الباب الحادي عشر

دوال المتغيرات المركبة

Functions of Complex Variables

(١١.١) الأعداد المركبة Complex numbers:

تعريف (١): أي ثنائي مرتب (a, b) حيث $a, b \in R$ يسمى عدد مركب.

العدد الحقيقي a يسمى المركبة الحقيقية والعدد الحقيقي b يسمى المركبة التخيلية للعدد المركب (a, b).

واضح أنه إذا كانت: $a = c, b = d \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) = (c, d)$

نفرض $C = \{(a, b) : a, b \in R\}$ هي مجموعة الأعداد المركبة.

تعرف العمليتين الثنائيتين (عملية الجمع وعملية الضرب) على المجموعة C كما يأتي:

$$+ : C \times C \to C$$
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \ , \ \forall \ (a, b), (c, d) \in C$$
$$. : C \times C \to C$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc), \ \forall (a, b), (c, d) \in C$$

تعرف العملية $R \times C \to C$

$$k(a, b) = (ka, kb), \ \forall \ k \in R, (a, b) \in C$$

نظرية (١): $(C, +)$ زمرة إبدالية.

البرهان:

(i) العملية + إبدالية، نفرض أن $(a, b), (c, d) \in C$

$$\therefore (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$$

(ii) العملية + دامجة : نفرض أن $(a, b), (c, d), (u, v) \in C$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & (a, b) + (c, d) + (u, v) \\ & = (a+c, b+d) + (u, v) \\ & = ((a+c)+u, (b+d)+v) \\ & = (a + (c+u) , b + (d+v)) \\ & = (a, b) + (c+u, d+v) \\ & = (a, b) + ((c, d), (u, v)) \end{aligned}$$

(iii) العنصر المحايد : يوجد العنصر $(0,0)\in C$ والذي يحقق

$$(a, b)+(0, 0)=(0, 0)+(a, b)=(a, b), \ \forall (a, b)\in C$$

ويسمى العدد المركبة $(0, 0)$ الصفر المركب (the complex zero).

(iv) لكل عنصر $(a , b)\in C$ يوجد العنصر $(-a , -b)\in C$ والذي يحقق

$$(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

العدد المركب $(-a, -b)$ يسمى معكوس العدد المركب (a, b) بالنسبة لعملية الجمع.

تعريف (٢): نفرض أن الزمرتين $(G , \tau)(G' , \tau')$ يقال أن الراسم $f: G \to G'$ هومورفزمياً : (homomorphism) بين الزمرتين إذا كان

$$f (x \tau y)= f(x) \tau' f(y) \ , \ \forall x, y \in C$$

ويقال أنه راسماً ايزومورفزميا (isomorphism) إذا كان

(i) f تناظر أحادي. (ii) f هومومرفزم.

نظرية (٢): نفرض الزمرة $(C , +)$ ، الراسم $f : C \to C$

$$f (a , b)= (a, - b) , \ \forall (a, b) \in C$$

ايزومورفزمياً.

البرهان:

(i) f تناظر أحادي (برهن).

(ii) نفرض أن $(a\,,b)\,,(c,d)\,\in C$

$$f((a, b) + (c, d)) = f(a+c\ , b+d) = (a+c, -b-d)$$
$$= (a, -b) + (c\ , -d) = f(a, b) + f(c, d)$$

إذا كان $z=(a\,,b)\in C$ فإننا سنكتب $\bar{z}=(a\,,-b)$. العدد $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد

.z

ملاحظات:

(١) الأعداد الحقيقية يمكن اعتبارها حالات خاصة من الأعداد المركبة وذلك لأنه من تعريف عمليتي الجمع والضرب على الفئة C نرى ما يأتي :

$$(x\,,0)+(x'\,,0)=(x+x'\,,0)$$
$$(x\,,0)(x'\,,0)=(x\,x'\,,0)$$

وسوف نكتب x بدلاً من $(x, 0)$. أي أننا سوف نعتبر العدد المركب $(x,\ 0)$ بمقابلة العدد الحقيقي x.

(٢) العدد المركب الذي على الصورة $(0,y)\,, y\neq 0$ يسمى عدد تخيلي خالص.

$$-(x, y) = (-x, -y)$$

(٣)
$$(x, y) - (u, v) = (x, y) + (-1)\,(u, v)$$

نظرية (٣): $(C-\{0\},.)$ زمرة إبدالية، حيث $0 = (0, 0)$

البرهان:

(i) عملية الضرب ابدالية :

$$(x, y)\,(u, v) = (x\,u - y\,v, x\,v + y\,u\,)$$
$$= (u, v)\,(x, y)\ ,\ \forall\,(x, y), (u, v)\,\in C$$

(ii) عملية الضرب دامجة:

$$((x, y)\,(u, v)\,(a, b) = (x\,u - y\,v, x\,v + y\,u)\,(a, b)$$
$$= ((x\,u - y\,v)\,a - (x\,v + y\,u)\,b\ , (x\,u - y\,v)\,b + (x\,v + y\,u)\,a)$$
$$= (x(\,u\,a - v\,b) - y(\,u\,b + \ v\,a), (u\,b + v\,a) + y\,(\,u\,a - v\,b)$$

$= (x, y)(ua - vb, ub + va)$
$= (x, y)((u, v)(a, b)\quad \forall (x, y), (u, v), (a, b) \in C$

(iii) العنصر المحايد :

العدد المركب $1 = (1 , 0)$ يحقق

$$(x, y)(1, 0) = (1, 0)(x, y) = (x, y), \ \forall (x, y) \in C$$

(iv) لأي عنصر $z = (x, y) \neq (0, 0)$ يكون $\bar{z} = (x, -y)$

$$z\bar{z} = (x, y)(x, -y)$$
$$= (x^2 + y^2, 0) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

ونكتب

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x}{|z|^2}, \frac{-y}{|z|^2}\right)$$

المقدار الحقيقي $|z|$ يسمى طول العدد المركب، واضح أن: $zz^{-1} = (1, 0)$

إذن z^{-1} معكوس z بالنسبة لعملية الضرب.

