الباب الثالث

سطوح الدرجة الثانية Quadratic Surfaces

(١.٣) مقدمة :

تعريف: يعرف السطح عامة بأنه المحل الهندسي لنقطة $M \equiv (x^i)$ تتحرك في الفراغ E^3 بحيث أن إحداثيات هذه النقطة تحقق العلاقة

$$F(x^i) = 0, i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

أو

$$x^3 = f(x^\alpha), \quad \alpha = 1, 2 \tag{2}$$

فإذا كانت إحداثيات أي نقطة تحقق أحد المعادلتين فيقال أن هذه النقطة ترسم سطحا في الفراغ فمثلا معادلة الكرة التي مركزها (x_o^i) ونصف قطرها ρ هي :

$$\sum_{i=1}^{3} (x^i - x_o^i)^2 = \rho^2 \tag{3}$$

وتنقسم السطوح إلى سطوح جبرية وسطوح مسترسلة حسبما كانت العلاقة الموجودة في الطرف الأيسر من (1) كثيرة حدود أو دالة مسترسلة على الترتيب.

تعرف درجة السطح الجبري بأنها درجة كثيرة الحدود في الطرف الأيسر من (1) وتتحدد بعدد نقط تقاطع السطح مع أي مستقيم اختياري في الفراغ مع الأخذ في الاعتبار النقط التماسيه والمنطبقة.

فمثلا سطح الكرة هو أحد سطوح الدرجة الثانية لأن نقاط تقاطع المستقيم

$$x^i = x_1^i + t\, e_i \tag{4}$$

مع الكرة (3) نحصل عليها بحل المعادلات (4) ,(3) ونحصل على معادلة من الدرجة الثانية في البارامتر **t** على الصورة

$$\left(\sum_{i=1}^{3} e_i^2\right)t^2 + 2\sum_{i=1}^{3} e_i\left(x_1^i - x_o^i\right)t + \sum_{i=1}^{3} \left(x_1^i - x_o^i\right)^2 - \rho^2 = 0$$

فيكون لها جذران t_α وبالتعويض عن t_α في (4) نحصل على تقاطع المستقيم مع الكرة. ومعادلة السطح يمكن أن توضع في الصورة الاتجاهية فمثلا المعادلة الاتجاهية $\left|\underline{R} - \underline{R}_o\right| = \rho$ تمثل سطح كرة حيث $\underline{R}_o$ متجه الموضع للمركز، $\underline{R}$ متجه الموضع لأي نقطة على الكرة وسوف نقوم بدراستها بالتفصيل في الأبواب القادمة.

مثال (١) : السطوح $z=\sin xy,\ z = \log x\, y,\ x\, y\, z + e^{x y z} - 4 = 0$ هي سطوح مسترسلة. السطوح التي معادلاتها $z = \dfrac{x\, y}{x + y},\ z^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ هي سطوح جبرية.

الحل: بإيجاد درجة كثيرات الحدود ومن ذلك معرفة درجة السطوح الجبرية السابقة. (درجة السطوح هي الرابعة والثانية على الترتيب).

مثال (٢): المستوى سطح من الدرجة الأولى.

يعرف المستقيم المماس للسطح $F\left(x^i\right) = 0$ عند نقطة ما $P\left(x_o^i\right)$ عليه بأنه ذلك المستقيم الذي يمس أي منحنى يقع على السطح ومار بالنقطة P.

وبما أنه يوجد عدد لانهائي من المنحنيات على السطح تمر بالنقطة P فإنه يوجد عدد لانهائي من المستقيمات التي تمس السطح عند النقطة P.

إذا كانت جميع المشتقات التفاضلية الجزئية $\dfrac{\partial F}{\partial x^i}$ تساوي صفر عند نقطة على السطح فإن هذه النقطة تسمى نقطة مفردة **Singular point** أما إذا كانت هذه المشتقات لا تساوي صفرا عند نقطة ما عليه فإن هذه النقطة تسمى نقطة عادية **Regular point**.

<u>نظرية:</u> جميع المستقيمات التي تمس سطح ما عند أي نقطة (عامة) عليه تقع في مستوى واحد.

<u>البرهان:</u> نعتبر منحنى C على السطح $F(x^i)=0$ مار بالنقطة $M_o \equiv (x_o^i)$ ممثلا بالمعادلات البارامترية $x^i = \phi^i(t), i=1, 2, 3$. المماس لهذا المنحنى عند النقطة M له المعادلات القانونية

$$\frac{x^i - \phi^i(t_o)}{\left(\frac{d\phi^i}{dt}\right)_{M_o}} = \lambda \ , \ \forall \lambda, t \in R$$

حيث t_o بارامتر مناظر للنقطة M_o على المنحنى والتي تقع على السطح.

