الباب الرابع

مقاطع سطوح الدرجة الثانية

Conic Sections of Quadrics

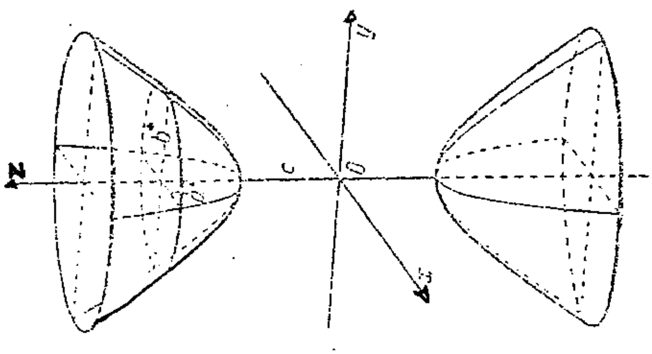
(١.٤) مقدمة:

لدراسة شكل سطح الدرجة الثانية $F(x, y, z)=0$ يجب أن نعرف مقاطع السطح بمستويات مختلفة ويكفي أخذ مستويات الإحداثيات والمستويات التي توازيها كمقاطع ومنحنى المقطع عبارة عن قطع مخروطي conic section سبق أن درسه الطالب والمقاطع هي عبارة عن تشريح للسطح في اتجاهات مختلفة لمعرفة ما يحتويه السطح من أشكال هندسية.

مثال (١): الجسم الزائدي ذو الطيتين $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ مقطعة بالمستوى الإحداثي oxy ‏(z=0) هو عبارة عن قطع ناقص تخيلي يعطى من $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ وكذلك مقطعة بالمستوى oxz هو قطع زائد $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ محورة الحقيقي هو oz والتخيلي هو ox وهكذا. إذا اعتبرنا المقطع $z=h$, $|h|>c$ فإننا نحصل على

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$$

أدرس الحالات $h=c, h<c, h>c$ ولاحظ على الرسم أن السطح مكون من جزءين منفصلين (طيتين) وكل طية شكلها عبارة عن وعاء مقعر لانهائي أنظر شكل (١).



شكل (١)

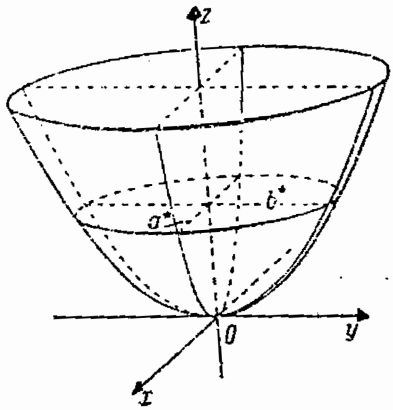
<u>مثال (٢)</u>: ابحث مقاطع سطح المكافئ الناقصي $a x^2 + b y^2 = c z$.

<u>الحل</u>: مقطع السطح بالمستوى (xy) $z = 0$ هو نقطة حيث $a, b > 0$ ومقطعه بالمستوى $z = h$ هو قطع ناقص في مستوى يوازي المستوى oxy ومعادلته :

$$\frac{x^2}{\frac{ch}{a}} + \frac{y^2}{\frac{ch}{b}} = 1$$

ومقطعه بالمستوى (xz) $y = 0$ هو قطع مكافئ $x^2 = \frac{c}{a} z$، ومقطعه بالمستوى (yz) $x = 0$ هو قطع مكافئ $y^2 = \frac{c}{b} z$.

وعموماً مقاطعه بمستويات توازي المستويات الإحداثية $x= 0, y =0, z = 0$ عبارة عن قطاعات ناقصة أو مكافئة على الترتيب شكل (٢).



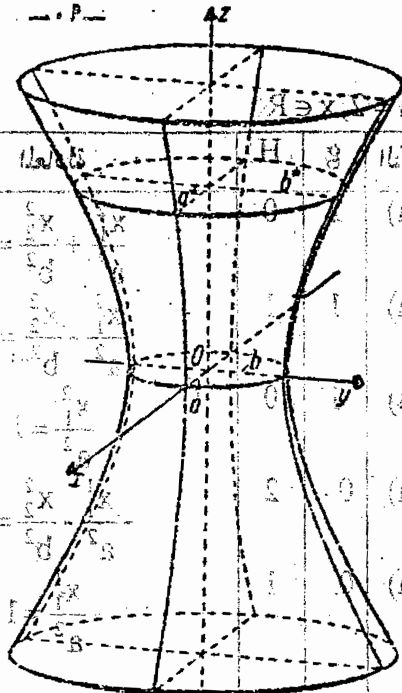
شكل (٢)

مثال (٣): إدرس مقاطع الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

الحل: مقطعه بالمستوى $z = h$ هو قطع ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$.

ومقطعه بالمستوى $x = h$ هو قطع زائد $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ بشرط أن $|h|<a$. ومقطعه بالمستوى $y=h$ هو قطع زائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$ بشرط أن $|h|<b$.

وهذا السطح يشبه برج التبريد المستخدم في الصناعة Cooling tower. ولتوضيح القطاعات الزائدة أنظر الرسم شكل (٣).



شكل (٣)

ولدراسة مقاطع سطوح الدرجة الثانية وجدنا أنه لزاماً علينا أن نقوم بعرض واسترجاع القطاعات المخروطية وذلك في أشكالها القياسية والتي تظهر بدورها في مقاطع سطوح الدرجة الثانية في الصور القياسية بمقاطع تطبق على مستويات الإحداثيات أو توازيها.