نظرية (٤): نفرض الزمرة الابدالية $C' = (C - \{0\}, .)$

الراسم $g : C' \to C'$ المعرف بالقاعدة $g(z) = \bar{z} \ , \ \forall \ z \in C'$ أيزومورفزمي.

البرهان:

(أ) f تناظر أحادي (برهن).

(ب) f هومرفزم.

$$g((x, y)(u, v)) = g(xu - yv, xv + yu)$$
$$= (xu - yv, -xv - yu)$$
$$= (x, -y)(u, -v)$$
$$= g(x, y)\, g(u, v) \ , \forall \ (x, y), (u, v) \in C'$$

ملاحظات : نفرض أن $i = (0, 1)$، إذن لأي عدد مركب $(x, y) \in C$ يكون

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$
$$= (x, 0) + (y, 0)\,(0, 1) = x + y\,i = x + i\,y$$

∴ أي عدد مركب (x, y) يمكن كتابته في الصورة $x + i\,y = x + y\,i$

وهذه هي الصورة المعتادة للعدد المركب.

إذا كان $z = x + i\,y$ فإن x تسمى **<u>الجزء الحقيقي</u>** Real Part و y **<u>الجزء التخيلي</u>** للعدد المركب z ونكتب

$$R(z) = x\ ,\ I(z) = y$$

وسوف نستخدم هذه الصورة للعدد المركب في دراسة الأعداد المركبة ومنها يمكن القول أن أي نقطة في المستوى يمكن تمثيلها بعدد مركب، ومجموعة كل الأعداد المركبة في المستوى تسمى المستوى المركب أو مستوى ارجند.

تمارين (1.11)

(١) لكل من الأعداد المركبة $z = 4 + 3\,i\ ,\ 1 - i\ ,\ -3\ ,\ 2\,i\ ,\ 0$ أوجد $\overline{z}\ ,\ z$

(٢) برهن أن $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v}$ ، $|u| = |-u| = |\overline{u}|$

(٣) (i) برهن أن $u\,\overline{u} = |u|^2$ (ii) $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u\,\overline{v}}{|v|^2}$

(٤) اكتب $\dfrac{2+i}{1-i}, \dfrac{1}{2+i}, \dfrac{3}{1-2i}$ على صورة $a + i\,b$

(٥) أكمل الجدول

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
i^n									

(٦) إذا كانت $z = 2 + 3\,i$، عين في المستوى المركب النقط التي تمثل الأعداد المركبة $z, \overline{z}\ , -z\ , -\overline{z}$.

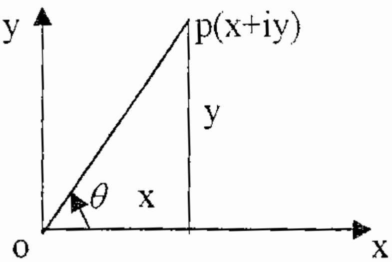
(٧) صف العلاقة الهندسية بين z , $\bar{z}$ وبين $z, -z$.

(٨) لأي قيم العدد z يكون $z = |z|$, $\bar{z} = z$.

<u>(٢.١١) الصورة القطبية للعدد المركب : (The polar form)</u>

نفرض أن $p(x + i\,y) \neq 0$ نقطة في المستوى المركب ونفرض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ وأن (r, θ) هي الإحداثيات القطبية للنقطة.

إذن : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$\therefore$ يمكن أن نكتب $z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$

وهذه الصورة تسمى الصورة القطبية للعدد المركب z وأحياناً نكتب

$$\cos\theta + i\sin\theta = \text{cis}\,\theta$$

إذن $z = r\,\text{cis}\,\theta$

العدد الحقيقي غير السالب r يسمى مقياس العدد المركب z , θ تسمى سعة العدد المركب "argument of z" ونكتب $\arg z = \theta$. الزاوية تحقق :

$$x = r\cos\theta \;, y = r\sin\theta \;, \frac{y}{x} = \tan\theta$$

الزاوية θ قد تكون موجبة أو سالبة. ولا بد أن نلاحظ أن هناك خطورة في تعيين θ من العلاقة $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$، ونوضح ذلك بالمثال الآتي :

مثال (١): اكتب 1-i في الصورة القطبية.

الحل: نفرض أن $r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1-i$

إذن $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ ويكون إذن

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن θ تقع في الربع الرابع، وعليه فإن

$$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \;\ldots, -\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, -2\pi, \ldots$$

أي أن θ تحقق $\theta = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k أي عدد صحيح.