من معادلة السطح نحصل على

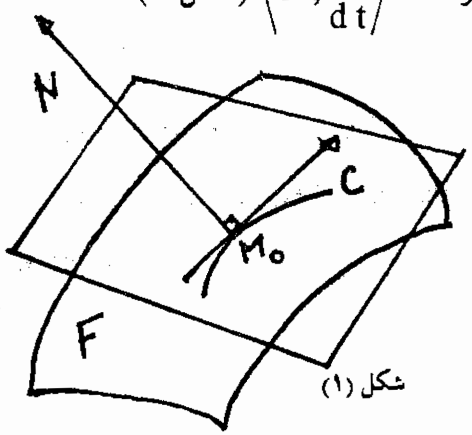
$$F(x^i) = F(x^1, x^2, x^3) = F(x^i(t)) = F(\phi^i(t)) = 0$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نجد أن

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = 0 \qquad (*)$$

نعتبر المتجهين $\frac{d\underline{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx^i}{dt} e_i \ , \quad N = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x^i} e_i$

إذن (*) يمكن كتابتها على الصورة $\left\langle N, \frac{d\underline{r}}{dt} \right\rangle = 0$ (شكل ١).



شكل (١)

المتجه $\frac{d\underline{r}}{dt}$ يسمى بمتجه المماس للمنحنى الذي يقع على السطح $F(x^i)=0$ ويمـــر بالنقطة $M_o(x_o^i)$ والمتجهN هو العمودي على المماس لأي منحنى على السطح مـــار بالنقطة M_o. أي أن جميع المماسات للمنحنيات التي تمر بالنقطةM_o عمودية علـــى المتجه N وهذا يتحقق فقط إذا كانت هذه المماسات تقع في مستوى واحـــد. وبهـــذا نصل إلى نهاية برهان النظرية.

المستوى الســـابق المعـــرف بتلـــك النظريـــة يســـمى المســـتوى الممـــاس للسطح (tangent plane) عند النقطة M_o . المتجه N يسمى بالمتجـــه العمـــودي (normal vector) على السطح عند M_o . وتصبح معادلـــة المســـتوى المماســـي للسطح عند M_o هي $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{M_o}\left(x^i - x_o^i\right) = 0$

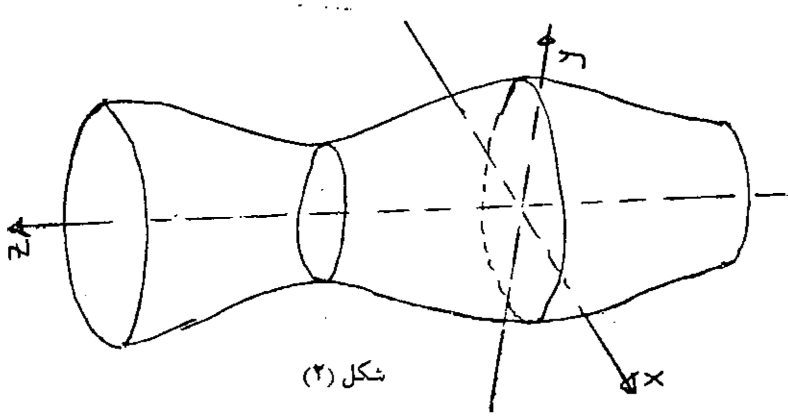
أو بالصورة الاتجاهية $\langle N, R - R_o\rangle = 0$ حيث $R=(x^i)$ متجه الموضع لأي نقطه واقعة في المستوى، $R_o=(x_o^i)$ متجه الموضع لنقطة التماس $M_o(x_o^i)$.

ولنوضح بأمثلة مختلفة السطوح الجبرية ذات الدرجة الثانية ومنها السطوح الدورانيـــة والسطوح المسطرة.

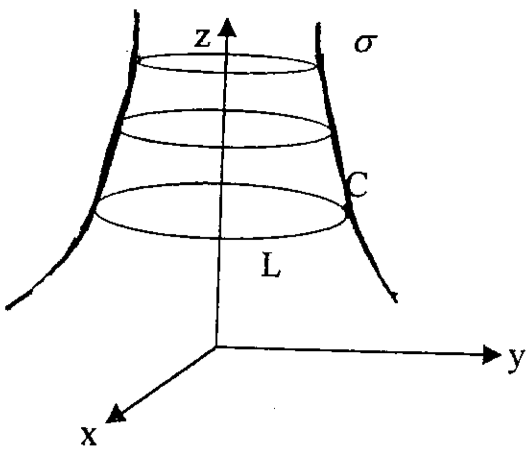
(٢.٣) السطوح الدورانية: Surfaces of revolution

دوران شكل ما σ بزاوية 2π حول مستقيم معلوم L ينتج عنـــه أن كـــل نقطة من الشكل σ ترسم دائرة مركزها يقع على المســـتقيم L والدائـــرة تقـــع في مستوى عمودي على المستقيم L ، المستقيم L يسمى محور الدوران والحركة تســـمى الحركة الدورانية Revoluation motion. يعرف السطح الدوراني على أنه الســـطح الناتج من دوران منحنى مستوٍ C حول محور L واقع في مستواه. أي مستوٍ يمر بنقطة ما على السطح الدوراني وعمودي على محور الدوران يقطع السطح الدوراني في دائـــرة

مركزها يقع على محور الدوران.



