# الباب التاسع

# حلول المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات

## (١.٩) مرتبة المصفوفة والعمليات الأولية على صفوف المصفوفة

**Rank of Matrix and the elementary operation on its row**

في هذا الفصل سوف نعطي مفهوم مرتبة المصفوفة والذي يلعب دورا هاماً في كثير من الموضوعات وخصوصاً في حل نظام المعادلات الخطية.

**تعريف (١) :** يقال للمصفوفة A أنها ذات مرتبة r إذا كان لها على الأقل محيدداً minor واحداً من رتبة $r \neq 0$ وكانت جميع محيدداتها التي من رتبة $r+1$ كل منها مساوياً للصفر، وسوف نرمز لمرتبة المصفوفة A بالرمز rank(A).

مثال (١): أوجد مرتبة كل من المصفوفات الآتية:

(i) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

الحل: (i) نلاحظ أن: $|A|=2\neq 0$ $\therefore\ \text{rank}(A)=3,$

(ii) نلاحظ أن: $|B|=0$ ولكن $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ وهو محيدد للمصفوفة B من الرتبة 2،

إذن $\text{rank}(B) = 2$

(iii) نلاحظ أن: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0$ $,\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$ $|C|=0,$ أي أن محدد المصفوفة C

مساوياً للصفر وجميع محدداتها من الرتبة الثانية مساوية للصفر، إذن
rank(C)=1

**مثال (٢):** أوجد رتبة المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

**الحل:** واضح أنه لا يمكن أن نكون من المصفوفة محيددات أعلى من الرتبة الثالثة لأن المصفوفة من الرتبة $3\times 4$ ونلاحظ أن المصفوفة تحتوي على أربع محيددات من الرتبة الثالثة وهي:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 6 \\ 8 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

واضح أن المحيددة الثالثة والرابعة في كل منهما يساوي صفراً لتشابه عمودين في كل منهما أما المحيددة الأولى فهي :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومن ذلك نجد أن جميع محيددات الرتبة الثالثة قيمتها أصفاراً. ولذلك نبحث عن محيددات الرتبة الثنية فمثلاً $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ وبالتالي فإن $\text{rank}(A) = 2$.

من الأمثلة السابقة وجدنا أن مرتبة المصفوفة تتعين تماماً من البحث في قيمة محيدداتها ولكن من معلوماتنا في المحددات أنه لإيجاد قيمة محدد ما يمكن تبسيطه وذلك بإجراء بعض التحويلات البسيطة كإضافة صَف إلى صف أو عمود إلى عمود أو ضرب صف أو عمود في عدد k مصلاً لا يساوي الصفر ومن ذلك

نــرى أن هــذه التحويلات البسيطــة في محدد المصفوفة ستكون طريقة فعــالة وسريعة للوصول إلى مرتبة المصفوفة المعطاة.

وسوف نذكر الآن بعض التحويلات البســيطة Elementary operation التي يمكن إجراؤها على المصفوفــة، هــذه التحويلات تصلح أيضاً إذا ما أجريـت على الأعمدة بدلاً من الصفوف.

وسنثبت أن التحويلات البسيطة الآتية في مصفوفة ما لا تغير من مرتبتها:ــ

١ــ إبدال صفين (عمودين) في المصفوفة.

٢ــ ضرب عناصر أي صف (عمود) في عدد ما $k \neq 0$.

٣ــ إضافة صف (عمود) أو مضاعفاته إلى أي صف (عمود) أخر من صفــوف (أعمدة) المصفوفة وللسهولة سوف نرمز لهذه التحويلات بالرموز الآتية:ــ

(i) الرمز $R_{ij}$ يعني إبدال الصف الذي ترتيبه i بالصف الذي ترتيبه j.

(ii) $R_i(k)$ يعني ضرب الصف الذي ترتيبه i في عدد $k \neq 0$.

(iii) $R_{ij}(k)$ يعني إضافة الصف الذي ترتيبه j مضروباً عناصره في العــدد k إلى الصف الذي ترتيبه i وبالمثل يمكن استعمال الرموز: $C_{ij}(k), C_i(k), C_{ij}(k)$ بالنسبة للأعمدة.

**<u>تعريف (٢):</u>** نقول أن المصفوفتين A, B **<u>متكافئتان</u>** equivalent وتكتــب في الصورة $A \sim B$ إذا أمكن الحصول على أحدهما من الأخرى بــإجراء تحويــلات بسيطة.