(٤. ٢) تصنيف المحال الهندسية المقابلة لمعادلة الدرجة الثانية

نفرض أن g عدد الإشارات الموجبة، h عدد الإشارات السالبة في معادلة الدرجة الثانية في الصيغة القياسية (الجزء التربيعي في المعادلة):ـ

أولا : في المستوى $n=2, x\in R^2$

مسلسل	النوع	g	H	المعادلة	المحل الهندسي
(1)	(ia)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$	قطع ناقص
(2)	(ia)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	قطع زائد
(3)	(ia)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=1$	خطين مستقيمين متوازيين
(4)	(ia)	0	2	$-\frac{x_1^1}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	ϕ
(5)	(ia)	0	1	$-\frac{x_1^1}{a^2}=1$	ϕ
(6)	(ia)	0	0	$0=1$	ϕ
(7)	(ib)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=0$	نقطة
(8)	(ib)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=0$	خطين مستقيمين متقاطعين
(9)	(ib)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=0$	خط مستقيم
(10)	(ib)	0	0	$0=0$	مستوى صفري
(11)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=2x_2$	قطع مكافئ
(12)	(ii)	0	1	$-\frac{x_1^2}{a^2}=2x_2$	قطع مكافئ
(13)	(ii)	0	0	$0=2x_2$	خط مستقيم

ثانيا في الفراغ:

وهنا نقوم بعرض كل الصور القياسية لسطوح الدرجة الثانية التي تعرضنا لهـا وسوف تعمم في الفصول القادمة. ونعني بالصور القياسية أن محاور التماثل وكذلـك مستويات التماثل (إن وجدت) هي محاور الإحداثيات أو مستويات الإحداثيات وذلك موضح في الجدول الآتي:

$n=3, x \in R^3$

مسلسل	النوع	g	h	المعادلة	المحل الهندسي
(1)	(ia)	3	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$	الجسم الناقص
(2)	(ia)	2	1	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$	الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة
(3)	(ia)	2	0	$\frac{\mathbf{x}_1^1}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$	اسطوانة ناقصية
(4)	(ia)	1	2	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$	الجسم الزائدي ذو الطيتين
(5)	(ia)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	اسطوانة زائدية
(6)	(ia)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=1$	مستويان متوازيان
(7)	(ia)	0	3	$-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$	ϕ
(8)	(ia)	0	2	$-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	ϕ
(9)	(ia)	0	1	$-\frac{x_1^2}{a^2}=1$	ϕ

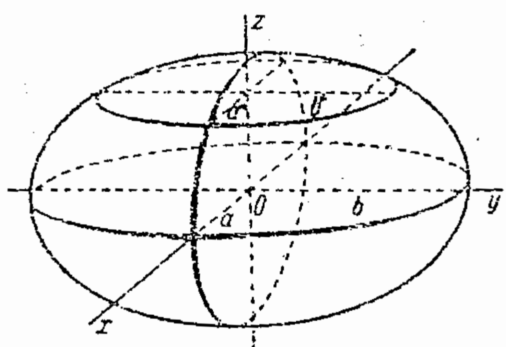
مسلسل	النوع	g	H	المعادلة	المحل الهندسي
(10)	(ia)	0	0	$0=1$	ϕ
(11)	(ib)	3	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=0$	نقطة
(12)	(ib)	2	1	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$	مخروط
(13)	(ib)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=0$	نقطة
(14)	(ib)	1	2	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$	المخروط
(15)	(ib)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=0$	مستويين
(16)	(ib)	1	0	$\frac{x_1^1}{a^2}=1$	مستويين منطبقين
(17)	(ib)	0	0	$0=0$	الفراغ الصفري
(18)	(ii)	2	0	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	الجسم الناقص المكافئ
(19)	(ii)	1	1	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	المكافئ الزائدي
(20)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=2x_3$	الأسطوانة المكافئة
(21)	(ii)	0	2	$-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	المكافئ الناقص
(22)	(ii)	1	0	$\frac{x_1^2}{a^2}=2x_3$	الأسطوانة المتوازية
(23)	(ii)	0	0	$0=2x_3$	مستوى

مثال (٤) : المجسم الناقص **Ellipsoid**

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع ناقص
المستوى — x_1x_3	قطع ناقص
المستوى — x_2x_3	قطع ناقص

انظر شكل (٤) ولاحظ المقاطع المختلفة وأوجد معادلاتهم؟.



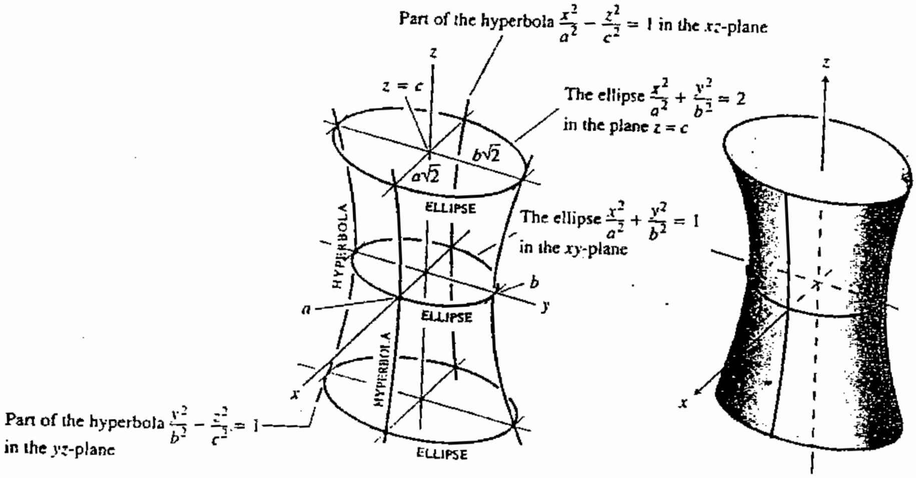
شكل (٤)

مثال (٥): المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة **Hyperboloid of one sheet**

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع ناقص
المستوى — x_1x_3	قطع زائد
المستوى — x_2x_3	قطع زائد

والمقاطع موضحة على الجسم كما في شكل (٥) وأوجد معادلات المقاطع؟.