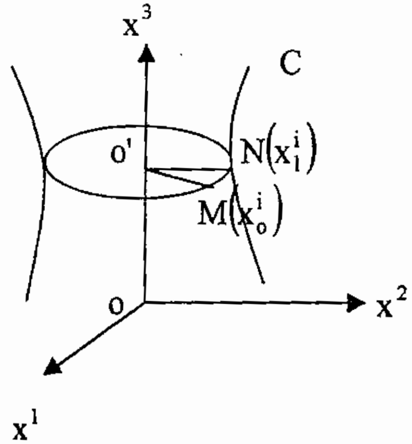
شكل (٢)



شكل (٣)

واضح أن C لا يقطع L (محور الدوران) وكذلك L واقع في المستوى الواقـــع فيــه منحنى الدوران. المنحنى يسمى منحنى الشكل Profile curve وهو الــــذي يعطــي السطح شكله الدوراني كما هو مبين في شكل (٣). مثال لذلك سطح الكرة ينتج عن دوران نصف دائرة حول قطرها.

لإيجاد معادلة السطح الدوراني الناتج عن دوران المنحنى C حـــول المحور x^3 نعتـــبر النقطة $M(x_o^i)$ على السطح الدوراني ونعتبر المستوى



شكل (٤)

الذي يمر بهذه النقطة M وعمودي على محور الدوران ox^3 . هذا المســـتوى يقطـــع السطح الدوراني في دائرة مركزها 'o (يقع على محور الدوران) ويقطع المنحـــنى C في النقطة $N \equiv (x_1^i)$ ومن هندسة الشكل (٤) نجد أن

$$\overline{o'M}^2 = (x_o^1)^2 + (x_o^2), \overline{o'N}^2 = (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2$$

وبما أن M, N يقعان على دائرة واحدة فإن

$$\overline{o'N} = \overline{o'M} \Rightarrow (x_o^1)^2 + (x_o^2)^2 = (x_1^1)^2 + (x_1^2)^2 \qquad (1)$$

ولكن N تقع على المنحنى الذي له المعادلات

$$x^1 = \phi^1(x^3) \;,\; x^2 = \phi^2(x^3) \qquad (2)$$

إذن النقطة N لها الإحداثيات

$$x_1^1 = \phi^1(x^3) \;,\; x_1^2 = \phi^2(x^3) \qquad (3)$$

وبالتعويض عن هذه القيم في (1) نحصل على

$$\left(x_o^1\right)^2+\left(x_o^2\right)^2=\left(\phi^1\left(x^3\right)\right)^2+\left(\phi^2\left(x^3\right)\right)^2=f\left(x^3\right)$$

وعموما كل معادلة على الصورة

$$\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2=f\left(x^3\right) \qquad (4)$$

تمثل سطح دوراني محـور دورانـه هـو ox^3 وذلـك لأن مقطـع هـذا السـطح بالمستوى x^3 =const. هو عبارة عن دائرة مركزها يقع على محور الدوران.

وعموما يمكن كتابة معادلة السطوح الدورانية التي محور دورانها هـو أحـد محـاور الإحداثيات x^j في الصورة

$$\sum_{i\neq j}^{3}\left(x^i\right)^2=f\left(x^j\right), i, j=1,2,3 \qquad (5)$$

(٣.٣)ـ سطوح الدرجة الثانية الدورانية

Quadratic Surfaces of revolution:

وهي تلك السطوح الناتجة عن دوران أحد منحنيات الدرجة الثانية التي سـبق وأن درسناها سابقا مثل الدائرة والخط المستقيم أو الخطين المتقـاطعين أو المتوازيـين وكذلك القطع المكافئ والناقص والزائد وفي كل هذه الحالات نأخذ الأوضاع القياسية لمنحنيات الدرجة الثانية ونأخذ محور الدوران هو محور التماثل لتلك المنحنيات.

(١.٣.٣) مجسم القطع الناقص الدوراني Ellipsoid of revolution:

هذا المجسم ينتج عن دوران القطـع النـاقص ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ في المستوى oxz والذي معادلته y =0 حول محور التماثل oz.

وللحصول على معادلات هذا المجسم نقوم بكتابة منحنى الدوران على الصورة

$$\left.\begin{aligned} &y = 0 \\ &x^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

أي أننا نعبر عن المتغيرات x, y بدلالة البارامتر z والذي يتحرك على محور الـــدوران oz . نربع المعادلة الأولى والجمع على الثانية في (6) نحصل على

$$x^2 + y^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

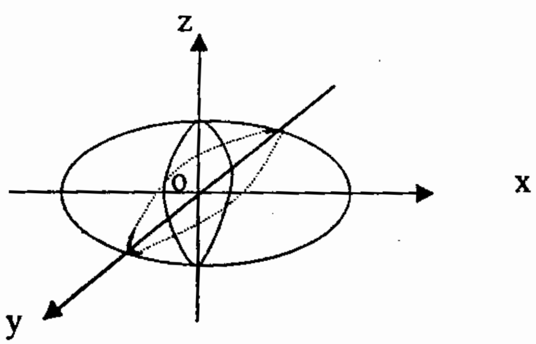
والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (7)$$

بالمثل إذا دار المنحنى حول محور ox فإن معادلة الجسم هي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (8)$$

وعلى الطالب أن يتأكد بنفسه من هذه المعادلة.