**<u>نظرية (١):</u>** التحويلات البسيطة على مصفوفة لا تغير من مرتبتها.

<u>البرهان:</u> متروك للقارئ.

**<u>نظرية (٢):</u>** أي مصفوفة A غير صفرية رتبتها r يمكن بواسطة تحويلات بسيطة كتابتها على الصورة: $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حيث $I_r$ هي مصفوفة وحدة من رتبة r، 0 المصفوفة الصفرية.

الصورة السابقة تسمى **<u>بالصورة الطبيعية</u>** Canonical form أو **<u>القانونية</u>** التي يكون عليها أي مصفوفة غير صفرية.

<u>مثال (٣)</u>: أوجد المصفوفة المكافئة للمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ ثم أوجد مرتبتها.

<u>الحل</u>: بإجراء التحويلات البسيطة الآتية: $R_{21}(-2), R_{31}(1), R_{32}(-1)$ على الصفوف نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 12 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

وحيث أن جميع محيددات B ذات الدرجة 3 تساوي صفراً بينما: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

أي أن rank(B) =2 ولذلك يكون rank(A) =2

مثال (٤): أوجد مرتبة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&2&1&2\\0&1&1&0\\2&0&0&3\end{bmatrix}$

الحل: بضرب عناصر الصف الأول في $\frac{1}{3}$ نحصل على: $A=\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&1&0\\2&0&0&3\end{bmatrix}$

بضرب العمود الأول في $\frac{2}{3}$ ثم طرحه من العمود الثاني وبضرب العمـــود الأول في $\frac{1}{3}$ وطرحه من العمود الثالث ثم ضرب العمود الأول في $\frac{2}{3}$ وطرحه من العمـــود الرابع نحصل على:

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1&2\\0&1&1&0\\2&0&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&1&0\\2&0&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\2&-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

وبضرب الصف الأول في 2 ثم طرحه من الصف الثالث نحصل على:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\2&-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

وبطرح العمود الثاني من العمود الثالث نحصل على:

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\2&-\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix}$$

وبضرب الصف الثاني في $\frac{4}{5}$ ثم جمعه على الصف الثالث نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

بضرب عناصر العمود الثالث في $\frac{3}{2}$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

بضرب عناصر العمود الثالث في $\frac{5}{3}$ وطرحه من العمود الرابع نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(A) = 3$$

مثال (٥): أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ثم أوجد مرتبتها.

الحل: بإجراء التحويل $R_{12}$ نحصل على:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات البسيطة $C_{21}(1), C_{31}(2), C_{41}(4)$ على المصفوفة الأخيرة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات $R_{21}(-2), R_{31}(-3), R_{41}(-6)$ على المصفوفة الأخيرة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 9 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

إذا رمزنا للمصفوفة الأخيرة بأنها B نجد أن محيدد الرتبة الثالثة:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 33 \neq 0, \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن مرتبة المصفوفة A هي الثالثة أي يكون: $\text{rank}(A) = 3$

وبوضع المصفوفة A على الصورة الطبيعية نعتبر المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}, R_1\left(\frac{1}{5}\right)$$

وبإجراء التحويلات: $C_{21}\left(-\frac{3}{5}\right), C_{31}\left(-\frac{7}{5}\right)$ على المصفوفة الأخيرة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 4 & 9 & 10 \\ 9 & 12 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 9 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات $R_3(-9), R_{21}(-4)$ نحصل على:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 9 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} & \frac{22}{5} \end{bmatrix}$$

وبإجراء التحويلات $C_{32}\left(-\frac{22}{33}\right), R_2\left(\frac{5}{33}\right), R_{32}(-1)$ نحصل على:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية هي: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

## (٢.٩) معكوس المصفوفة Inverse of a matrix

في هذا الفصل سوف ندرس طرقاً بسيطة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة، معكوس المصفوفة المربعة A من الدرجة $n \times n$ يكتب على الصورة $A^{-1}$ ويكون أيضاً مصفوفة مربعة بحيث يكون: $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

وشرط وجود معكوس للمصفوفة A هو أن تكون هذه المصفوفة A غير مفردة non-singular أي $|A| \neq 0$.

