الباب الخامس

المستويات الأساسية لسطوح الدرجة الثانية

Principal Surfaces of Conicoid

(١.٥) تحويل الانتقال : Translation Transformation:

يعرف سطح الدرجة الثانية Conicoid على أنه المحل الهندسي لنقط الفراغ التي تحقق المعادلة

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\sum_{i=1}^{3} b_i\, x_i + d = 0 \qquad (1)$$

حيث $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z) \in R^3$، نفرض أن

$A = (a_{ij}), x = (x_1, x_2, x_3)^t , B = (b_1, b_2 , b_3)$ حيث $A = A^t$ مصفوفة متماثلة من النوع 3×3.

إذن المعادلة (1) يمكن كتابتها في الصورة المصفوفية الآتية:

$$x^t A x + 2 B x + d = 0 \qquad (2)$$

في حالة سطح الكرة فإن المصفوفة A تصبح مصفوفة عاملية أي (كمثال خاص) :

$$A = \text{diag}\,(a_{11}\; a_{11}\; a_{11}), a_{11} > 0 , d < 0 ,\; B = 0$$

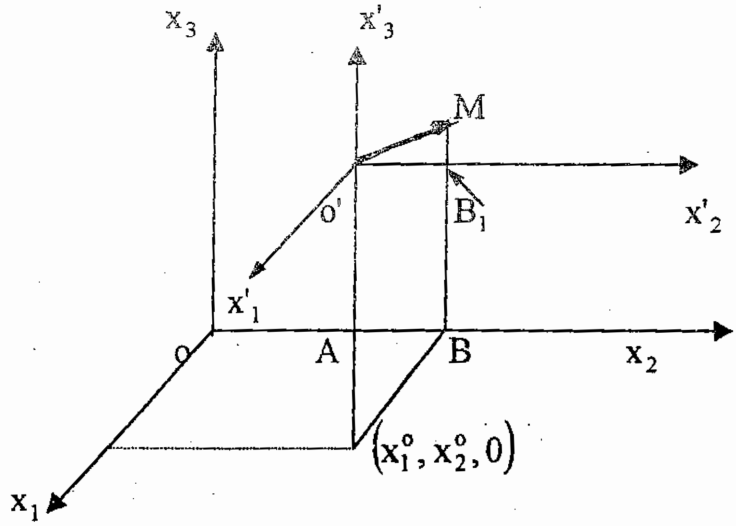
أو $a_{11} < 0, d > 0$ أو $B \neq 0$ ولكن بشروط على d.

لدراسة المعادلة (1) دراسة تفصيلية نستخدم فكرة نقل المحاور ودوران المحاور في الفراغ.

نفرض أن $o\,x_1\, x_2\, x_3$ مجموعة إحداثيات كرتيزية متعامدة في الفراغ E^3 ثم ننقل نقطة الأصل o إلى النقطة o' دون تغير اتجاه المحاور فنحصل بذلك على مجموعة إحداثيات كرتيزية $o'x'_1\, x'_2\, x'_3$ كما في الشكل.

نفرض أن إحداثيات النقطة o' بالنسبة لمجموعة الإحداثيات $ox_1x_2x_3$ هي

(x_1^o, x_2^o, x_3^o)، نفرض أن M أي نقطة في الفراغ وأن إحداثياقا في النظـــامين هــي (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) على الترتيب.



شكل (١)

لإيجاد العلاقة بين إحداثيات النقطةM، نفرض أن A مســقط o' علــى ox_2 وأن B, B_1 مسقطا M على ox_2 , $o'x'_2$ على الترتيب. من الرسم يتضح أن

$$oB = oA + AB = oA + o'B_1$$

$$\therefore\ x_2 = x'_2 + x_2^o$$

وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن

$$x_1 = x'_1 + x_1^o\ , x_3 = x_3 + x_3^o$$

ويكون لدينا التحويل الآتي في الفراغي الثلاثي

$$x = I_3\ x' + x^o \qquad (3)$$

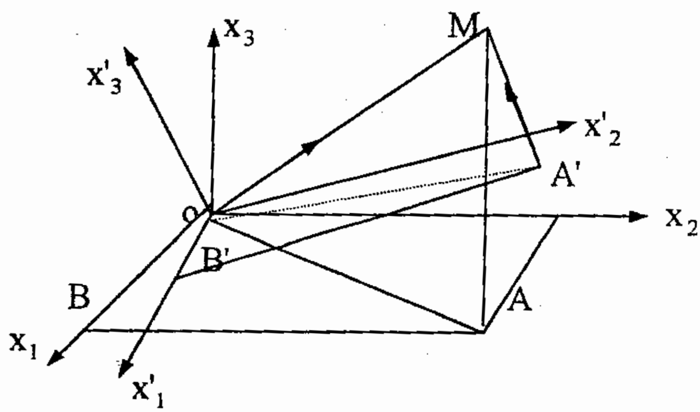
حيث

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}^o = \begin{bmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \end{bmatrix}$$

التحويل (3) يسمى تحويل الانتقال، I_3 مصفوفة الوحدة وأهمية تحويل الانتقال في الصيغة التربيعية (1) هو حذف حدود الدرجة الأولى وهي تكافئ إكمال المربع بلغة الجبر العام.