شكل (٥) المجسم الناقص الدوراني

نقطة الأصل o تسمى مركز الجسم. ومحاور الإحداثيات تسمى بمحاور التماثل. ومستويات الإحداثيات تسمى بمستويات التماثل (شكل ٥).

(٢.٣.٣) المجسم الزائدي الدوراني Hyperboloid of revolution:

هذا الجسم ينتج عن دوران منحنى القطع الزائد hyperabola في المستوى oxz.

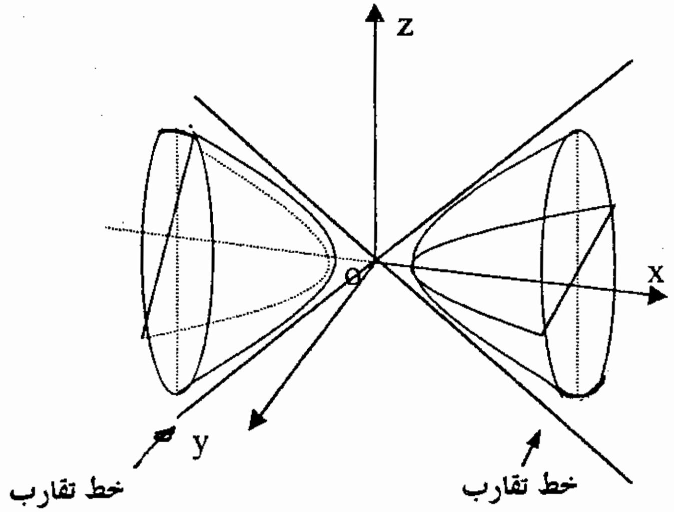
$$y=0\ ,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

حول المحور الحقيقي Real axis (محور ox) أو حول المحور التخيلي Imaginary axis (محور oz) فإننا نحصل على المجسم الزائدي ذو الطيتين (الطبقتين) Double sheet أو المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة one sheet على الترتيب والمعادلات هي :

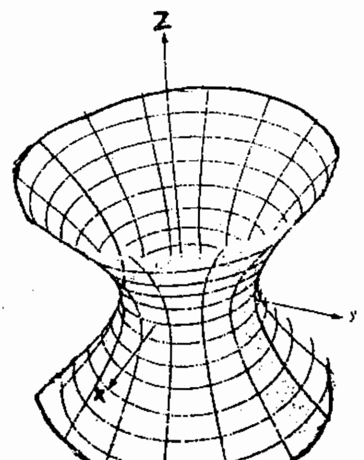
(9) $$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (ذو الطيتين)

(10) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ (ذو الطية الواحدة)

على الترتيب كما هو مبين في شكل (٥)، (٦) على الترتيب.



شكل (٦) المجسم الزائدي الدوراني ذو الطيتين

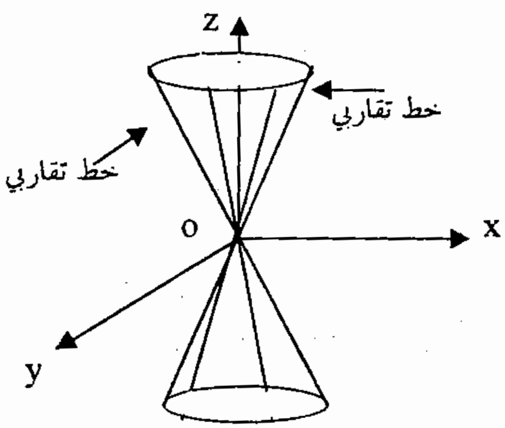


شكل (٧) المجسم الزائدي الدوراني ذو الطية الواحدة

وعند دوران الخط التقاربي asymptotic line للقطع الزائد والذي معادلته هي:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $y=0$ حول محور oz فنحصل على مجسم المخروط Cone (شكل ٨)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



شكل (٨) مخروط مزدوج

<u>نتيجة :</u> يمكن الحصول على الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة عن طريق دوران زوج من المستقيمات المتقاطعة والتي لا تقطع محور oz ولا يوازياه والتي تعطى بالمعادلات

$$y=0\,,\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

<u>مثال (١)</u>: تأكد من إثبات النتيجة السابقة.