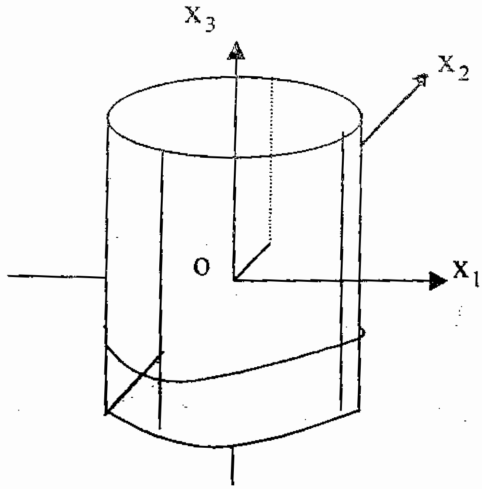
شكل (٥)

مثال (٦) : أسطوانة ناقصية **Elliptic cylinder**

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع ناقص
المستوى — x_1x_3	مستقيمين متوازيان
المستوى — x_2x_3	مستقيمين متوازيان

والمقاطع موضحة كما في شكل (٦) وأوجد معادلاتهم؟.



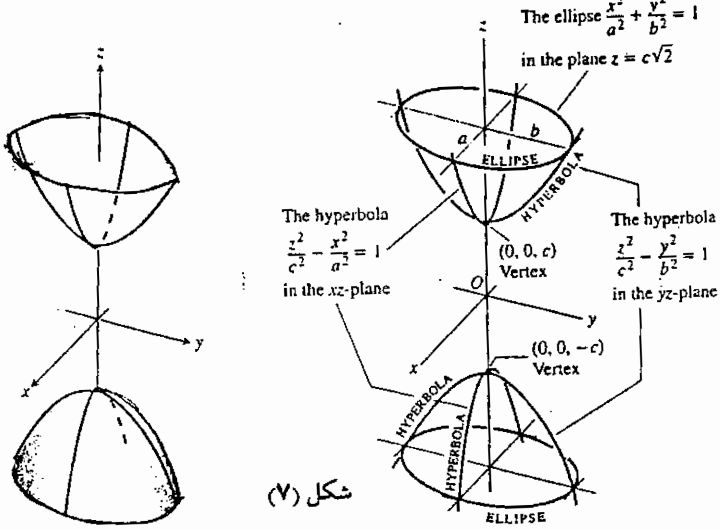
شكل (٦)

مثال (٧): المجسم الزائدي ذو الطيتين **Two sheeted Hyperboloid**

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع زائد
المستوى — x_1x_3	قطع زائد
المستوى — x_2x_3	قطع ناقص

انظر شكل (٧) وأوجد معادلات المقاطع الناتجة؟.



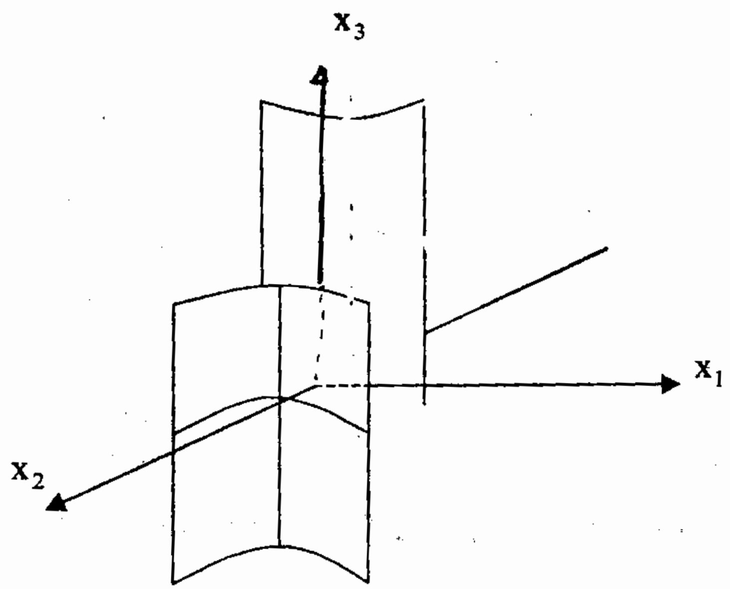
شكل (٧)

مثال (٨): اسطوانة زائدية **Hyperboloid cylinder**

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع ناقص
المستوى — x_1x_3	مستقيمين متوازيان
المستوى — x_2x_3	مستقيمين متوازيان

انظر شكل (٨) وأوجد معادلات المقاطع الناتجة؟.



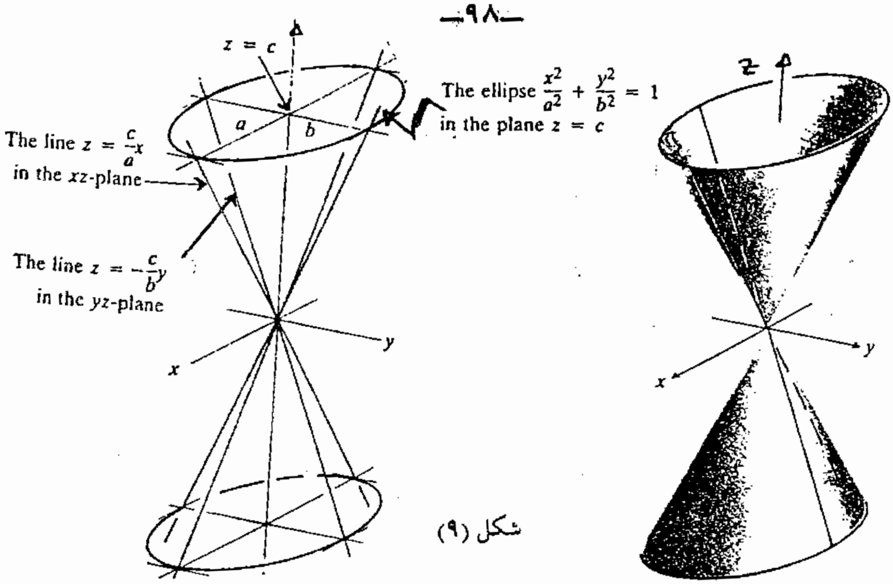
شكل (٨)