أما إذا كانت المصفوفة مفردة singular أي يكون $|A| = 0$، لا يكون للمصفوفة معكوس. وعموماً إذا وجد للمصفوفة معكوس فإن هذا المعكوس يكون وحيداً ونوضح ذلك من النظرية الآتية:

**<u>نظرية (٣):</u>** معكوس المصفوفة وحيد.

<u>البرهان:</u> نفرض أن A, B, C مصفوفات مربعة تحقق $C A = I, A B = I$ فإنه ينتج

من العلاقة $C\,(A\,B) = (C\,A)\,B$ أن $B = C$ وعلى ذلــــك $B = C = A^{-1}$ هـــي المعكوس الوحيد للمصفوفة A.

**نظرية (٤):** نفرض أن A, B مصفوفتان غير مفردتان فإن الخواص التالي تكــون محققه:

$$\text{(i)}\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \qquad \text{(ii)}\ (A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

$$\text{(iii)}\ \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1} \qquad \text{(v)}\ \text{Det}\,(A)\,.\,\text{Det}\left(A^{-1}\right) = 1$$

البرهان: (iii) $\because A\,A^{-1} = I \Rightarrow \left(A\,A^{-1}\right)^{T} = I^{T} = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{T} A^{T} = I$

وبضرب الطرفين في $\left(A^{T}\right)^{-1}$ نحصل على:

$$\left(A^{-1}\right)^{T} = A^{T}\left(A^{T}\right)^{-1} = I\left(A^{T}\right)^{-1}$$

$$\therefore \left(A^{-1}\right)^{T} I = I\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$$

## (١.٢.٩) معكوس المصفوفة عن طريــق المصفوفــة المــترافقة (المصاحبة أو المرتبطة):

**نظرية (٥):** إذا كانت المصفوفة المربعة A غير شاذة أي يكون $|A| \neq 0$ فـــإن معكوس المصفوفة $A^{-1}$ يعطى من: $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{|A|}$

البرهان: تحقق من أن $A\,A^{-1} = \dfrac{A\,.\,\text{adj}(A)}{|A|} = \dfrac{|A|\,I}{|A|} = I$

مثال (٦): أوجد معكوس المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

الحل: من مثال (٨) في الباب الســـابق أثبتنـــا أن $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ وأن

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&3\end{vmatrix}=-2$$

$$\therefore\ A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}&-3&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

مثال (٧): أوجد معكوس المصفوفة $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$

الحل:

$$|A|=5,\ \operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}4&-3\\-1&2\end{bmatrix},\ \therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

مثال (٨): أوجد معكوس المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}$

الحل:

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\8&-6&2\\-5&3&-1\end{bmatrix},|A|=-2,A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-4&3&-1\\\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

## (٣.٢.٩): معكوس المصفوفة باستخدام العمليات الأولية:

في هذه الطريقة نمد المصفوفة A بمصفوفة I على الصورة [A : I] ثم نحاول الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة [A : I] على الصورة [I : B] فتكون B هي معكوس المصفوفة A أي يكون: $[A:I]\xrightarrow[\text{على صفوف المصفوفة}]{\text{عمليات أولية}}[I:A^{-1}]$

مثال (٩): أوجد معكوس المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}5&4&0\\0&3&2\\0&1&0\end{bmatrix}$

الحل: نعتبر $[A:I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}5&4&0&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

بضرب الصف الأول في $\frac{1}{5}$ نحصل على: $\sim\left[\begin{array}{cccc:cc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

بضرب الصف الثاني في $\frac{1}{3}$: $\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$

وبإجراء التحويلات $R_{32}(-1), R_{21}\left(-\frac{4}{5}\right)$ نجد أن:

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-\frac{8}{15}&\frac{1}{3}&\frac{4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&-\frac{2}{3}&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right]$$

وبإجراء التحويلات $R_{31}\left(\frac{8}{15}\right), R_{23}\left(-\frac{2}{3}\right)$ نحصل على:

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{5}&0&-\frac{4}{5}\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{array}\right]=\left[I:A^{-1}\right]$$

وبذلك يكون: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&-\frac{4}{5}\\0&0&1\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

## (٣.٢.٩) معكوس بعض المصفوفات الخاصة:

باستخدام ما سبق عرضه في (١,٢,٩)، (٢.٢.٩) يكون لدينا الآتي:

١ــ إذا كانت A مصفوفة $2 \times 2$ غير مفرده على الصورة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

مثال (١٠): أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

٢ــ إذا كانت المصفوفة A قطرية أي تكون $\therefore$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

فإن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

فمثلاً إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

٣ــ إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا (أو سفلى) فإن $A^{-1}$ تكون أيضاً مثلثية عليا (أو سفلى).