نأخذ أي قيمة من هذه القيم (k=0)، إذن $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

ملاحظة: قد يفكر أحد أنه يمكن أن يحدد قيمة θ باستخدامه (فقط) للعلاقة

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},\ \theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

ولكن $\frac{3\pi}{4}$ ليست من قيم arg(1-i)

ملاحظة: عادة نختار قيم $\theta = \arg(z)$ التي تحقق $-\pi < \theta \le \pi$

نظرية (٥):

$$|zw| = |z||w|,\quad \arg(zw) = \arg z + \arg w$$

البرهان: نفرض أن

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi),$$

إذن

$$zw = rs\,(\cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta \sin\theta) + i\,(\cos\theta \sin\phi + \sin\theta \cos\phi)$$
$$= rs\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\ ,\ zw = rs\,\mathrm{cis}\,(\theta+\phi).$$

ومنها تنتج النظرية.

ملاحظة: العلاقة $\arg z + \arg w = \arg z\,w$ تعني أن مجموع $\arg w, \arg z$ هو إحدى قيم $\arg z\,w$.

نتيجة (١):

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\ ,\ \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$$

نتيجة (٢): إذا كانت n عدد صحيح، فإن

$$|z^n| = |z|^n\ ,\ \arg z^n = n\arg z$$

(هذه الخاصية للأعداد المركبة تسمى نظرية دايموافر).

البرهان: نفرض أن $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

(١) إذا كانت n عدداً صحيحاً موجباً.

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ويمكن برهنتها باستخدام الاستنتاج الرياضي كالآتي:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta\ ,\ r = 1 \qquad (1)$$

لإثبات صحة العلاقة (1)

أولاً: نختبر صحة العلاقة (1) عند بعض القيم العددية الصحيحة الموجبة:

١ــ عند القيمة $n = 1$

$$L.H.S = (\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$R.H.S = \cos\theta + i\sin\theta$$

∵ الطرفان متساويان ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

٢ــ عند القيمة $n = 2$

$$L.H.S = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta$$
$$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$
$$R.H.S = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

∵ الطرفان متساويان ∴ العلاقة صحيحة عند $n = 2$

ثالثاً: (i) لنفترض صحة العلاقة (1) عند القيمة الصحيحة الموجبة $n=k$ أي

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta \qquad (2)$$

(ii) نحاول إثبات صحة العلاقة (2) عند القيمة الصحيحة الموجبة الثالثة $n=k+1$

أي $(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^k$

باستخدام العلاقة (2) ينتج أن:

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$
$$= \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta +$$
$$+ i(\sin\theta\cos k\theta + \sin k\theta + \sin k\theta\cos\theta)$$
$$= \cos(\theta + k\theta) + i\sin(\theta + k\theta)$$
$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta \qquad (3)$$

وواضح أن طرفي العلاقة (3) على صورة طرفي العلاقة (2) بعد استبدال كل k بـــ $k+1$ وذلك يؤكد صحة العلاقة (2).

وبهذا نكون قد أثبتنا أن العلاقة (1) صحيحة عنـــد $n=1, 2, ..., k, k+1$ فـــهي صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

(٢) إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً. نفرض $n = -q \ (q > 0)$

إذن :
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-q} = \left[(\cos\theta + i\sin\theta)^{q}\right]^{-1}$$
$$= [\cos q\theta + i\sin q\theta]^{-1}$$
$$= \cos(-q)\theta + i\sin(-q)\theta$$

نتيجة (٣): ضرب أي متجه في $\text{cis}\,\theta$ يديره زاوية θ وذلك لأن $|\text{cis}\,\theta| = 1$

مثال (٢): اختصر العدد المركب $z = \dfrac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i}$ أي أكتبه على صورة $z = x + iy$

الحل: أولاً:
$$\frac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{(1+i)(-2\sqrt{3}-2i)}{12+4} = \frac{1}{8}\left[(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i\right]$$

ثانياً: نستخدم الصورة القطبية

$$\frac{1+i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}{4\cos\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{cis}\left(-7\frac{\pi}{12}\right)$$

مثال (٣): أوجد قيمة $z = (1+i)^8$ بأكثر من طريقة

الحل: أولاً:
$$(1+i)^8 = 1 + 8i + \frac{8\times 7}{1\times 2}i^2 + \frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3}i^3 + \ldots + i^8$$

(باستخدام نظرية ذات الحدين) $= 1 + 8i - 28 - 56i + \ldots = 16$

ثانياً: باستخدام الصورة القطبية :

$$z = (1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}\right]^8 = 16\,\text{cis}\,2\pi = 16$$

ملاحظة : يتضح من المثالين السابقين أن الصورة القطبية (عادة) تكون أسهل في التعامل معها عن الصورة الكارتيزية $z = x + iy$.

جبر الأعداد المركبة :

عمليتي الجمع والضرب (أنظر التعريف) على المتجهات تحقق جميع خواص الأعداد الحقيقية وعلى ذلك فكثير من النظريات الجبرية يمكن أن تعمم من حقل الأعداد إلى حقل الأعداد المركبة وسوف نعطي الآن بعض من ذلك.

كثيرة حدود في متغير واحد x تعطى بالصورة

$$P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

حيث المعاملات a_i أعداد حقيقية أو مركبة.

كثيرة الحدود $\bar{P}(x)=\bar{a}_o x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_n$

تسمى مرافق كثيرة الحدود $P(x)$.