(٢.٥) تحويل الدوران Transformation of rotation

بفرض أننا دورنا المحاور مع بقاء نقطة الأصل ثابتة (مع المحافظة على الاتجاه) بحيث أن $(L_1, m_1, n_1), (L_1, m_2, n_2), (L_3, m_3, n_3)$ هي اتجاهات المحاور الجديدة ox'_1, ox'_2, ox'_3 بالنسبة للمحاور الأصلية (مركبات الاتجاهات هي جيوب تمام الاتجاه للزوايا التي تصنعها المحاور الجديدة مع المحاور الأصلية) بحيث تظل المحاور متعامدة والاتجاهات هي متجهات الوحدة.



شكل (٢)

فإذا كانت A, A' مسقطا M على المستويين $ox_1x_2, ox'_1x'_2$ على الترتيب وكانت B, B' مسقطا A, A' على ox_1, ox'_1 على الترتيب فإن:

$$oB = x_1 , BA = x_2 , AM = x_3 , oB' = x'_1$$

$$B'A' = x'_2 , A'M = x'_3$$

ومن الرسم نستنتج أن مسقط oM على ox_1 يساوي مجموع المساقط

أي أن A'M, oB', B'A'

$$x_1 = L_1 x'_1 + L_2 x'_2 + L_3 x'_3$$

بالمثل يكون

$$x_2 = m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m_3 x'_3$$

$$x_3 = n_1 x'_1 + n_2 x'_2 + n_3 x'_3$$

والتحويل يسمى تحويل الدوران ويأخذ الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

حيث مصفوفة المعاملات مصفوفة متعامدة orthogonal matrix (يمكن أن نتأكد من ذلك باستخدام خواص جيوب تمام الاتجاه) وحيث أنها مصفوفة متعامدة (عمودية يكون معكوسها (مقلوبها) هو المصفوفة البديلة Transpose matrix (المنقولة) وبالتالي يكون التحويل العكسي هو :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & m_1 & n_1 \\ L_2 & m_2 & n_2 \\ L_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وهذا التحويل حالة خاصة من التحويلات الخطية التي ندرسها في الجبر الخطي. وكل عمود من أعمدة مصفوفة التحويل (4) يعطى اتجاه المحاور الجديدة بالنسبة للمحاور الأصلية. وكل مركبة من مركبات اتجاه المحاور الجديدة تعتبر جيب تمام اتجاه الزاوية التي يصنعها مع محاور الإحداثيات.

نعلم أن مقطع مستوى مع سطح هو منحنى واقع في المستوى وكذلك مقطع سطح الدرجة الثانية Coinoid بمستوى هو عبارة عن منحنى من الدرجة الثانية (قطع مخروطي) Conic section.

لنفرض أن المستوى

$$L\,x_1 + m\,x_2 + n\,x_3 = k \qquad (6)$$

قطع السطح (1)، نقوم بنقل محاور الإحداثيات نقل متوازي إلى النقطة o' على المستوى (6) بحيث يكون المحورين $o'x'_1\,,\,o'x'_2$ في المستوى (6). عندئذ تأخذ المعادلة (1) الصورة

$$\sum_{i,j=1}^{3} a'_{ij}\,x'_i\,x'_j + 2\sum_{i=1}^{3} b'_i\,x'_i + d' = 0$$

ويصبح المستوى (6) هو المستوى $x'_3 = 0$. وبذلك يعطى منحنى تقاطع السطح (1) مع المستوى (6) بالمعادلة

$$\sum_{i,j=1}^{2} a'_{ij}\,x'_i\,x'_j + 2\sum_{i=1}^{2} b'_i\,x'_i + d' = 0$$

وهو منحنى درجة ثانية واقع في المستوى $x'_3 = 0$ وهو عبارة عن قطع مخروطي له الصور المختلفة الآتية: دائرة ــ زوج من المستقيمات ــ قطع مكافئ ــ قطع ناقص ــ قطع زائد ــ نقطة.