في معادلة الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة نجد وجود عائلتين من المستقيمات تقع بأكملها على هذا السطح وكل منهما يعطى كتقاطع لعائلتين من المستويات كالأتي:

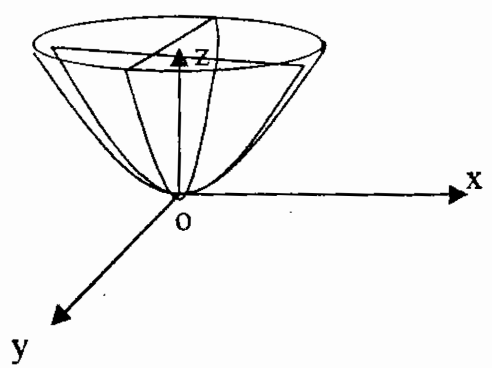
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \quad , \; y=a$$ تقاطع مستويين (12)

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \quad y=a$$ تقاطع مستويين (13)

وبذلك نحصل على الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة بدوران أحد هذه المستقيمات حول محور وفي هذه الحالة تسمى السطوح الناتجة عن دوران مستقيم بالسطوح المسطرة والمستقيم نفسه يسمى براسم السطح والسطوح المسطرة سوف نقوم بدراستها في الباب السابع.

(٣.٣.٣) المجسم المكافئ الدوراني : Paraboloid of revolution

إذا دار منحنى القطع المكافئ في المستوى oxz والذي معادلته $x^2=2az, y=0$ حول محور oz فنحصل على سطح دوراني معادلته $x^2+y^2=2az$ ويسمى بالجسم المكافئ الدوراني شكل (٨).



شكل (٩)

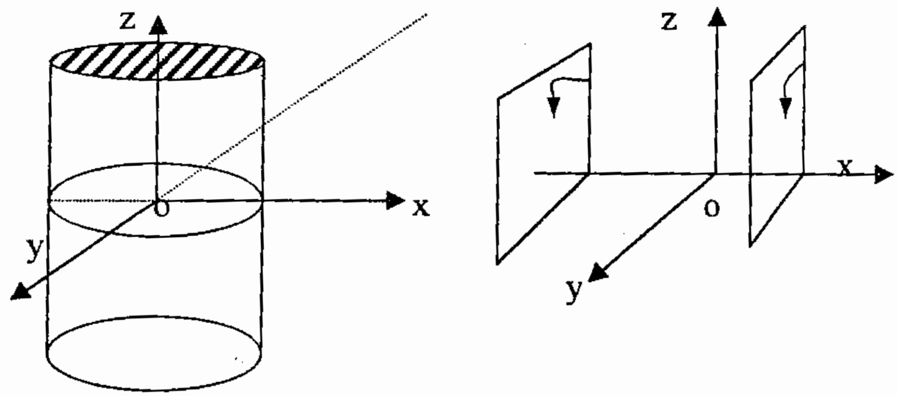
(٤.٣.٣) الأسطوانة الدائرية القائمة : Rect Linear Cylinder

تنتج عن دوران المستقيمين المتوازيين $x^2 - a^2 = 0, y = 0$ ويكون لها المعادلة $x^2 + y^2 = a^2$ وتسمى الأسطوانة الدائرية القائمة ومحورها هو oz .

وأن دار المستقيمين المتوازيين حول محور ox نحصل على مستويين متوازيين Parallel Planes لهما المعادلة

$$x^2 - a^2 = 0$$

كما هو مبين بالشكل (١٠).



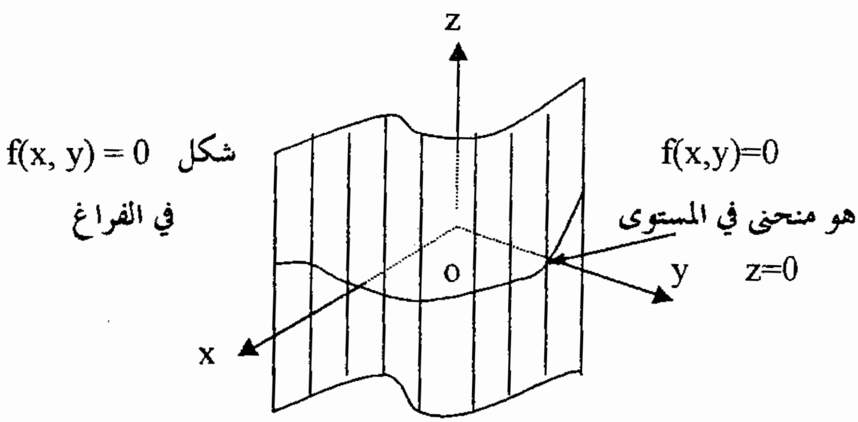
الأسطوانة الدائرية القائمة　　　　المستويين متوازيين

شكل (١٠)

وعليه فإن أي معادلة في الصورة $y = f(x)$ في الفراغ تمثل أسطوانة مقامة على منحنى هذه الدالة.

(٥.٣.٣) رسم السطح الممثل بمعادلة في متغيرين في الفراغ:

الشكل المقابل لمعادلة تحتوي على متغير أو متغيرين من الإحداثيات $x,\ y,\ z$ من السهل رسمه وعلى سبيل المثال المعادلة التي تحتوي على x, y . النقطة (x,y,z) تقع على الشكل الفراغي إذا كان وكان فقط النقطة $(x, y, 0)$ عليه ولا يوجد قيد على z.