يقال أن r جذر للمعادلة $P(x) = 0$ إذا تحقق

$$P(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

نظرية (٦): لأي عدد q، $\overline{P(q)}=\bar{P}(\bar{q})$

البرهان:

$$\begin{aligned}
P(q) &= a_o q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q + a_n \\
\overline{P(q)} &= \overline{a_o q^n + a_1 q^{n-1} + \ldots + a_{n-1} q + a_n} \\
&= \overline{a_o q^n} + \overline{a_1 q^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1} q} + \overline{a_n} \\
&= \bar{a}_o (\bar{q})^n + \bar{a}_1 (\bar{q})^{n-1} + \ldots + \bar{a}_{n-1} \bar{q} + \bar{a}_n \\
&= \bar{P}(\bar{q})
\end{aligned}$$

نتيجة (١): إذا كانت r جذر للمعادلة $P(x) = 0$ فإن $\bar{r}$ تكون جذر للمعادلة

$$\bar{P}(x)=0$$

البرهان: $P(r)=0 \leftrightarrow \overline{P(r)}=0 \rightarrow \bar{P}(\bar{r})=0$

$\therefore$ $\bar{r}$ تكون جذر للمعادلة $\bar{P}(x)=0$.

نتيجة (٢): إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود ذات المعاملات الحقيقية وكان r جذر للمعادلة $P(x) = 0$، فإن $\bar{r}$ تكون (أيضاً) جذر للمعادلة $P(x) = 0$.

البرهان:

$$P(r)=0 \leftrightarrow \overline{P(r)}=0 \rightarrow \bar{P}(\bar{r})=0$$

وبما أن المعاملات حقيقية، فإن $\bar{P}(x)=P(x)$

$$\therefore\ \bar{P}(\bar{r})=0 \rightarrow P(\bar{r})=0$$

أي أن $\bar{r}$ تكون جذراً للمعادلة $P(x) = 0$.

ملاحظة: هذه النتيجة لا تكون صحيحة إذا كانت معاملات كثيرة الحدود أعداد مركبة. ونوضح ذلك بمثال

مثال (٤): العدد المركب $z = i$ هو جذر لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 + 3x - 2i$ ولكن $\bar{z} = -i$ ليس جذراً لها.

تمرين (١): أوجد جذر المعادلة $x^4 - (4+i)x^3 + (6+2i)x^2 + 4 = 0$ إذا علم أن الجذور تقع في المجموعة $-1, 2, -i, 2i, 1+i, 1+2i$.

تمرين (٣): أوجد جذور المعادلة $2x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$ إذا علم أن بعض الجذور تقع في المجموعة $\{2, -1, 2i, 1+i, 1-2i\}$.

(٣.١١) صورة أويلر للعدد المركب:

Euler formula for a complex number

نعلم أن
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(-1)\theta^2}{2!} + \frac{(-1)\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots$$

إذن وبفصل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نحصل على

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

ومن مفكوك ماكلورين للدوال $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ (انظر مفكوكات الدوال في حساب التفاضل والتكامل) نجد أن

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad (1)$$

إذن أي عدد مركب z يمكن أن يكتب على الصورة :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$$

وهذه الصورة تسمى صورة أويلر للعدد المركب.

ومن (1) نستنتج أن

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \;,\; \overline{z} = r\,e^{-i\theta}$$

ومن (1), (2) نستنتج أن

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right), \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

وواضح أن $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta} \cdot e^{2ik\pi}$

حيث k أي عدد صحيح، ولكن $e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1$

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$$

هنا نقوم إذن بعرض أمثلة توضح كيفية استخدام الأعداد المركبة في إيجاد مجموع بعض المتسلسلات.

مثال (١): أوجد مجموع المتسلسلة

$$A=\cos(\alpha+\theta)+\cos(\alpha+2\theta)+\ldots+\cos(\alpha+n\theta)$$

حيث α, θ أعداد حقيقية، $\theta \neq 2\pi k$ (k عدد صحيح).

الحل: نفرض المتسلسلة

$$B=\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha+2\theta)+\ldots+\sin(\alpha+n\theta)$$

$$A+iB=\sum_{r=1}^{n}\left(\cos(\alpha+r\theta)+i\sin(\alpha+r\theta)\right)=\sum_{r=1}^{n}e^{i(\alpha+r\theta)}=e^{i\alpha}\sum_{r=1}^{n}e^{ir\theta}$$

ولكن : $\sum_{r=1}^{n}e^{ir\theta}=e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\ldots+e^{in\theta}$

متسلسلة هندسية حدها الأول $e^{i\theta}$ وأساسها $e^{i\theta}$ وعدد حدودها n.

$$A+iB=e^{i\alpha}\;e^{i\theta}\;\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\quad=e^{i(\alpha+\theta)}\frac{e^{i\frac{n}{2}\theta}\left(e^{i\frac{n}{2}\theta}-e^{-i\frac{n}{2}\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$=e^{i\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\theta\right)}\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\left[\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)\right]\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

وبمقارنة الطرفين نحصل على A, B على الصورة

$$A=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right),\;B=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\left(\alpha+\frac{n+1}{2}\theta\right)$$

مثال (٢): أوجد مجموع المتسلسلة

$$T=n\sin\theta+\frac{n(n-1)}{2!}\sin 2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\sin 3\theta+\ldots+\sin n\theta$$

حيث n أي عدد صحيح موجب.