(٣.٥) المستويات الأساسية لسطوح الدرجة الثانية

Principal planes

نفرض أن لدينا مستقيم يمر بالنقطة $M_o\left(x_1^o, x_2^o, x_3^o\right)$ وأن له الاتجاه (L,m,n) . إذن معادلات الخط المستقيم البارامترية هي

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^o + \lambda L \\
x_2 &= x_2^o + \lambda m \ , \quad \lambda \in R \qquad (7) \\
x_3 &= x_3^o + \lambda n
\end{aligned}
$$

لإيجاد نقط تقاطع السطح (1) مع المستقيم (7) نعوض من (7) في (1) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية في λ وهي

$$
\lambda^2\left(a_{11} L^2 + a_{22} m^2 + a_{33} n^2 + 2 a_{12} Lm + 2 a_{23} mn + 2 a_{13} nL\right) + \lambda\left(L \frac{\partial F}{\partial x_1^o} + m \frac{\partial F}{\partial x_2^o} + n \frac{\partial F}{\partial x_3^o}\right) + F\left(x_1^o, x_2^o, x_3^o\right) = 0 \qquad (8)
$$

حيث $\dfrac{\partial F}{\partial x_i^o}$ يعني $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{M_o}$ أي حساب المشتقة التفاضلية للدالة $F(x_1, x_2, x_3)$ بالنسبة لأحد متغيراتها محسوبة عند النقطة $M_o\left(x_1^o, x_2^o, x_3^o\right)$.

من المعادلة (8) يتضح أن المستقيم (7) يقطع السطح (1) في نقطتين هما M_1, M_2 مثلا. ومنها نصل إلى النتائج الآتية:ــ

(i) ينعدم أحد جذري المعادلة (8) إذا كان الحد المطلق يحقق $F\left(x_1^o, x_2^o, x_3^o\right) = 0$ وهذا واضح لأنه في هذه الحالة تقع النقطة M_o على السطح (1) لانطباقها مع أحد النقطتين M_1, M_2.

(ii) ينعدم جذرا المعادلة (8) (بمعنى أن المعادلة (8) لها جذر $\lambda = 0$ مكرر مرتين) إذا تحقق الشرط

$$
\left.\begin{aligned}
& F\left(x_1^o, x_2^o, x_3^o\right) = 0 \\
& L\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{M_o} + m\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{M_o} + n\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{M_o} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (9)
$$

الشرط (9) هو الشرط الضروري لكي يكون المستقيم (7) مماس للسطح (1) عند النقطة M_o.

(iii) المستوى المماس للسطح (1) عند النقطة M_o يتكون من جميع المماسات (المستقيمات) للسطح عند M_o وتحقق الشرط (9).

من معادلة الخط المستقيم (7) نجد أن

$$x_1 - x_1^o : x_2 - x_2^o : x_3 - x_3^o = L : m : n$$

وبذلك تكون معادلة المستوى المماس للسطح (1) عند النقطة M_o (استخدم المعادلات (9)) هي

$$\begin{aligned}(x_1 - x_1^o)\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{M_o} &+ (x_2 - x_2^o)\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{M_o} \\ &+ (x_3 - x_3^o)\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{M_o} = 0\end{aligned} \qquad (10)$$

(iv) يتساوى جذرا المعادلة (8) في المقدار ويختلفان في الإشارة $(\lambda_1 = -\lambda_2)$ إذا كان

$$L\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_{M_o} + m\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_{M_o} + n\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_{M_o} = 0$$

في هذه الحالة تكون النقطة M_o في منتصف الوتر M_1M_2 . واضح أن جميع أوتار السطح (1) الموازية للوتر M_1M_2 تشترك مع المستقيم (7) في جيوب تمام الاتجاه. وبالتالي فإن المحل الهندسي لمنتصفات هذه الأوتار هو المحل الهندسي للنقطة M_o والذي يعطى بالمعادلة

$$L\frac{\partial F}{\partial x_1} + m\frac{\partial F}{\partial x_2} + n\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 \qquad (12)$$

والمعادلة (12) تصف مستويا (م) يسمى المستوى القطري Diameteral plane للأوتار الموازية للمستقيم (7).

(v) المستوى القطري يسمى مستويا أساسيا Principal plane إذا كان عموديا على الأوتار التي ينصفها، ولإيجاد الشرط اللازم نكتب المعادلة (12) في الصورة الآتية:ـ

$$
\begin{aligned}
&\left(L\,a_{11}+m\,a_{12}+n\,a_{13}\right)x_1+\left(L\,a_{12}+m\,a_{22}+n\,a_{23}\right)x_2\\
&\quad+\left(L\,a_{13}+m\,a_{23}+n\,a_{33}\right)x_3\\
&\quad+L\,b_1+m\,b_2+n\,b_3=0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

شرط أن يكون المستوى القطري (13) مستويا أساسيا هو أن يكون عمودي على الوتر الذي له الاتجاه (L, m, n)، أي أن العمودي على المستوى القطري (13) يوازي الوتر الذي له الاتجاه (L,m,n).