مثال (٩) : المخروط Cone

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع ناقص
المستوى — x_1x_3	قطع زائد
المستوى — x_2x_3	قطع زائد

والمقاطع بمستويات الإحداثيات هي نقطة (رأس المخروط) أو خطوط مستقيمة (رواسم المخروط) (شكل (٩)).



شكل (٩)

إذا كان $c = 1$ يسمى المخروط بالمخروط الناقص شكل (٩). أي له المعادلة :

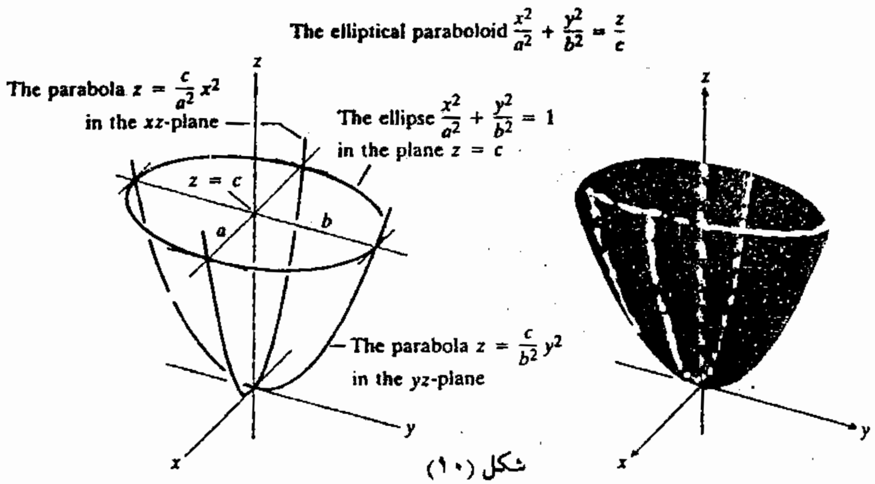
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2$$

مثال (١٠) : المكافئ الناقص **Elliptic Paraboloid**

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى ـــ x_1x_2	قطع ناقص
المستوى ـــ x_1x_3	قطع مكافئ
المستوى ـــ x_2x_3	قطع مكافئ

ومقطعه بالمستوى $x_3 = 0$ عبارة عن نقطة (شكل (١٠)) وهي راسم الجسم.



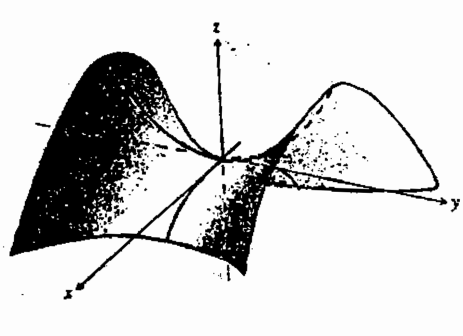
شكل (١٠)

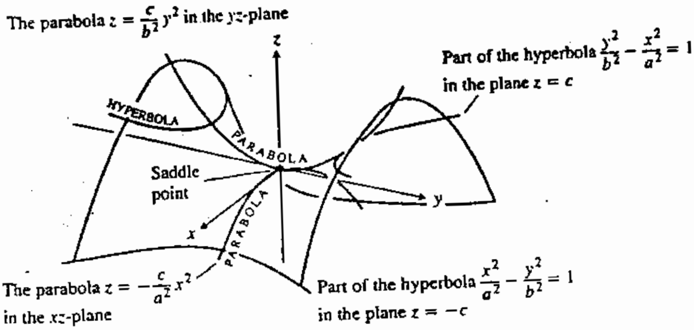
مثال (١١): المكافئ الزائدي Hyperbolic Paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	قطع زائد
المستوى — x_1x_3	قطع مكافئ
المستوى — x_2x_3	قطع مكافئ

ومقطعه بالمستوى $x_3=0$ عبارة عن زوج من المستقيمات المتقاطعة أنظر شكل (١١).





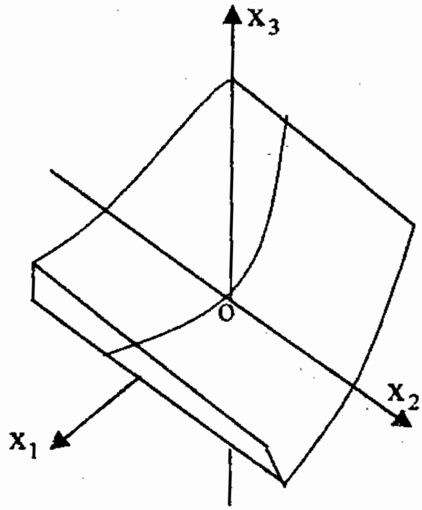
شكل (١١)

مثال (١٢): الأسطوانة المكافئة **Parbolic Cylinder**

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3$$

مستوى القاطع يوازي	المقطع الناتج
المستوى — x_1x_2	مستويات متوازية
المستوى — x_1x_3	قطع مكافئ
المستوى — x_2x_3	خط مستقيم

كما هو مبين في شكل (١٢).