<u>الحل:</u> نعتبر مفكوك ذات الحدين للمقدار $\left(1+e^{i\theta}\right)^n$ على الصورة :

$$\left(1+e^{i\theta}\right)^n = 1+n\,e^{i\theta}+\frac{n\,(n-1)}{2!}e^{2i\theta}+\ldots+e^{in\theta}$$

إذن
$$I\left(1+e^{i\theta}\right)^n = I\left[e^{i\frac{n}{2}\theta}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)^n\right] = I\left[e^{i\frac{n}{2}\theta}\times 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\,\sin\frac{n}{2}\theta$$

حيث I تعني الجزء التخيلي

(٤.١١) الجذور النونية للواحد الصحيح Roots of unity

نفرض المعادلة

$$z^n = \alpha \qquad (1)$$

حيث n عدد صحيح موجب، ونفرض أن :

$$z = r\,\text{cis}\,\theta\ ,\ \alpha = \rho\,\text{cis}\,\phi$$
$$r^n\ \text{cis}^n\theta = \rho\,\text{cis}\,\phi\ ,\ r^n\ \text{cis}\,n\,\theta = \rho\,\text{cis}\,\phi$$

إذن $r^n = \rho \quad \& \, n\,\theta = \phi + 2\,k\,\pi$ حيث k أي صحيح

إذن

$$r = \rho^{\frac{1}{n}}\ ,\ \theta = \frac{\phi+2\,k\,\pi}{n}\quad ,k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

من (2) قد يتضح أن المعادلة (1) لها عدد لانهائي من الحلول، ولكن ليست كل هذه الحلول مختلفة ـــ مثال ذلك نختار k_1, k_2 عددان صحيحان بحيث $k_1 - k_2 = s\,n$ (s عدد صحيح).

إذن
$$\frac{\phi}{n}+\frac{2\,k_1\,\pi}{n} = \frac{\phi}{n}+\frac{2\,\pi}{n}\left(s\,n+k_2\right)$$

$$=\frac{\phi}{n}+2s\pi+\frac{2k_2\pi}{n} \qquad =\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}\right)+2s\pi$$

$$\therefore \text{ cis}\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k_1\pi}{n}\right)=\text{cis}\left(\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}\right)+2s\pi\right)$$

$$=\text{cis}\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k_2\pi}{n}\right)$$

وعلى هذا سوف نأخذ الحلول التي تناظر قيم $k = 0, 1, 2, ..., n\text{-}1$

إذن المعادلة (1) لها عدد n من الجذور المختلفة.

$$\rho^{\frac{1}{n}} \text{ cis}\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,...,n-1 \qquad (3)$$

وقد تكتب (3) على الصورة

$$\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, k=0,1,2,...,n-1 \qquad (4)$$

كنتيجة للمناقشة السابقة سنعطي النظرية الآتية:

نظرية (٧): الجذور المختلفة التي عددها n للمعادلة $z^n=1$ هي

$$e^{\frac{2k\pi}{n}i}, k=0,1,2,...,n-1$$

البرهان: نضع $z^n=1=\text{cis } 0$، وبوضع $\phi=0, \rho=1$ في (4) نحصل على المطلوب.

تعريف: أي حل للمعادلة $z^n=1$ يسمى جذر نوني للوحدة the root of unity

وإذا كتبنا $w_n^{(k)}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ فإن الجذور النونية للوحدة هي :

$$w_n^{(0)}=1,\ w_n^{(1)},\ w_n^{(2)},...,w_n^{(n-1)}, w_n^{(n)}=w_n^{(0)}$$

مثال (٢): أوجد الجذور الستة للواحد الصحيح.

الحل: المطلوب إيجاد جذور المعادلة $z^6=1$ وهذه الجذور هي

$$w_6^{(k)} = \text{cis}\,\frac{2k\pi i}{6},\ = e^{\frac{k\pi}{3}i}\ ,(k=0,1,2,3,4,5)$$

$$w_6^{(0)} = 1, w_6^{(1)} = e^{\frac{\pi}{3}\cdot i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$w_6^{(2)} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w_6^{(3)} = e^{\frac{\pi}{3}\cdot i} = -1$$

$$w_6^{(4)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ w_6^{(5)} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تعريف: يقال لجذر نوني للوحدة w أنه جذر أولي إذا وإذا فقط كان

$$w^m \neq 1\ \ (0 < m < n)$$

من المثال السابق يتضح أن $w_6^{(1)}, w_6^{(5)}$ جذور أولية ولكن $w_6^{(0)}, w_6^{(3)}$ ليست جذور أولية.

ملاحظة: إذا كانت w جذر أولي نوني للوحدة، فإن $\{1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}\}$ تمثل الجذور النونية (المختلفة) للوحدة.

تمرين: حقق ــ في المثال السابق ــ هذه النتيجة بأخذ $w = w_6^{(1)}$.

بعض الأمثلة العامة :

مثال (١): مهما كانت قيمة n، فإن $w_6^{(1)} = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ يكون جذراً أولياً للوحدة.

مثال (٢): أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب 8i.

الحل: $z^3 = 8i = 8\,\text{cis}\,\frac{\pi}{2}$

∴ جذور هذه المعادلة هي $w^{(k)} = 8^{\frac{1}{3}}\ \text{cis}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ حيث $k = 0, 1, 2$

إذن :
$$w^{(0)} = 2\,e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$
$$w^{(1)} = 2\,\text{cis}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$
$$w^{(2)} = 2\,\text{cis}\,\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

مثال (٣): حل المعادلة $(z+1)^5 + z^5 = 0$ حيث z عدد مركب.