٤ــ إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن $A^{-1}$ تكون متماثلة أيضاً.

٥ــ معكوس المصفوفة المربعة A يكون موجوداً إذا كان وكان فقط rank(A)=n وتكون المصفوفة غير مفردة إذا كان rank(A)=n وتكون مفــردة إذا كــان rank(A)<n.

## (٣.٩) المعادلات الخطية المتجانسة

Homogeneous linear equations

_نعتبر m من المعادلات الخطية المتجانسة في n من المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$ علــى الصورة

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث $a_{ij}$ أعداداً قياسية.

وباستخدام لغة المصفوفات يمكن كتابة النظام المتجانس السابق على الصورة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو في الصورة المختصرة

$$AX = O \qquad (2)$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$$

حيث A مصفوفة من الدرجة $m \times n$، X مصفوفة من الدرجة $n \times 1$، O هي مصفوفة صفرية من درجة $m \times 1$.

ولدراسة حل نظام المعادلات المتجانسة (2) ندرس الحالات الآتية:

**أولاً: عندما m = n**

(١) إذا كانت A غير شاذة أي $A^{-1}$ موجود أو بتعبير آخر $|A| \neq 0$ أو rank(A)=n أي يكون مرتبة الصفوف A مساوي لعدد المجاهيل في هذه الحالة لا يوجد للمسألة حل إلا الحل الصفري (الحل التافه trivial solution, zero solution).

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

(٢) إذا كانت A شاذة (مفردة) أي تكون $A^{-1}$ غير موجودة أو بتعبير آخر $|A| = 0$ أو $\operatorname{rank}(A) = r < n$، في هذه الحالة يوجد للنظام (2) عدد لانهائي من الحلول ويمكن الحصول عليه بفرض n-r من المجاهيل على أنها بارامترات (متغيرات مستقلة) ونعين الباقي بدلالتهم.

**ثانياً: $m \neq n$**

(١) إذا كان $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}[A : O] = n$ فإن النظام (2) يكون متوافقاً consistent دائماً ويكون $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ هو دائماً حل لهذا النظام.

(٢) $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}[A \mid O] = r < n$، نقوم بفرض n-r من المجاهيل على أنها بارامترات ونعين الباقي من خلالهم.

<u>مثال (١)</u>: حل نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \\ x - 11y + 14z &= 0 \end{aligned}$$

الحل: هذا النظام يكافئ المعادلة المصفوفية:

$$AX=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -11 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

وباستخدام التحويلات البسيطة على صفوف المصفوفة A:

$$R_{31}(-1), R_{21}(-2), R_{32}(-2)$$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow x+3y-2z=0, -7y+8z=0$$

$$\Rightarrow x=-\frac{10}{7}z, y=\frac{8}{7}z$$

وفي هذه الحالة نعتبر z كبارامتر أي $z\in R$، لكل قيمة من قيم z توجد قيمة للمتغيرات x, y وهذا يوضح معنى أن النظام له عدد لانهائي من الحلول.

$$x+\frac{3}{2}x=0, \frac{3}{4}z=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}z, y=-\frac{3}{4}z$$

حيث z بارامتر. أي بإعطاء z كل القيم الممكنة من الأعداد الحقيقية نحصل على x, y المناظرة وهذا يوضح معنى عدد لانهائي من الحلول.

## (٤.٩) المعادلات الخطية غير المتجانسة:

non homogeneous linear equations

نعتبر m من المعادلات الغير متجانسة في n من المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$ على الصورة:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m$$

يمكن كتابة النظام السابق على الصورة المصفوفية أو في الصورة المختصرة:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i \quad \text{حيث} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = b$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

لحل النظام الغير متجانس: $A\,X = b$ ندرس الحالات الآتية :

**الحالة الأولى:** إذا كان $\text{rank}(A) = \text{rank}\,[A \mid b]$ حيث $[A \mid b]$ تسمى المصفوفة الموسعة agumented matrix فإنه يقال أن النظام متوافق consistent وفي هذه الحالة تكون $A$ غير شاذة أي يكون $A^{-1}$ موجوداً ويمكن في هذه الحالة حل النظام بطريقة المعكوس أو بطريقة الحذف لجاوس، أو بأي طريقة أخرى. وسوف ندرس طريقة المعكوس وطريقة الحذف لجاوس Gauss elimination.

