - v^2\sin^2 x = 1$$

$$u^2\sinh^2 y + \cosh^2 y = 1$$

(٤٧) إذا كان $|\cos z| = 1$ فأثبت أن :

$$\cos 2x + \cosh 2y = 2$$

(٤٨) إذا كان $z = \tan\omega$ حيث $\omega = u + i\,v$ فأثبت أن :

$$\frac{x}{\sin 2u} = \frac{y}{\sinh 2v} = \frac{1}{\cos 2u + \cosh 2v}$$

(٤٩) إذا كانت $\sin z = \tan\omega = \tan(u + i\,v)$

$$\frac{\tan x}{\tanh y} = \frac{\sin 2u}{\sinh 2v}$$