# الباب العاشر

# القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة

Eigenvalues and eigenvectors of a matrix

في هذا الفصل سوف ندرس مفهوماً هاماً والذي يسمى بـالقيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة مربعة. وسوف نعطي القيم المميزة والمتجهات المميزة لبعض المصفوفات الخاصة. ثم نذكر نظرية هامة وهي نظرية كيلي هاملتون ثم نستخدم هذه النظرية في إيجاد معكوس المصفوفة.

## (١٠.١) القيم المميزة والمتجهات المميزة :

**تعريف (١):** المتجه $X \neq 0$ يسمى بالمتجه المميز للمصفوفة A إذا وجد العدد $\lambda$ بحيث يكون:

$$A\,X = \lambda\,X \qquad (1)$$

ويسمى $\lambda$ بالقيمة المميزة للمصفوفة A المناظر للمتجه المميز $X \neq 0$.

وعلى الطالب أن يتذكر أن المتجه X يمكن أن يكتب في الصورة:

$$X = [\,x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n\,]^t$$

حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تسمى بمركبات المتجه. ومعنى أن $X \neq 0$ هو أنه يوجد $x_i \neq 0$ لبعض قيم $i=1, 2, \ldots, n$.

**ملاحظة هامة (١):** على الطالب أن يلاحظ أنه لا يوجد متجه مميز X للمصفوفة A يكون مناظراً لقيمتين مميزتين ولتوضيح ذلك نفرض أنه توجد قيمتين مميزتين $\lambda_1, \lambda_2$ وتناظران المتجه المميز X للمصفوفة A أي أن

$$A\,X = \lambda_1\,X,\ A\,X = \lambda_2\,X,\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1\,X = \lambda_2\,X$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\,X = 0 \Rightarrow X = 0 \quad \text{(وهذا مستحيل)}$$

لأن $X \neq 0\,, \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ أي أن $(\lambda_1 - \lambda_2) X \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$

**ملاحظة هامة (٢):** قد يكون هناك قيمة مميزة واحدة $\lambda$ بحيث تناظر أكثر من متجه مميز لأنه إذا كانت $X$ متجه مميز فإن $k\,X$ يكون أيضاً متجهاً مناظراً لنفس القيمة $\lambda$ وذلك يمكن استنتاجه من المعادلة:

$$A\,X = \lambda X, \quad \therefore\ A\,k\,X = \lambda\,k\,X$$

وهذا يوضح أن $k\,X$ يكون أيضاً متجهاً مميزاً مناظراً لنفس القيمة المميزة $\lambda$

**المعادلة المميزة:**

من المعادلة (1) نعلم أن: $A\,X = \lambda\ X = \lambda\,I_n\ X$

وبفرض أن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من رتبة $n \times n$ ، $I_n$ هي مصفوفة الوحدة فإننا نحصل على: $(A - \lambda\ I_n) X = 0$ أو على الصورة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

ونلاحظ أن النظام (2) عبارة عن مجموعة من المعادلات المتجانسة ونعلم أن النظام (2) له حل غير الحل الصفري إذا كان وكان فقط:

$$\mathrm{Det}\,[\,A - \lambda\,I_n\,] = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ويجب ملاحظة أن مفكوك المحدد (3) هو دالة في $\lambda$ أي كثيرة حدود في $\lambda$ من درجة $n$ وبوضع:

$$f(\lambda)=\left|A-\lambda I_n\right|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

أي يكون:

$$f(\lambda)=\left|A-\lambda I_n\right|=\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+\dots+C_{n-1}\lambda+C_n \qquad (5)$$

حيث $C_1, C_2, \dots, C_n$ تكون كل منها كثيرة حدود في العناصر $a_{ij}$.

نعتبر المعادلة

$$f(\lambda)=\left|A-\lambda I_n\right|=0 \qquad (6)$$

وهذه المعادلة من درجة n في $\lambda$ وتسمى بالمعادلة المميزة للمصفوفة A وتسمى $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ بالجذور المميزة للمصفوفة وهي المناظرة للمتجهات المميزة.