**أ ـ طريقة المعكوس:** في هذه الطريقة نحسب معكوس المصفوفة $A^{-1}$ بأي طريقة من الطرق السابقة ثم نحصل على الحل في الصورة :

$$X = A^{-1}\, b \qquad \text{(لاحظ أن } m=n\text{)}$$

**ب ـ طريقة كرامير:** وفيها تستخدم المحددات لحساب المجاهيل مباشرة.

**جـ ـ طريقة الحذف لجاوس:** في هذه الطريقة تمد مصفوفة المعـاملات A بالمتجه b لتكون المصفوفة الموسعة $[A \mid b]$ ثم نجري بعض العمليات البسيطة علـى الصفوف لنحصل على مصفوفة مكافئة يمكن من خلالها حل المعـادلات بطريقـة أسهل.

**الحالة الثانية:** $\text{rank}(A) = \text{rank}\,[A \mid b] = r < n$ في هـذه الحالـة يكـون المعكوس $A^{-1}$ غير موجود ومن ثم لا يوجد حل وحيد ويصبح هناك عدد لانهـائي من الحلول. نقوم بإعطاء n-r من المجاهيل قيم اختيارية والتي تقوم بتوليـد العـدد اللانهائي من الحلول. أما إذا كان $\text{rank}(A) \neq \text{rank}[A \mid b], \text{rank}(A) < n$ في هذه الحالة تكون A مصفوفـة شـاذة وتكـون المعادلات في هذه الحالة غير متوافقـة non consistent وبالتالي لا يوجد حل في هذه الحالة.

مثال (٢): باستخدام المصفوفات أوجد حل لمجموعة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} 4x - 3y + z &= 11 \\ 2x + y - 4z &= -1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

الحل: يمكن كتابة المعادلات على الصورة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad AX = b \qquad (1)$$

ونفرض أن: $|A| \neq 0$، $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ وبضرب طرفي المعادلـة (1) في $A^{-1}$ نحصل على x, y, z.

$$\therefore \ |A| = 27 \neq 0$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}6 & -4 & 11\\ 0 & -9 & 18\\ 3 & -1 & 10\end{bmatrix}\ \therefore A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}6 & -4 & 11\\ 0 & -9 & 18\\ 8 & -11 & 10\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}A\{X\}=A^{-1}\begin{bmatrix}11\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}6 & -4 & 11\\ 0 & -9 & 18\\ 3 & -11 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

مثال (٣): بطريقة الحذف لجاوس أوجد حل نظام المعادلات

$$\begin{aligned} x+2y+5z&=-9\\ x-y+3z&=2\\ 3x-6y-z&=25\end{aligned}$$

الحل: يمكن كتابة المعادلات السابقة على الصورة:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & -6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 2\\ 25\end{bmatrix}$$

وبإجراء العمليات الأولية على صفوف مصفوفة المعاملات تتحول إلى مصفوفة مثلثية عليا ثم نستخدم التعويض الخلفي بمعنى المعادلة الثالثة في الوضع الجديد نحصل منها على z وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على y وهكذا.

مثال (٥): اثبت أن مجموعة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x+4y-z+2t&=1\\ x-2y+3z+t&=2\\ 3x-14y-11z+t&=3\end{aligned}$$

ليست متفقة (ليست لها حل).

الحل: مجموعة المعادلات المعطاة على الصورة المصفوفية:

$$AX=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -14 & -11 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

حيث $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -14 & -11 & 1\end{bmatrix}, X^t=\begin{bmatrix}x & y & z & t\end{bmatrix}$

المصفوفة الموسعة هي: $[A|B]=\left[\begin{array}{cccc:c}3 & 4 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & -14 & -11 & 1 & 3\end{array}\right]$

وبإجراء العمليات الأولية على الصفوف من السهل أن نتبين أن

$$\text{rank}(A)=2,\ \text{rank}[A|B]=3$$
$$\text{rank}(A)\neq\text{rank}[A|B]$$

أي أن المجموعة غير متفقة.

مثال (٥): أوجد قيمة $\lambda, \mu$ التي تجعل نظام المعادلات:

$$x+y+z=6$$
$$x+2y+3z=10$$
$$x+2y+\lambda z=\mu$$

(i) ليس له حل (ii) له حل وحيد (iii) له عدد لانهائي من الحلول.