شكل (١١)

بهذا العرض يمكن اقتراح الطريقة الآتية :ـــ

(١) أرسم المعادلة $f(x,y) = 0$ في المستوى $x\,y$ وهو عبارة عن منحنى.

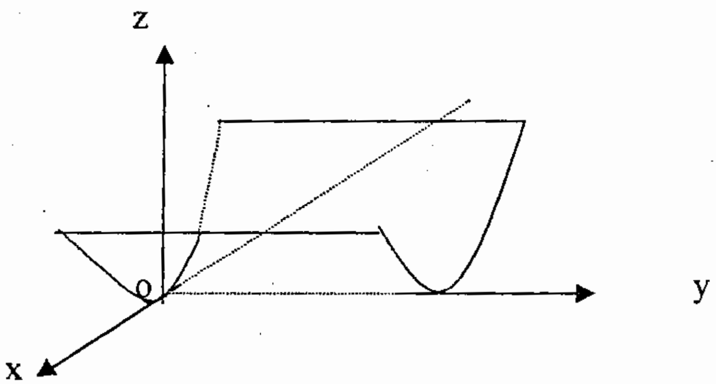
(٢) أرسم السطح المنشأ بواسطة الخطوط المستقيمة الموازية لمحور $o\ z$ وتقطع المنحنى المرسوم في الخطوة الأولى.

انظر شكل (١١) والسطح المرسوم فيه يسمى أسطوانة قائمة right cylinder شكل (١٠).

<u>مثال (٣):</u> الأسطوانة المقامة على منحنى الدالة $f(x, y) = y - x = 0$ هو المستوى $y\text{-}x=0$ في الفراغ، أي أن المستوى أحد أنواع الأسطوانات.

مثال (٤): الأسطوانة الدائرية القائمة right circular cylinder هي نوع خاص من الأسطوانات وهي المقامة على منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ وهي الأكثر شيوعا في حياتنا اليومية.

مثال (٥): الأسطوانة $z = x^2$ هي الأسطوانة المقامة على منحنى القطع المكافئ $z = x^2$ في المستوى z x. هذه الأسطوانة توازي محور oy عند نقطة الأصل وتسمى أسطوانة مكافئة شكل (١٢).



شكل (١٢)

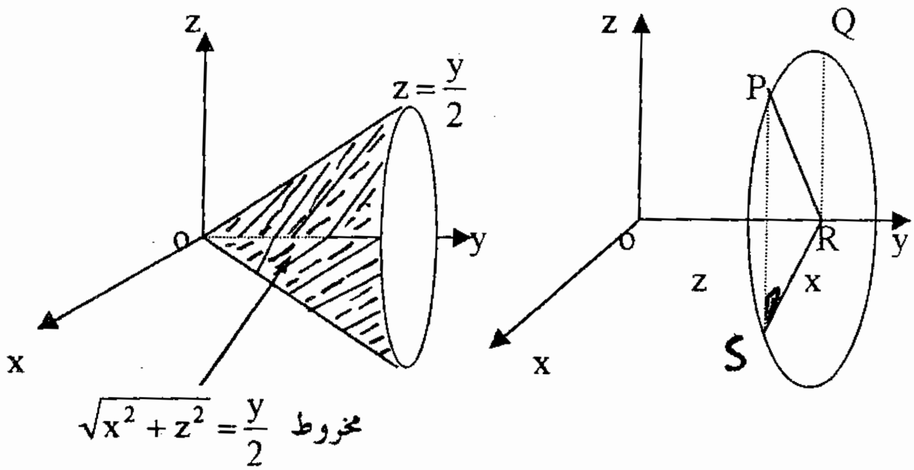
مثال (٦): اعتبر جزء الخط المستقيم $L: z = \frac{y}{2}$ الواقع في الربع الأول من المستوى yz. أوجد معادلة السطح الناتج من دوران هذا الخط حول محور y.

الحل: نعتبر نقطة P(x, y, z) على السطح الناتج من الدوران وهذه النقطة نتجت من دوران نقطة على الخط L. إحداثي y للنقطة Q هو نفسه بالنسبة للنقطة P والإحداثي x للنقطة Q يساوي صفر (شكل (١٣)).

من هندسة الشكل يكون $\overline{PR}=\overline{QR}$ والمثلث PSR القائم الزاوية في S نحصل على $\overline{PR}=\sqrt{x^2+z^2}=\overline{QR}$

حيث $\overline{QR}$ الإحداثي z للنقطة Q. إذن $Q=\left(0,y,\sqrt{x^2+z^2}\right)$

وحيث أن $Q\in L$ إذن $\sqrt{x^2+z^2}=\dfrac{y}{2}$



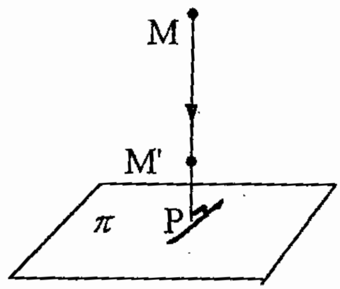
شكل (١٣)

الطريقة المستخدمة في هذا المثال تطبق على أي سطح دوراني حول أي محور من المحاور ونلخصها في الخطوات الآتية :

حدد نقطة P على السطح. ثم حدد نقطة Q على المنحنى والتي عند دورانها تعطي النقطة P. أوجد إحداثيات Q بدلالة إحداثيات P. عوض بهذه الإحداثيات في المعادلة التي تحققها Q تنتج معادلة تتحقق بالنقطة P.