الحل: نضع المعادلة على الصورة $\left[-\left(\frac{z+1}{z}\right)\right]^5 = 1$، وبوضع $w = -\frac{z+1}{z}$

∴ المعادلة المعطاة تأخذ الصورة $w^5 = 1 = \text{cis}\,0$

جذور هذه المعادلة هي $w^{(k)} = \text{cis}\,\frac{2k\pi}{5}\,,\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

إذن $-\frac{z^{(k)} + 1}{z^{(k)}} = \text{cis}\,\frac{2k\pi}{5}\ ,\ k = 0, 1, 2, 3, 4$

وبحل هذه المعادلة نحصل على $z^{(k)}$ وعليه فإن جذور المعادلة المعطاة هي

$$z^{(k)} = -\frac{1}{1 + \text{cis}\,\frac{2k\pi}{5}}\ ,\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

مثال (٤): إذا كانت w جذر أولي نوني للوحدة، فبرهن أن

$$1 + w^s + w^{2s} + \dots + w^{(n-1)s} = \begin{cases} 0 & , \quad s \neq k\,n \\ n & , \quad s = k\,n \end{cases}$$

البرهان: أولاً : إذا كانت $s = k\,n$ حيث k عدد صحيح، فإن

$$w^s = w^{kn} = \left(w^n\right)^k = 1$$

إذن في هذه الحالة يكون مجموع المتسلسلة يساوي n

ثانياً: إذا كان $s \neq k\,n$ فإننا نكتب $s = k\,n + r$ حيث $0<r<s$

إذن : $w^{s} = w^{k\,n+r} = w^{k\,n} \; , w^{r} = 1$

إذن : $1 + w^{s} + w^{2s} + \ldots + w^{(n-1)s} = \dfrac{w^{n\,s} - 1}{w^{s} - 1} = \dfrac{1-1}{w^{s} - 1} = 0$ وأنــه مجموعــة متسلسلة هندسية محدودة حدها الأول 1 وأساسها w^{s} وعدد حدودها n.

مثال (٥): إذا كانت w جذر أولي نوني للوحدة ـــ برهن أن

$$1 + w + w^{2} + \ldots + w^{n-1} = 0$$

البرهان: نحصل على هذه النتيجة بوضع $s = 1$ في مثال (٤)

مثال (٦): إذا كانت $n = 2, 3, 4, \ldots$ فبرهن أن

$$\text{(a)} \quad \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 1$$

$$\text{(b)} \quad \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

البرهان: نعتبر المعادلة $z^{n} = 1$، إذن $w = e^{\frac{2\pi}{n} i}$ جذر أولي نوني للوحدة، أي أن

$$1 + w + w^{2} + \ldots + w^{n-1} = 0$$

ومنها يكون

$$1 + e^{\frac{2\pi}{n} i} + \ldots + e^{\frac{2(n-1)\pi}{n} i} = 0$$

$$\left\{1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} +$$

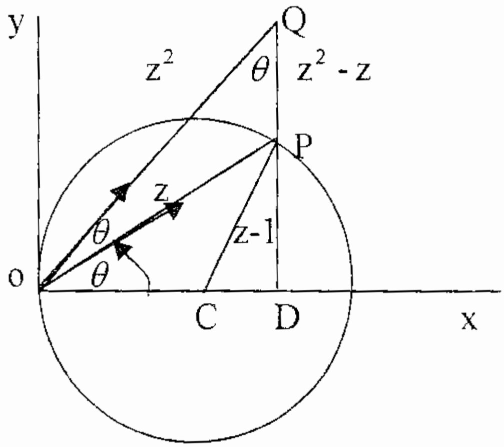
$$+ i\left\{\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right\} = 0$$

ومنها ينتج المطلوب.

مثال (٧): نفرض أن Q, P نقطتين يمثلان العددين المركبين z , z^2 على الترتيب، P تقع على محيط دائرة مركزها C، ونصف قطرها 1، برهن هندسياً أن

$$3\arg(z-1) = 3\arg z^2 = 2\arg\left(z^2 - z\right)$$

البرهان: نفرض $C(1, 0)$ هي مركز الدائرة وأن $z = oP$, $oQ = z^2$



نفرض أن $\arg z = \theta$ ، إذن $\arg z^2 = 2\theta$ ، إذن $X\hat{o}P = P\hat{o}Q = \theta$

إذن المثلثين oPQ, oCP متشابهين.

وبما أن $oC = CP$، إذن $oP = PQ$ أي أن $|z| = |z^2 - z|$،

بما أن $C\hat{o}P = \theta$ & $X\hat{C}P = 2\theta$ إذن $X\hat{D}Q = 3\theta$،

إذن $\arg(z-1) = \arg z^2 = 2\theta$، & $\arg\left(z^2 - z\right) = 3\theta$

إذن $3\arg(z-1) = 3\arg z^2 = 2\arg\left(z^2 - z\right)$

(٥.١١) بعض خواص الجذور النونية للواحد الصحيح:

(١) الجذور النونية للواحد الصحيح يمكن أن تمثل في المستوى المركب بواسطة n

من النقط تقع على محيط دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة ونقسم المحيط إلى n من الأقواس المتساوية في الطول وطول كل منها يساوي $\frac{2\pi}{n}$.