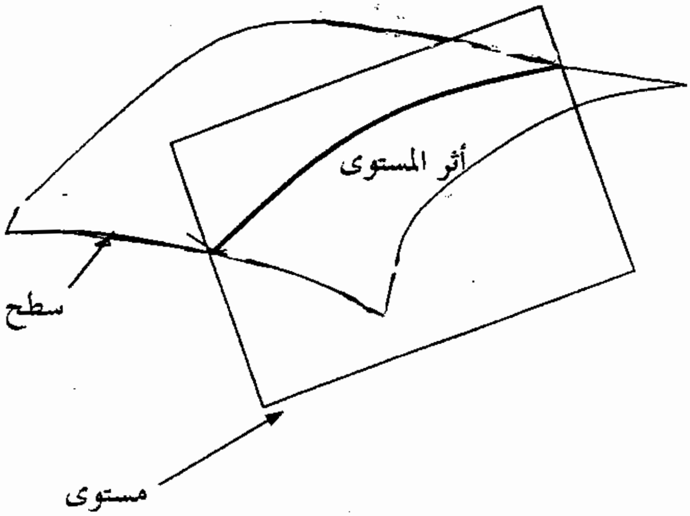


شكل (١٢)

مثال (١٣): في كل المجسمات السابقة من (١) إلى (٩) أوجد الشروط اللازمة كي تكون المقاطع حقيقية وأكتب معادلات المقاطع الناتجة من تقاطع المجسمات بمستويات توازي مستويات الإحداثيات.

(٣.٤) رسم السطوح في الفراغ:

لرسم السطح $F(x, y, z) = 0$ نقوم بدراسة جميع المقاطع المختلفة بمستويات ـ هذه المقاطع تسمى أثر المستوى مع السطح Trace of the surface وفي حالة سطوح الدرجة الثانية يسمى الأثر بالقطع المخروطي Conic section كما هو مبين بشكل (١٣).



شكل (١٣)

مثال (١٤): أرسم السطح المعطى بالمعادلة $z^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

الحل: المعادلة المعطاة تكتب في الصورة

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 4 \qquad (1)$$

وهي تمثل مجسم زائدي ذو الطيتين.

نعتبر أثر المستوى $z = k$ (مقطع) مع السطح لجميع قيم k المختلفة، $k = 0$ المقطـــع مجموعة خالية، وهذا معناه أن السطح لا يقطع المستوى $x\,y$. بالمثل إذا كانت $-1 < k < 1$ فإن الأثر مجموعة خالية.

نعتبر $z = 1$ وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0$$

وحلها هو $(0, 0)$ أي أن المستوى $z = 1$ يقطع السطح في نقطة واحدة $(0, 0, 1)$.

إذا كانت $k > 1$ $(k < -1)$ فإن أثر المستوى $z = k$ يعطى من

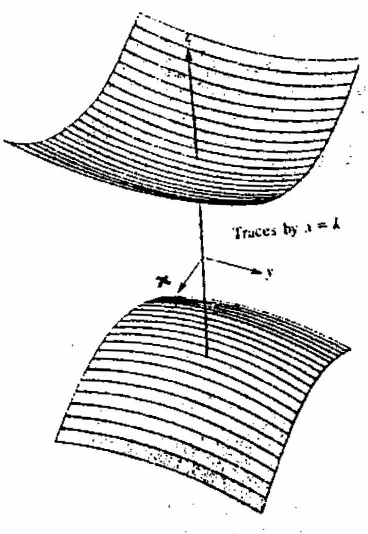
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = k^2 - 1$$

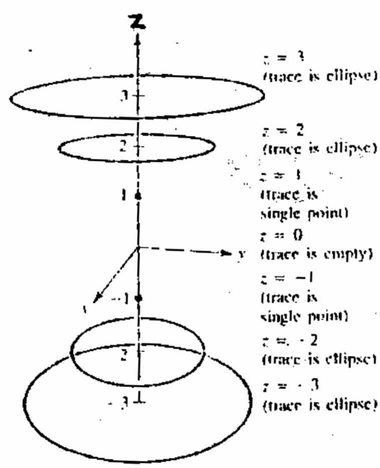
وهي تصف قطع ناقص ويلاحظ أن قيم k الكبيرة تعطي قطع ناقص أكبر، أنظر شكل (١٤).

السطح (١) مكون من قطاعات ناقصة ــ كيف أخذ السطح أسمه ــ للإجابة على هذا السؤال ندرس أثر السطح بالمستوى $(y\,z)\,x = 0$ وبالتعويض في (1) نحصل على

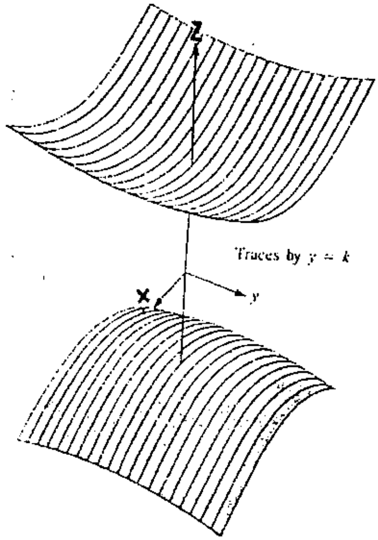
$$z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$$

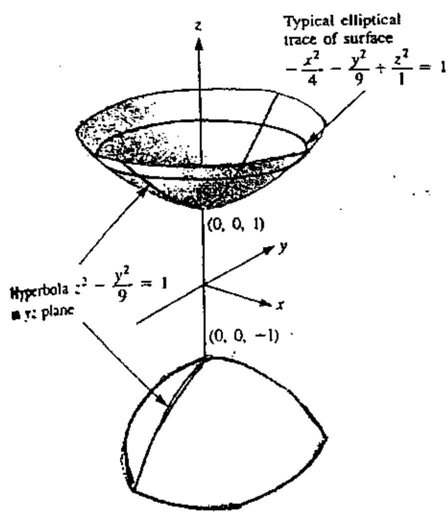
وهي تمثل قطع زائد في المستوى $y\,z$ وبالتالي نكون قد توصلنا إلى شكل السطح أنظر شكل (١٥).