**(٢.١٠) نظرية كيلي هاملتون:** كل مصفوفة مربعة A تحقق معادلتها الذاتية أي أن:

$$A^n+C_1A^{n-1}+C_2A^{n-2}+\dots+C_{n-1}A+C_nI_n=0$$

البرهان: نفرض أن B هي المصفوفة المترافقة للمصفوفة $[A-\lambda I_n]$ فتكون عناصرها كثيرات حدود من الدرجة (n-1) أو أقل ومعاملات $\lambda$ في كثيرات الحدود هذه كل منها كثيرة حدود في العناصر $a_{ij}$ ولذلك يمكن كتابة

$$B=B_o+\lambda B_1+\lambda^2B_2+\dots+\lambda^{n-1}B_{n-1} \qquad (7)$$

حيث $B_o, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ كل منها مصفوفة مربعة من رتبة (n-1) وعناصرها كثيرات حدود في $a_{ij}$.

نعتبر المعادلة: $$(A-\lambda I_n)\frac{B}{|A-\lambda I_n|}=I$$

$$\therefore\ (A-\lambda I_n)B=|A-\lambda I_n|$$

وباستخدام (5)، (7) تصبح هذه المعادلة على الصورة:

$$(A-\lambda I_n)\left(B_o+\lambda B_1+\ldots+\lambda^{n-1}B_{n-1}\right)=\left(\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\ldots+C_{n-1}\lambda+C_n\right)I_n$$

وبمساواة معاملات $\lambda$ في هذه المتطابقة نحصل على:

الحد المطلق : $$A B_o=C_n I_n$$

معامل $\lambda$ : $$-B_o+A B_1=C_{n-1} I_n$$

.... : ...

معامل $\lambda^{n-1}$ : $$-B_{n-2}+A B_{n-1}=C_1 I_n$$

معامل $\lambda^n$ : $$-B_{n-1}=I_n$$

وبضرب هذه المعادلات في $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n$ على الترتيب والجمع نحصل على: $$A^n+C_1 A^{n-1}+C_2 A^{n-2}+\ldots+C_{n-1}A+C_n I_n=0$$

وهو المطلوب إثباته.

**ملاحظة (٣):** من أهم استخدامات نظرية كيلي هاملتون حساب معكوس مصفوفة مربعة غير شاذة.

نفرض أن لدينا مصفوفة A مربعة غير شاذة ومن نظرية كيلي هاملتون نحصل على:

$$A^n+C_1 A^{n-1}+C_2 A^{n-2}+\ldots+C_{n-1}A+C_n I_n=0$$

وبضرب طرفي المعادلة في $A^{-1}$ يمكن الحصول على:

$$\therefore\ A^{-1}=-\frac{1}{C_n}\left(A^{n-1}+C_1 A^{n-2}+\ldots+C_{n-1} I_n\right)$$

## (٣.١٠) كيفية تعيين القيم الذاتية والمتجهات المميزة لمصفوفة مربعة A:

نفرض أن $\lambda$ هي إحدى القيم المميزة، X هو المتجه المميز المناظر لها فإن:

$$AX = \lambda X = \lambda I_n X$$

وبفرض أن المصفوفة A من الرتبة $n \times n$:

$$\therefore \ (A - \lambda I_n)X = 0 \qquad (8)$$

وبالعكس إذا كان $\lambda$ هو أحد جذور المعادلة (8) فإن المعادلة المصفوفية:

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

بالضرورة لابد أن يكون لها حل غير صفري X يحقق العلاقة: $AX = \lambda X$

وهذا يعني أن أي جذر من جذور المعادلة المميزة (8) هو أيضاً قيمة مميزة للمصفوفة A.