الحل: نكتب النظام على الصورة: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 10\\ \mu\end{bmatrix}$

نظام المعادلات يكون له حل وحيد إذا كان وكان فقط محدد مصفوفة المعـــاملات

مختلف عن الصفر أي أن: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda - 3 \neq 0$

يكون للنظام حل وحيد عندما $\lambda \neq 3$، $\mu$ تأخذ أي قيمة.

نعتبر المصفوفتان $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (في حالة $\lambda = 3$)

من السهل أن نتبين أنه ليس لهما نفس المرتبة (باستخدام العمليات الأوليـــة علـــى صفوفهما). وتكون مرتبة مصفوفة المعاملات هي 2 إذا كان وكان فقـط $\mu = 10$.

وإذا كان $\lambda = 3, \mu \neq 10$ لا يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول.

## تمارين (٩)

(١) أوجد مرتبة المصفوفات التالية:

$$\text{(i)}\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(٢) أوجد مرتبة المصفوفات الآتية: A, B, A+B, A B, B A حيث

$$\text{(i)}\quad A=\begin{bmatrix}1&5&4\\0&3&2\\2&13&10\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&-3&4\\3&-2&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\6&12&6\\5&10&5\end{bmatrix}$$

(٣) أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفات الآتية ومن ثم أوجد مرتبتها

$$\text{(i)}\quad A=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\0&-1&-1\end{bmatrix},\qquad \text{(ii)}\ B=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&3\\0&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad C=\begin{bmatrix}1&-1&2&-1\\4&2&-1&2\\2&2&-2&0\end{bmatrix}$$

(٤) أوجد الصورة الطبيعية للمصفوفات الآتية ومن ثم أوجد مرتبتها

$$\text{(a)}\ A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\qquad \text{(b)}\ A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\ A=\begin{bmatrix}1&3&-5&7\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad \text{(d)}\ A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\text{(e)}\ A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\qquad \text{(f)}\ A=\begin{bmatrix}3&-1&4\\0&2&1\\1&-1&-2\end{bmatrix}$$

(٥) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ أثبت أن $A^3 - 5A^2 - 4A + 30I = 0$ ثم أوجد $A^{-1}$.

(٦) أوجد حل مجموعة المعادلات الآتية:

(i)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 1 \\ 2x - 2y + 3z &= 2 \\ x - y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 5x + 3y + 7z &= 4 \\ 3x + 26y + 2z &= 9 \\ 7x + 2y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 4x - 5y - 2z &= 0 \\ 5x - 4y + 2z &= 2 \\ 2x + 2y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 2x + y - 6z &= 4 \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3_2 + x_3 + 6x_4 - x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

(٧) عين قيمة $\lambda$ لكي يكون كلاً من أنظمة المعادلات الخطية الآتية متفقة أو غير متفقة وفي حالة كونها متفقة أوجد قيمة $\lambda$ التي تجعل للنظام حل وحيد في الحالات الآتية:

(i)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 11x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \lambda x + y + z + t &= 1 \\ x + \lambda y + z + t &= \lambda \\ x + y + \lambda z + t &= \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda t &= \lambda^2 \end{aligned}$$

(٨) أوجد قيمة $c, a$ في النظام:

$$\begin{aligned}
2x + y - 2z + 5t &= 22\\
5x + 3y + 6z + 7t &= 40\\
3x + 2y - 4z + 2t &= c\\
4x + 3y - 6z &= a
\end{aligned}$$

التي تجعله (i) غير متفق (ii) له أكثر من حل.

(٩) لأي قيمة $\lambda$ يكون للمعادلات

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 1\\
x + 2y + 4z &= \lambda\\
x + 4y + 10z &= \lambda^2
\end{aligned}$$

حل وحيد؟ ثم أوجد الحل الكامل لهذا النظام.

(١٠) أوجد حل المعادلات الخطية المتجانسة الآتية:

(i)
$$\begin{aligned}
2x + 3y - z &= 0\\
x - y + 2z - 4t &= 0\\
3x + y + 3z + 3t &= 0\\
6x + 2y - 7t &= 0
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
x - 2y + 3z + 4t + u &= 0\\
x - z + t + u &= 0\\
3x - y + z - u &= 0\\
-x + y + 2t + 9u &= 0\\
3x + y + 3t + 9u &= 0
\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0\\
4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 &= 0\\
6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 45x_5 &= 0\\
4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}$$