وبالتالي يكون الشرط اللازم هو:

$$
\frac{La_{11}+ma_{12}+na_{13}}{L}=\frac{La_{12}+ma_{22}+na_{23}}{m}=\frac{La_{13}+ma_{23}+na_{33}}{n}
\tag{14}
$$

واضح أن كل مستو قطري ليس بالضرورة أن يكون مستوى أساسي. ولإيجاد عدد المستويات الأساسية للسطح (1) نضع كل نسبة من نسب الشرط (14) تساوى α مثلا وبذلك نصل إلى مجموعة المعادلات المتجانسة الآتية :ـ

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}-\alpha & a_{12} & a_{13}\\
a_{12} & a_{22}-\alpha & a_{23}\\
a_{13} & a_{23} & a_{33}-\alpha
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
L\\ m\\ n
\end{bmatrix}=0
\tag{15}
$$

وحيث أن L, m, n ليست جميعها أصفار في آن واحد أي أن المعادلة (15) ليست لها حل صفري وهذا لا يتحقق إلا إذا كان

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\alpha & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\alpha \end{bmatrix}=0 \qquad (16)$$

واضح أن المعادلة (16) من الدرجة الثالثة في α فيكون لها ثلاثة جذور هي $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ وهذه الجذور الثلاثة حقيقية لأن المصفوفة $A=(a_{ij})$ متماثلة. وبذلك يوجد للسطح ثلاث مستويات أساسية تقابل القيم $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ أي تقابل ثلاث متجهات مختلفة على الصورة

$$N_i=\begin{bmatrix} L_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix}, i=1,2,3$$

بأسلوب آخر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ هي القيم الذاتية eigen values للمصفوفة A المحددة للجزء التربيعي من معادلة السطح (1) وبالتالي تكون الأعمدة الثلاثة $N_i, i=1,2,3$ على المستويات الثلاثة المقابلة للقيم الذاتية الثلاثة ما هي إلا المتجهات الذاتية eigen vectors للمصفوفة A .

هذه الأعمدة تسمى المحاور الأساسية لسطح الدرجة الثانية وتوجد حالات خاصة وهي التي فيها : $L=0, m=0$، $L=0, n=0$، $m=0, n=0$ فإن المحاور الأساسية توازي محور z ، محور y، محور x على الترتيب.

مثال (١): أوجد المستويات الأساسية لسطح الدرجة الثانية وأثبت أن المستويات الأساسية تمر بنقطة الأصل.

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3+4=0 \qquad (1)$$

الحل: نعتبر المصفوفة A المحددة للجزء التربيعي في المعادلة (1) وهي

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A تتحدد من المعادلة

$$\mathrm{Det}\left(A-\alpha I_3\right)=0$$

أو

$$\alpha^3-\alpha^2-4\alpha+4=0$$

إذن القيم الذاتية هي (من الجبر العام)

$$\alpha_1=1,\alpha_2=2,\alpha_3=-2$$

المتجهات الذاتية المقابلة تعطى كالآتي:ـــ

في حالة $\alpha_1=1$ يكون

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_1\\ m_1\\ n_1\end{bmatrix}=0$$

ومنها يكون $L_1=m_1=n_1=1$ (من الجبر الخطي)

وبالتعويض في معادلة المستوى الأساسي (13) نحصل على

$$x_1+x_2+x_3=0$$

وفي حالة $\alpha_2=2$ يكون لدينا المتجه الذاتي

$$\begin{bmatrix}L_2\\ m_2\\ n_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

والمستوى الأساسي المقابل للقيمة الذاتية $\alpha_2 = 2$ هو

$$x_1 - x_2 = 0$$

وفي حالة $\alpha_3 = -2$ يكون لدينا المتجه الذاتي

$$\begin{bmatrix} L_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

والمستوى الأساسي المقابل للقيمة الذاتية $\alpha_3 = -2$ هو

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

واضح أن المستويات الأساسية كلها تمر بنقطة أصل الإحداثيات.

تمارين (٥)

(١) بالنسبة لسطح الدرجة الثانية $x^t A x + 2 B x + d = 0$، نـــاقش الحـــالات الآتية:ـــ

(i) المستويات الأساسية هي المستويات الإحداثية.

(ii) المستويات الأساسية توازي المستويات الإحداثية.

(iii) المستويات الأساسية تمر بنقطة الأصل.

(iv) المستويات الأساسية توازي محاور الإحداثيات.

(v) المحاور الأساسية توازي محاور الإحداثيات.

(٢) أوجد المستويات الأساسية لسطح الكرة والمخروط والأسطوانة.

(٣) أوجد المستويات الأساسية لكل من السطوح الآتية:

(i) $a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$

(ii) $a x^2 + b y^2 - c z^2 = 1$

(iii) $a x^2 - b y^2 - c z^2 = 1$

(iv) $a x^2 - b y^2 = c z$

(v) $a x^2 + b y^2 = c z$

(vi) $y^2 - x^2 = 1$