(٢) إذا كان n زوجية فإن الجذور النونية تصبح على الصورة

$$+1, \text{cis}\frac{2k\pi}{n} \quad , k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$$

واضح من ذلك هنا أن $w_n^{(0)} = \text{cis}\, 0 = 1 \;\; \& \;\; w_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = \text{cis}\, \pi = -1$

وإذا كانت $k = k_1$ حيث $1 \le k_1 \le \frac{n}{2} - 1$ فإن $w_n^{(k_1)} = \text{cis}\frac{2k_1\pi}{n}$

$$\& \;\; w_n^{(n-k_1)} = \text{cis}\frac{2(n-k_1)\pi}{n} = \text{cis}\left(-\frac{2k_1\pi}{n}\right)$$

أي أن $w_n^{(n-k_1)}$ هو مرافق العدد $w_n^{(k_1)}$.

(٣) إذا كانت n فردية، فإن الجذور النونية تصبح على الصورة :

$$1, \text{cis} \pm \frac{2k}{n}, k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n-1}{2}$$

ويمكن أن يوضح ذلك بنفس الطريقة السابقة.

(٤) بأخذ الجذور الأولى $w = \text{cis}\frac{2\pi}{n} = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ للوحدة، نلاحظ أن :

$$\left(z - w^k\right)\left(z - w^{n-k}\right) = z^2 - \left(w^k + w^{-k}\right)z + 1$$

$$= z^2 - 2z\cos\frac{2\pi k}{n}.z + 1$$

(٥) باستخدام الخواص ٢، ٣، ٤ نستنتج ما يأتي :

<u>**أولاً:**</u> إذا كانت n فردية $z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi k}{n} + 1\right)$

ثانياً: إذا كانت n زوجية $z^n - 1 = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi k}{n} + 1\right)$

مثال (٨): برهن أن

$$z^6 + z^3 + 1 = \left(w^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{9} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{9} + 1\right)$$
$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{8\pi}{9} + 1\right)$$

ثم استنتج أن

$$2\cos 3\theta + 1 = 8\left(\cos\theta - \cos\frac{2\pi}{9}\right)\left(\cos\theta\cos\frac{4\pi}{9}\right)\left(\cos\theta\cos\frac{8\pi}{9}\right)$$

البرهان: باستخدام الخاصية (5) في حالة n عدد فردي حيث n = 9 يكون

$$z^9 - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{4}\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi k}{9} + 1\right)$$
$$= (z-1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{9} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{9} + 1\right)$$
$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{3} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{8\pi}{9} + 1\right)$$
$$z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = z^2 + z + 1$$
$$z^9 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{9} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{9} + 1\right)$$
$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{8\pi}{9} + 1\right)$$
$$= (z^3 - 1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{9} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{9} + 1\right)$$

$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{8\pi}{9}+1\right)$$

ولكن
$$\frac{z^9-1}{z^3-1} = z^6 + z^3 + 1$$

$$z^6 + z^3 + 1 = \left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{9}+1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{9}+1\right) \quad (*)$$
$$\left(z^2 - 2z\cos\frac{8\pi}{9}+1\right)$$

بقسمة طرفي المعادلة (*) على z^3 وبوضع $z = e^{i\theta}$ وبالأخذ في الاعتبار أن

$$z^3 + z^{-3} = 2\cos 3\theta \quad , z + z^{-1} = 2\cos\theta$$

ينتج المطلوب.

(٦.١١) الدوال الأولية : Elementary Functions

ونعني بهذه الدوال الدالة الأسية $\omega = f(z) = \exp(z)$، والدالة اللوغاريتمية $f(z) = \log z$، والدوال المثلثية والدوال الزائدية والدوال العكسية. ويمكن للقارئ أن يجري دراسة مقارنة لهذه الدوال مع الحالة التي يكون فيها المتغير حقيقي، مثلاً

(١.٦.١١) الدالة الأسية في مجال الأعداد المركبة

Exponential Functions

للعدد المركب $z = x + iy$ نعرف الآتي :

$$ep(z) = e^x \operatorname{cis} y = e^x(\cos y + i\sin y)$$

من ذلك يتضح أن $\exp(0) = 1$

سنبين الآن أن :

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$
$$\because\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$\therefore\ \exp(z_1 + z_2) = e^{x_1 + x_2} \operatorname{cis}(y_1 + y_2)$$

$$= e^{x_1} . e^{x_2} \text{ cis } y_1 \text{ cis } y_2$$
$$= \exp(z_1).\exp(z_2)$$

نفرض أن $z_1 = z$, $z_2 = -z$ فأن

$$1 = \exp(z) \quad , \quad \exp(-z)$$
$$\therefore \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

ومن ذلك نستنتج أن :

$$\exp(z_1 - z_2) = \exp(z_1), \; \exp(-z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)}$$

في الحالة التي فيها z عدد حقيقي صرف، أي أن $z = x$, $y = 0$

$$\therefore \; \exp(z) = e^x$$

أي أنه في المجال الحقيقي تتطابق هذه الدالة مع الدالة الأسية المعروفة. عندما تكــون z تخيلية صرف أي عندما تكون : $x = 0$, $y \neq 0$

فأن : $\exp(z) = \text{cis } y = \cos y + i \sin y = e^{iy}$

وهي صيغة أويلر

i.e. $\quad \exp(iy) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$

ومنها يمكن أن نتبين أن :

$$\exp(-iy) = e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

ويمكن أن نتبين في الحالة العامة أن :

$$|\exp(z)| = e^x$$

(٢.٦.١١) دالة اللوغاريتم :

العدد المركب $z \neq 0$ نعرف اللوغاريتم الطبيعي بأنه أي عدد يحقق

$$\exp(\omega) = z$$

فإذا كانت :

$$z = r\,\text{cis}\,\theta\ ,\ \theta = \text{-}\arg z\,,\ r > 0$$

نفرض أن $\omega = u + i\,v$ حيث u, v أعداد حقيقية.