(٦.٣.٣) انكماش وانبعاج السطوح:

نعتبر التحويل الهندسي في الفراغ E^3 بحيث أنه كل نقطة M تتحول إلى نقطة M' بحيث يكون المستقيم $\overline{MM'}$ عمودي على مستوى معلوم π فيكون في هذه الحالة $\overline{PM} = k\,\overline{PM'}$، $k \in R$، $k \neq 0$.



شكل (١٣)

هذا التحويل يسمى بانكماش (تمدد) الفراغ إلى المستوى π (مغير البعد). والمقدار k يسمى معامل الانكماش (التمدد) Deformation factor حيث $k < 1$ ($k>1$)، في حالة $k=1$ نحصل على تحويل التطابق.

بالنسبة لكل السطوح الدورانية السابقة نقوم بإجراء تحويل انكماش لنقاط هذه المجسمات نحصل على مجسمات جديدة حصلنا عليها بعمل تشوية أو إنبعاج في اتجاهات مختلفة أو ما يسمى Deformation، والهدف من هذا التشويه هو تحويل الدائرة التي هي أحد مقاطع السطوح الدورانية إلى قطع مخروطي أخر غير الدائرة.

<u>مثال (٧):</u> بإجراء تحويل الانكماش بالنسبة للمستوى oxz

$$x = x',\ y = \frac{a}{b}y',\ z = z',\ (x, y, z) \to \left(x', \frac{a}{b}y', z'\right)$$

وتطبيقه على الجسم الناقص الدوراني والجسم الزائدي الدوراني فإننا نحصل على الجسم الناقص والجسم الزائدي ذو الطيتين والطية الواحدة والتي تعطى بالمعادلات الآتية على الترتيب :—

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

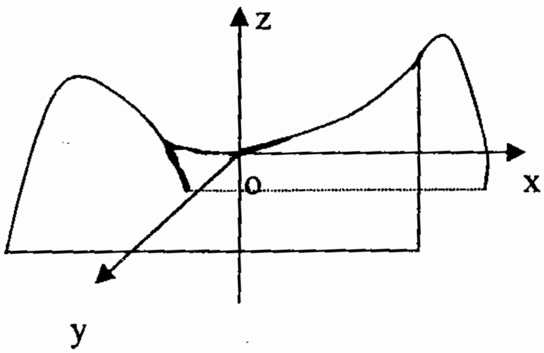
$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1$$

هذه السطوح هي سطوح درجة ثانية ليست دورانية، والتي نقوم بدراستها بالتفصيل في الباب الرابع.

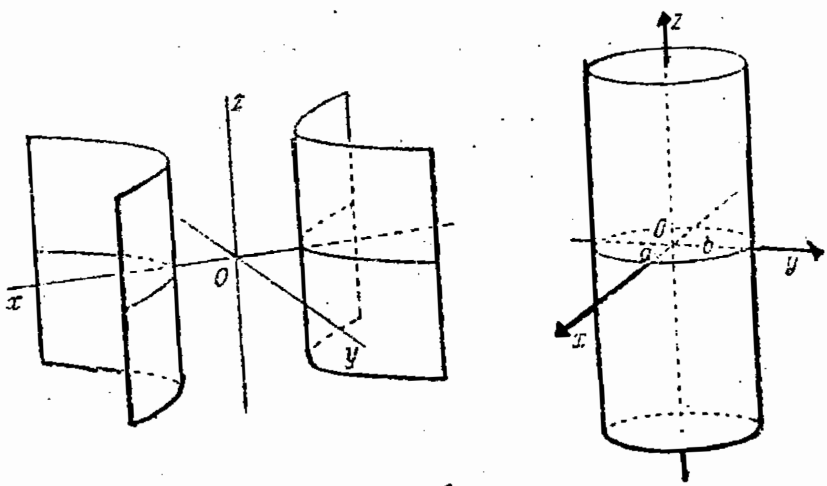
مثال (٨): اشتق معادلات الجسمات المكافئة الناقصية والزائدية.