## بعض النظريات الهامة:

**نظرية (١):** المصفوفة الصفرية قيمها الذاتية منعدمة.

البرهان: نفرض أن

$$A = 0 \Rightarrow |0 - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow \lambda^n = 0, \lambda_i = 0, \forall 1, 2, 3, \ldots, n$$

**نظرية (٢):** القيم الذاتية لمصفوفة الوحدة متساوية وتساوي الواحد الصحيح.

البرهان: نفرض أن

$$A = I_n \Rightarrow |I_n - \lambda I_n| = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)^n I_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

**نظرية (٣):** المصفوفة القطرية: $D = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ لها:

$$\lambda_i = a_i, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

**<u>نظرية (٤):</u>** المصفوفة A تكون شاذة إذا كان وكان فقط إحدى قيمها الذاتية يساوي صفراً.

**<u>البرهان:</u>** يترك للطالب.

**<u>نظرية (٥):</u>** المصفوفتان $A, A^T$ لهما نفس القيم الذاتية.

**<u>البرهان :</u>** نعلم أن: $|A| = |A^T| \Rightarrow \left|\left(A^T - \lambda I_n\right)^T\right| = |A - \lambda I_n|$

أي أن المصفوفتين $A, A^T$ لهما نفس المعادلة المميزة وهذا يؤدي بدوره إلى أن لهما نفس القيم الذاتية.

**<u>نظرية (٦):</u>** إذا كانت $\lambda$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A فإن $\frac{1}{\lambda}$ هي قيمة ذاتية للمصفوفة $A^T$.

**<u>نظرية (٧):</u>** المتجهات الذاتية المناظرة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة خطياً.

**<u>البرهان :</u>** نفرض أن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وأن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ هي المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية على الترتيب.

$\therefore$ لجميع قيم i نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} A\ X_i &= \lambda_i X_i \\ A^2 X_i &= \lambda_i^2 X_i \\ A^3 X_i &= \lambda_i^3 X_i \\ &\\ A^n X_i &= \lambda_i^n X_i \end{aligned}\right\},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad (*)$$

ونفرض أن هناك علاقة بين هذه المتجهات على الصورة:

$$C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n \qquad (9)$$

وبضرب العلاقة (9) من اليسار في $A, A^2, \dots, A^{n-1}$ على الترتيب واستخدام (*) نحصل على:

$$C_1 \lambda_1 X_1 + C_2 \lambda_2 X_2 + C_3 \lambda_3 X_3 + \dots + C_n \lambda_n X_n = 0 \qquad (10)$$

$$C_1 \lambda_1^2 X_1 + C_2 \lambda_2^2 X_2 + C_3 \lambda_3^2 X_3 + \dots + C_n \lambda_n^2 X_n = 0 \qquad (11)$$

$$\vdots$$

$$C_1 \lambda_1^{n-1} X_1 + C_2 \lambda_2^{n-1} X_2 + C_3 \lambda_3^{n-1} X_3 + \dots + C_n \lambda_n^{n-1} X_n = 0 \qquad (12)$$

والمعادلات (12) – (10) يمكن كتابتها على الصورة المصفوفية:

$$[C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + \dots + C_n X_n] \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} = 0$$

أو

$$T \Psi = 0$$

والمصفوفة $\Psi$ حيث $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ تكون غير شاذة وبالتالي $T = 0$ وهذا لا يحدث إلا إذا كان: $C_i = 0, \forall i$، أي أن المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقلة خطياً (أي لا توجد علاقة خطية بينهما).

<u>مثال (١):</u> أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

وأثبت أن هذه المصفوفة تحقق معادلتها الذاتية ومن ثم أوجد $A^{-1}$.

الحل:

$$[A-\lambda I_3]=\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

∴ المعادلة المميزة هي: $f(\lambda)=[A-\lambda I_3]$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4=0 \qquad (1)$$

ولإثبات أن المصفوفة A تحقق معادلتها الذاتية نبرهن أن:

$$-A^3+6A^2-9A+4I=0 \qquad (2)$$

$$\therefore\ A^2=\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض عن $A, A^2, A^3, I$ في (2) نجد أنها محققه ولإيجاد معكوس المصفوفة $A^{-1}$ نجد من أن (2) (بضرب (2) في)

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{3}{2}A+\frac{9}{4}I_3=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

أي يكون:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

مثال (٢): أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 8 & -6. & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>الحل</u>: المعادلة الذاتية هي:

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$\therefore\ -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 45\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-3)(\lambda-15) = 0$$