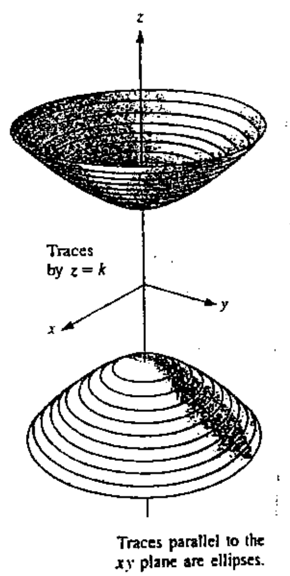




شكل (١٤)


Z
Traces by y = k
X
y

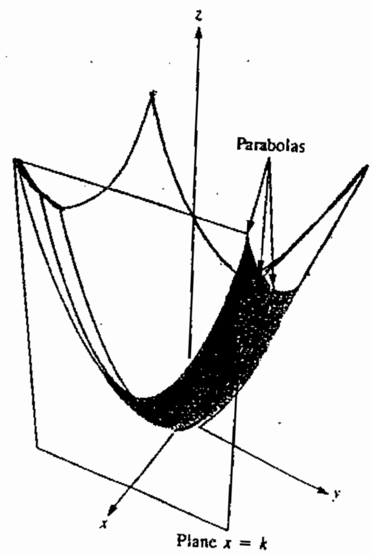

z
Typical elliptical
trace of surface
$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$
(0, 0, 1)
y
x
Hyperbola $z^2-\frac{y^2}{9}=1$
in yz plane
(0, 0, −1)


z
Traces
by z = k
y
x
Traces parallel to the
xy plane are ellipses.

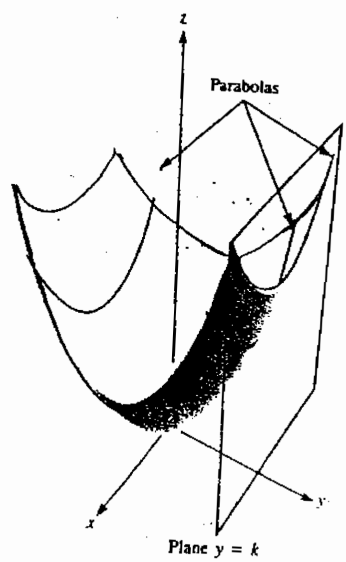
شكل (١٥)

<u>مثال (١٥):</u> أدرس مقاطع السطح $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ موضحا ذلك بالرسم.

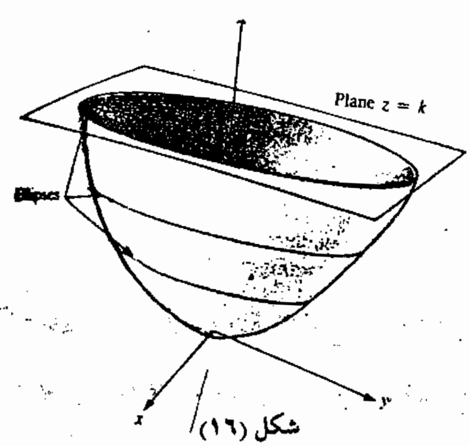
<u>الحل:</u> المقطع بالمستوى $z=0$ هو نقطة. المقطع بالمستوى $z=k$ هو قطع ناقص يزيد في المساحة كلما زادت k. المقطع بالمستوى $x=k$ هو قطع مكافئ وأيضا المقطع بالمستوى $y=k$ هو قطع مكافئ كما هو موضح بشكل (١٦)



The surface $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (elliptic paraboloid)



The surface $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (elliptic paraboloid)



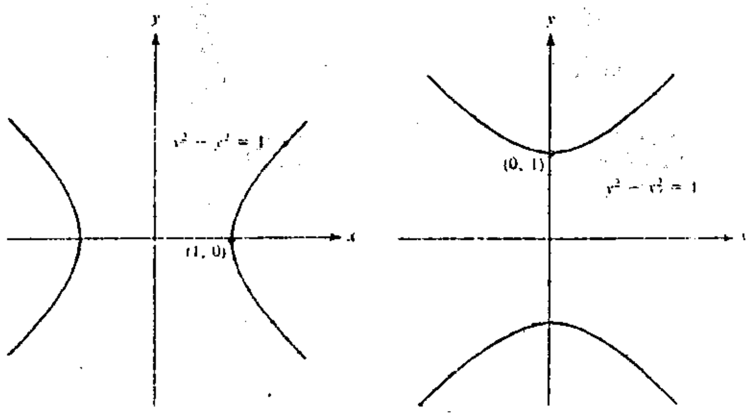
شكل (١٦)

مثال (١٦): أدرس مقاطع السطح $z = y^2 - x^2$.

الحل: مقطع السطح بالمستوى $x = 0$ هو قطع مكافئ $z = y^2$. مقطعه بالمستوى $z = 1$ هو قطع زائد قائم $y^2 - x^2 = 1$. ومقطعه بالمستوى $z = -1$ هو قطع زائد قائم $x^2 - y^2 = 1$.