الحل: إذا أجرينا تحويل الانكماش $x = x',\ y = \sqrt{\frac{a}{b}}\, y'\ ,\ z = z'$ بالنسبة للمستوى oxz على الجسم المكافئ الدوراني $x^2 + y^2 = 2a\, z$ فإننا نحصل على الجسم المكافئ الناقص $\frac{x'^2}{a}+\frac{y'^2}{b}= 2\, z'$ حيث $a> 0$, $b> 0$ وإذا كانت b , a لهما إشارة مختلفة وليكن $a = p^2 , b = -q^2$ فإنه يكون لدينا السطح المكافئ الزائدي $\frac{x'^2}{p^2}-\frac{y'^2}{q^2}=2z'$ والذي يسمى سطح السرج Saddle Surface شكل (١٤) وهو يشبه سرج الحصان أو المسار بين قمتين في تضاريس الأرض.



شكل (١٥) سطح السرج

وكذلك بالنسبة للأسطوانات العامة أي أن قاعدها ليست بالضرورة أن تكون دائـــرة بل أي منحنى مستو عام (شكل ١٦).



شكل (١٦)

تمارين (٣)

١ــ أوجد معادلة المستوى المماس ومعادلات العمودي على السطح $z=f(x,y)$.

٢ــ عين معادلة المستوى المماس ومعادلات العمودي على سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=14$ عند النقطة $R_o=(1,2,3)$ وأثبت أن العمودي له الاتجاه R_o.

٣ــ أوجد المستويات المماسية للسطح $x^3=f\left(\frac{x^2}{x'}\right)$ عند أي نقطة (x_o,y_o,z_o) وبين أنها تمر بنقطة الأصل.

٤ــ أثبت أن السطوح الثلاث $\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2=a^j x^j$, $j=1,2,3$ تتقاطع على التعامد فيما بينها. (الزوايا بين المستويات المماسية قياسها 90°)

٥ــ أثبت أن المستوى المماسي للسطح $xyz=a^3$ عند أي نقطة عليه يكون مع المستويات الإحداثية هرم ثابت الحجم.

٦ــ بين أن سطح الدرجة الثانية

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2=0$$

يتكون من زوج من المستويات لجميع قيم λ,μ حيث $\lambda\mu\le 0$.

ادرس الحالة $\lambda\mu>0$ في الفراغ المعرف على (مجموعة الأعداد المركبة) وناقش حالة تعامد هذه المستويات.

٧ــ أوجد معادلات السطوح الدورانية الناتجة عن دوران المنحنى $y=f(x),\ z=0$ حول محور x وكذلك حول محور y $(y>0)$ بفرض أن f دالة تناظر أحادي.

٨ــ أوجد معادلة السطح الناتج عن دوران المنحنى $y=2e^{3z}$, $x=0$ حول محور z مرة وكذلك حول محور y $(y>0)$ ووضح ذلك بالرسم.

٩ـ أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $y+5e^{-2x}=0\,,z=0$ حول محور x مرة ومحور y مرة أخرى حيث $-2\leq x\leq \ell$ وبين ذلك بالرسم.

١٠ـ أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z=0, y=\ln x$ حور محور x مـرة ومحور y مرة أخرى حيث $1\leq x\leq e$ وبين ذلك بالرسم.

١١ـ أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z=0, y=\cosh x$ حول محـور x مرة ومحور y مرة أخرى حيث $-2<x<2$ موضحا ذلك بالرسم.

١٢ـ أوجد السطح الناتج عن دوران المنحنى $z=0, y=\tan x$ حول محور x مرة، محور y مرة أخرى حيث $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ موضحا ذلك بالرسم.

١٣ـ أوجد شرط تماس المستوى $\ell x+m y+n z=P$ للسطح $F(x, y, z)=0$ عند نقطة ما $P(x_o, y_o, z_o)$.

(إرشاد : العمودي على السطح هو $\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ يوازي العمودي (ℓ, m, n) على المستوى للماس).

١٤ـ أوجد شرط تماس المستوى $\ell x+m y+n z=P$ للسطوح

(i) $x^2+y^2+z^2=1$

(ii) $2x^2+y^2-z^2=1$

(iii) $x^2+2y^2+3z^2=1$

(إرشاد : استخدم تمرين (١٣)).

١٥ـ أوجد معادلة العمودي على السطح

$$z e^{xy}+x^2-2y=1$$

عند النقطة $(0, 0, 1)$.

١٦ـــ أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $x^2 - y^2 + 3z^2 = 1$

عند النقطة $\left(1, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ وأوجد الأجزاء التي يقطعها المستوى المماس مــــع

مستويات الإحداثيات.

١٧ـــ أوجد معادلة المستوى الذي يوازي المستوى المماس للسطح

$$(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$$

عند النقطة $(1, 1, 0)$ ويمر بالنقطة $(2, 1, 2)$.

١٨ـــ أوجد درجة السطوح الممثلة بالمعادلات الآتية :ـــ

(i) $x^2 + \frac{xy}{z^2 - y^2} + 5 = 0$ **(ii)** $x(y-z) + zx^3 + yz^2 = 1$

١٩ـــ أوجد نقاط تقاطع السطح $2x^2 - y^2 + z^2 = 1$

بالمستقيم $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ وبين أنه سطح تربيعي (من الدرجة الثانية).