من التعريف نجد أن :

$$x\,\text{cis}\,\theta = \exp(u + i\,v) = e^{u}\ \text{cis}\,v$$

$$\therefore\ r = e^{u}\ ,\ u = \ln r\,,\ \ln r = \log_e r\,,$$

$$\text{cis}\,\theta = \text{cis}\,v\ ,\ \ v = \theta + 2\,\pi\,n,\ \ n = 0, \pm 1, \ldots$$

$$\therefore\qquad = \ln r + i\,(\,\theta + 2\,\pi\,n)\,,\, n = 0, \pm 1\,, \ldots$$

إذن ω وهو اللوغاريتم الطبيعي للعدد z مقدار متعدد القيم وله عدد لانهائي من القيم وهذه القيم جميعها تتعين من الصيغة

$$\omega = \ln r + i\arg z$$

نرمز للوغاريتم الطبيعي للعدد z بالرمز $\ln z$

$$\therefore\ \ \ln z = \ln r + i\arg z$$
$$= \ln r + i\,(\,\theta + 2\,n\,\pi)\,, n = 0, \pm 1, \pm 2\,, \ldots$$

من بين هذه القيم $(\ln z)$ نعرف أحداها وهي تلك المناظرة للقيمة $n = 0$ ونسميها القيمة الرئيسية أو الأساسية للوغاريتم ونرمز لها عادة $p\ln z$ حيث

$$\ln z = \ln r + i\,p\arg z = \ln |z| + i\,p\arg z$$

فإذا كانت z عدد حقيقي موجب r فإن $|z| = z = r\,,\theta = 0$.

نتبين بسهولة تطابق القيمة الأساسية للوغاريتم على اللوغاريتم كما ألفناها.

من السهل أن نثبت القواعد الآتية للوغاريتمات :

(١) $\ln z_1 \ln z_2$ لا تختلف عن $\ln z_1 + \ln z_1$ إلا بمضاعف صحيح من العدد $.2\,\pi\,i$

(٢) $\ln \frac{z_1}{z_2}$ لا تختلف عن $\ln z_1 - \ln z_2$ إلا بمضاعف صحيح من العدد $2\pi i$.

(٣) إذا كانت n عدد صحيح فإن $\ln z^n$ لا يختلف عن $n \ \ln \ z$ إلا بمضاعف صحيح من العدد $2\pi i$.

مثال (١): أوجد $\log\left(1+\sqrt{3}\,i\right)$.

الحل: نضع $z = i + \sqrt{3}\,i$ في الصورة المثلثية

$$\therefore \ |z| = r = \sqrt{4} = 2, \ \tan\theta = \sqrt{3}$$

ويتضح أن العدد z يقع في الربع الأول، وأن :

$$\arg z = \theta = \frac{\pi}{3}.$$

إذن

$$\log\left(1+\sqrt{3}\,i\right) = \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right), \ n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

مثال (٢): $z^a = \exp(a \log z), \ z \neq 0 \ , a = a_1 + i a_2$

ويمكن منها استنتاج نظرية دي موافر كما سبق.

(٣.٦.١١) الدوال الزائدية والدوال المثلثية:

نعرف $\sinh z = \frac{\left(e^z - e^{-z}\right)}{2}, \ \cosh z = \frac{\left(e^z + e^{-z}\right)}{2}$

ويمكن أن نثبت العلاقات الآتية :

$$\sin iz = i \sinh z \ , \ \cos iz = \cosh z$$
$$\sin h\, iz = i \sin z \ ; \ \cosh iz = \cos z$$
$$\cosh\left(z_1 + z_2\right) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\sinh\left(z_1 + z_2\right) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

وكذلك يمكن أن نرى أن الدوال العكسية دوال متعددة القيم فمثلاً :

$$\cos^{-1} z = -i \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\sinh^{-1} z = \operatorname{cosech}^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) = \log\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)$$

مثال (٣): أوجد جميع قيم $\cos^{-1} a$ حيث a عدد صحيح أو عدد حقيقي أكبر من الواحد.

الحل: نكتب $\quad z = \cos^{-1} a$

$$\therefore \quad a = \cos z = \cos(x + i y)$$

$$= \cos x \cos i y - i \sin x \sinh y$$

$$\therefore \cos x \cosh y = a \;,\; (a > 1) \;,\; \sin x \sinh y = 0$$

إذا كانت $\sinh y \sin x = 0$ فإن :

$$(1) \quad \sinh y = 0 \qquad \text{or} \qquad (2) \quad \sin x = 0$$

(١) فإذا كانت $\sinh y = 0$ فإن $y = 0$

$$\therefore \cos x \cosh y = \cos x = a > 1$$

وهذا مستحيل $(|\cos x| < 1)$ وهذا الاحتمال مرفوض.

(٢) $\quad \sin x \quad \Rightarrow \quad x = n\pi \;, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\therefore \cos x = \cos n\pi = \pm 1 = (-1)^n$$

$$\therefore \quad \cos x \cosh y = (-1)^n \cosh y = a$$

$$\therefore \quad y = \cosh^{-1} a = \pm \log\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

($\pm$ لأن $\cosh y$ دالة زوجية).

$$\therefore z = x + i y = n\pi \pm i \log\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)$$

$$\therefore \cos^{-1} a = n\pi \pm i \log\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$