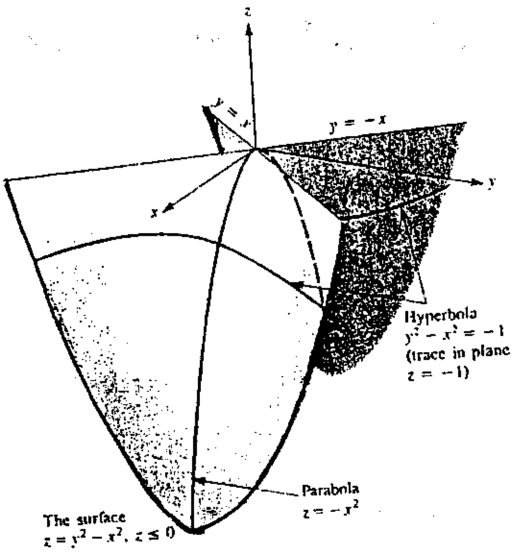
وعموما مقطع السطح المعطى بالمستوى $z = k$ هو قطع زائد $y^2 - x^2 = k$ يزيد في أبعاده كلما زادت k كما هو موضح في شكل (١٧).

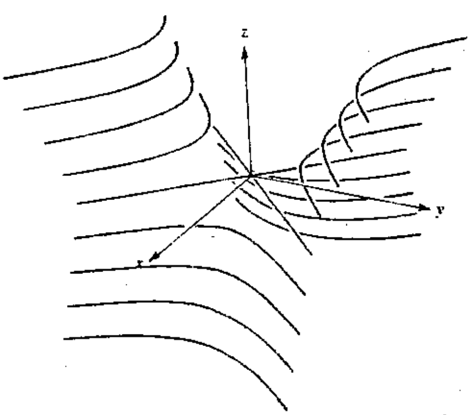
وكذلك المقطع بالمستوى $y = k$ قطاعات مكافئة في المستويات التي توازي المستوى $x\,z$ أنظر شكل (١٨).



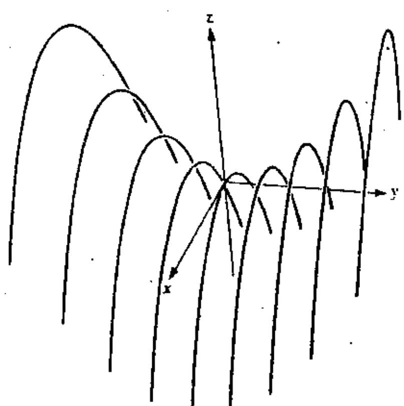
شكل (١٧)

من كل هذه المعلومات تكون قد رسمنا جزء من سطح السرج الذي يقع أسفل المستوى $x\,y$ كما هو واضح من شكل (١٨) وجزء السطح السرج موجود أعلى المستوى $x\,y$، أنظر شكل (١٨).





Traces of $z = y^2 - x^2$ parallel to the xy plane are hyperbolas.

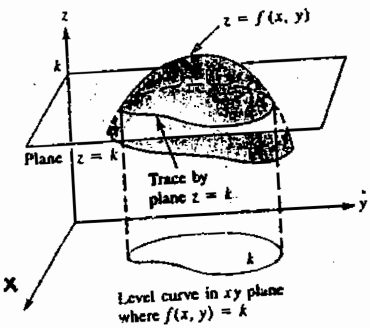


Traces of $z = y^2 - x^2$ parallel to the xz plane are parabolas.

شكل (١٨)

(٤.٤) تطبيقات (المنحنيات المتوازية) Level Curves

مما سبق يتضح حتى وإن كانت الدالة $z = f(x, y)$ بسيطة فإن لها شكل معقد في رسمه. توجد طريقة أخرى لدراسة سلوك الدالة $z = f(x, y)$ هندسيا. بدلا من رسم الأثر الفعلي للسطح في المستوى $z = k$، نرسم مسقط هذا الأثر (المقطع) على المستوى $x\,y$. المسقط يسمى منحنى متوازي Level Curve للدالة $f(x, y)$. عند كل النقاط (x, y) على هذا المنحنى المتوازي، الدالة لها القيمة k (انظر شكل (١٩)).

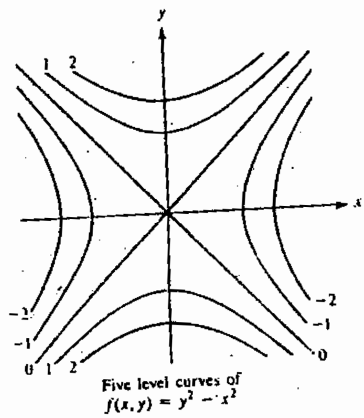


شكل (١٩)

عندما تتحرك على السطح $z = f(x, y)$ واقفا على المنحنى $f(x, y) = k$ ، مسارك سوف يكون متوازي وارتفاعك altitude عن المستوى $x\,y$ يظل ثابت وليكن k.

مثال (١٧): ادرس سلوك الدالة $f(x, y) = y^2 - x^2$ بدراسة المنحنيات المتوازية لها.

الحل: مما سبق يمكننا أن نقول أن $f(x, y) = k$ أي $y^2 - x^2 = k$ حيث $k \in R$ وليكن على سبيل المثال $k = 0$ (خطوط مستقيمة)، $k = 1, 2$ قطاعات زائدية، $k = -1, -2$ قطاعات زائدية مرافقة وهكذا (انظر شكل (٢٠)).



شكل (٢٠)

والخطوط المتوازية في حياتنا اليومية لها مسميات تختلف باختلاف الموضوعات التي نتناولها فمثلا إذا كانت f تمثل ارتفاع الأرض (الجبال والهضاب) Altitude of land فإن المنحنيات المتوازية تسمى كونتور Contour line وإذا كانت f تمثل الضغط الجوي Air pressure فإن المنحنيات المتوازية تسمى أيزوبار Isobar وهكذا في الطقس والاقتصاد والجاذبية والجيولوجيا.