$\therefore$ القيم الذاتية للمصفوفة A هي: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 15$

ولنفرض أن $x, y, z$ هي مركبات المتجه المميز X أي أن:

$$[x \quad y \quad z]^t$$

عندما يكون $\lambda_1 = 0$ يكون: $(A-OI_3)=0$ فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 6y + 2z = 0 \\ -6x + 7y - 4z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

وهذه المعادلات متجانسة في المجاهيل $x, y, z$ وكما سبق رأينا أن لهذه المعادلات حلاً غير الحل الصفري إذا كان $\text{rank}(A) < n$ حيث n عدد المجاهيل أي تكون مرتبة المصفوفة A هي 2 أو $r=1$ أي أن هذه المعادلات لها عدد لانهائي من الحلول ويمكن في هذه الحالة إعطاء قيم اختيارية لعدد $n-r$ من المتغيرات $x, y, z$. بالنسبة للنظام (3) بإجراء العمليات الأولية على صفوفه نجد أن $r=2$ ولذلك نفرض أحد المتغيرات بقيمة اختيارية k وليكن z مثلاً ثم نحل باقي المعادلات بدلالة z.

(بضرب المعادلة الأولى في 2 والجمع على المعادلة الثانية)

$$\therefore\ 10x - 5y = 0 \Rightarrow 2x = y$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة في (3) نحصل على:

$$-3x + 3z = 0 \Rightarrow x = z$$

وبوضع $z = k$ عدد ثابت لا يساوي صفر.

∴ حلول المعادلات (3) هي: $x = \frac{1}{2}k, y = k, z = k$

أي يوجد عدد لانهائي من الحلول غير الصفرية لمجموعة المعادلات (3) وبأخذ $k=2$ مثلاً نحصل على: $x = 1, y = 2, z = 2$

أي أن المتجه المناظر للقيمة $\lambda_1 = 0$ هو : $X_1 = [1 \quad 2 \quad 3]^t$

وبالطبع إذا أخذنا أي قيمة للثابت k فإننا نحصل على المتجه المميز $k\ X$ أي له نفس اتجاه المتجه X ولكن يختلف في الطول وكما رأينا سابقاً إذا كان X متجه مميز للقيمة $\lambda$ فإن $k\,X$ يكون متجهاً مميزاً آخر مناظراً لنفس القيمة $\lambda$.

عندما $\lambda_2 = 3$ يكون المتجه المناظر هو متجه X الذي يحقق المعادلة:

$$(A - 3I_3)X = 0$$

وبنفس الطريقة السابقة نحصل على المتجه الذي له المركبات:

$$X_2 = [2 \quad 1 \quad -1]^t$$

وبالمثل عندما $\lambda_3 = 15$ نحصل على المتجه المميز:

$$X_3 = [2 \quad -2 \quad 1]^t$$

وعلى ذلك فإن المتجهات المميز المقابلة للقيم المميزة $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 15$ هي المتجهات التي لها المركبات الآتية حسب الترتيب:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## تمارين (١٠)

(١) أوجد القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفات الآتية:

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $D = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

(v) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $F = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -6 & -6 \\ 4 & -1 & -4 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

(٢) أوجد المعادلة المميزة للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ وأثبت أن هذه المصفوفة تحقق معادلتها الذاتية ومن ثم أوجد معكوسها.

(٣) أوجد قيم a, b التي تجعل للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ متجه ذاتي ثم أحسب القيم والمتجهات الذاتية الأخرى.

(٤) أوجد شرط أن يكون للمصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ قيمة ذاتية مساوية للواحد الصحيح.

(٥) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A التي تحقق

$$6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}+18\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}+6\,I_3=0$$

حيث $I_3$ مصفوفة الوحدة.

(٦) برهن أنه إذا كانت A، B مصفوفتين مربعتين من درجة $n\times n$ وكانت A غير شاذة. فإن المصفوفات $B\,A^{-1}, A^{-1}\,B$ لهما نفس القيم الذاتية.

(٧) برهن أن المصفوفات $A^{-1}\,B\,A, B$ لهما نفس القيم المميزة.