<u>ملاحظة:</u> السطوح السابقة يمكن تصنيفها إلى سطوح مركزية Central quadric مثل الجسم الناقص والزائدي والمخروط الناقص وسطوح غير مركزية non central أي لها رأس مثل سطح المكافئ الناقص، المكافئ الزائدي.

تمارين (٤)

١ــ عين معادلة سطح الكرة الناتج عن دوران الدائرة $(y-7)^2+z^2=16\,,\,x=0$ حول محور oy ثم عين منحنيات المقطع بمستويات التماثل لها. وكذلك بمستويات توازي مستويات التماثل. وادرس الدوران حول محور z.

٢ــ عين معادلة الجسم الناقصي الناتج عن دوران القطع الناقص $z=7,\frac{(x-9)^2}{64}+\frac{(y-8)^2}{25}=1$ حول محور التماثل الذي يوازي ox وادرس مقاطعه بمستويات توازي مستويات التماثل له.

٣ــ كون معادلة الجسم الزائدي الناتج عن دوران القطع الزائد $y=19,\frac{(x-16)^2}{25}-\frac{(z-14)^2}{22}=1$ حول محوره التخيلي وادرس مقاطعه بمستويات توازي مستويات التماثل له.

٤ــ حدد نوع الأسطوانة التالية وأوضاعها في الفراغ وذلك باستخدام فكرة المقاطع بمستويات مختلفة.

(i) $x^2+y^2-z^2+1=0,\,4x^2+3y^2-16z^2-48=0$

(ii) $x^2-5\,y^2=0\,,\,x^2-3y^2-5\,z^2=0$

(iii) $x^2-4\,y^2+z^2=0\;\;,\,x^2+7\,y^2+5\,z^2=0$

(إرشاد : الأسطوانات السابقة هي عبارة عن الأسطوانات المقامة على المنحنى الناتج من تقاطع سطوح الدرجة الثانية المعطاة . لذلك أوجد المنحنى الناتج من التقاطع بحذف أحد المتغيرات من المعادلات المعطاة لتحصل على معادلة في متغيرين في الفراغ) .

٥ــ أثبت أن المستوى $\frac{x\,x_o}{a^2}-\frac{y\,y_o}{b^2}+\frac{z+z_o}{2}=0$ المار بالنقطة (x_o, y_o, z_o) الواقعة على الجسم المكافئ الزائدي $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+z=0$ يقطع هذا الجسم في خطين مستقيمين وأوجدهم.

٦ــ أوجد المستقيمين L_1, L_2 الذي يتقاطع فيهما المستوى $2x+y-z=0$ مع سطح المخروط $4x^2-y^2+3z^2=0$ ومن ثم اعط وصف كامل للمستقيمات L_1, L_2 وأوجد اتجاههما.

٧ــ أوجد معادلة السطح الدوراني الناشئ عن دوران المنحنى $z=0, x^2-2y+4=0$ حول المحور $y=0, z=0$ (حول محور x) وعين مقاطعه بمستويات توازي مستويات الإحداثيات.

٨ــ كون معادلة السطح الناتج من دوران الخط المستقيم

$$\left.\begin{array}{l} z=a\,x+b \\ z=c\,y+d \end{array}\right\},\ (a, b, c, d\neq 0)$$

حول محور z . ناقش الحالة التي فيها $b=d$. وأدرس مقاطعه بمستويات توازي مستويات الإحداثيات.

٩ــ أوجد نقاط تقاطع الخط المستقيم $-\frac{1}{3}(x+5)=y-4=\frac{1}{7}(z-1)$ مع سطح الدرجة الثانية

$$12x^2-17y^2+7z^2=7$$

١٠ــ أوجد معادلات المستويات المماسية للسطح $7x^2-3y^2-z^2+21=0$ والتي تمر بالخط $7x-6y+9=0,\ z=3$.

١١ـ بين أن المستوى $3x + 12y - 6z - 17 = 0$ يمس السطح

$$3x^2 - 6y^2 + 4z^2 + 17 = 0$$

وأوجد نقطة التماس ووحدة المتجهات في اتجاه العمودي على السطح.

١٢ـ أوجد معادلات المستويات المماسية للسطح

$$4x^2 - 5y^2 + 7z^2 + 13 = 0$$

والتي توازي المستوى $4x + 20y - 21z = 0$ وأوجد نقاط التماس.

١٣ـ أوجد معادلات المستويين الذين يحتويان الخط المستقيم

$$7x + 10y - 30 = 0,\ 5y - 3z = 0$$

وكل منهما يمس الجسم الناقص $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$

(إرشاد: في التمارين من ١١. ١٤ إستخدم شرط تماس المستوى $\ell x + my + nz = p$ للسطح $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ والذي يمكن الحصول عليه في الصورة $\frac{\ell^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = p^2$)

١٤ـ أستنتج شرط تماس مستوى مع سطح الدرجة الثانية (استخدم المعطيات في الإرشاد السابق).

١٥ـ أثبت أن الشرط اللازم لأن يكون المستوى $Lx + my + nz + k = 0$ مماسا للسطح $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ هو $\frac{L^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} + \frac{k^2}{d} = 0$.

١٦ـ أثبت أن الشرط اللازم لكي يكون المستوى $Lx + my + nz + k = 0$ مماسا للسطح $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ هو $aL^2 + bm^2 = 2nk$.

(إرشاد: في (15) ,(16) أوجد معادلة المستوى المماس للسطح المعطى وقارنها بالمستوى المعطى)