الباب الثاني

المستوى والمستقيم في الفراغ

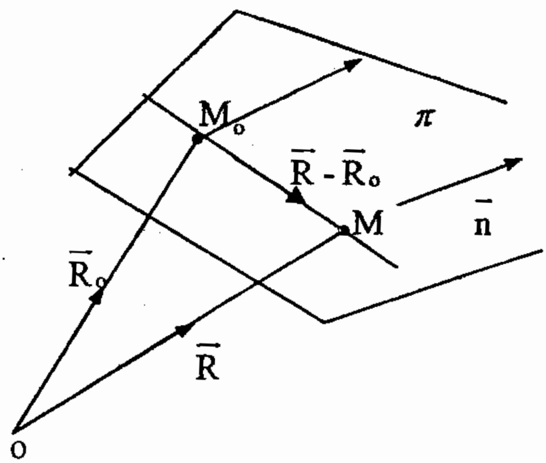
Plane and straight line in the space

(١.٢) المستوى في الفراغ E^3:

كما عرفنا في دراستنا السابقة أن المستقيم في المستوى يعطى على أنه علاقة خطية بين إحداثيات مجموعة النقاط $\left(x^1, x^2\right)$ وهي $k_i \in R \,, k_1\, x^1 + k_2\, x^2 = k_3$ أو ما تعارفنا عليه $a\,x + b\,y = c$ فإننا يمكن تعريف المستوى في الفراغ على أنه مجموعة النقاط الهندسية التي إحداثياتها ترتبط فيما بينها بعلاقة خطية على الصورة $k_i\, x^i = k_4$ مثلاً، أي $k_1\, x^1 + k_2 x^2 + k_3\, x^3 = k_4$ أو ما تعارفنا عليه سابقا $a\,x + b\,y + c\,z = d$.

ولهذا الجزء من الفراغ الذي أسميناه المستوى له صور مختلفة على حسب ما هو معلوم من نقاط واتجاهات ونستخدم في العرض أسلوب المتجهات الذي ارتضيناه لمعالجة ما هو تحت الدراسة من مستوى ومستقيم ونقطة وسطح وكل ما يتعلق بها من معاني هندسية تحليلية أي باستخدام الجبر المسموح به في الدراسة الحالية.

(١.١.٢) معادلة المستوى في الصورة العمودية: إذا كان المعطى هو اتجاه وطول العمود الساقط على المستوى π من نقطة الأصل وليكن المتجه $\bar{n} = \cos\alpha^i\, e_i$. ولنأخذ نقطة عامة M على المستوى وليكن متجه موضعها هو $R = x^i\, e_i$.



شكل (١)

وليكن نقطة تقاطع العمود $\overline{n}$ مع المستوى هي M_o لها متجه الموضـــع $\overline{R}_o=\left(x_o^i\right)$
إذن $\overline{R}-\overline{R}_o$ متجه واقع في المستوى وعليه يكون

$$\left\langle \overline{R}-\overline{R}_o\,,\overline{n}\right\rangle=0 \qquad (1)$$

أو ما يكافئ

$$\sum_{i=1}^{3}\left(x^i-x_o^i\right)\cos\alpha^i=0$$

ومنها نحصل على العلاقة

$$\sum_{i=1}^{3}x^i\cos\alpha^i=\sum_{i=1}^{3}x_o^i\cos\alpha^i$$

وطول العمود الساقط على المستوى π من نقطة الأصل هو

$$\rho=\sum_{i=1}^{3}x_o^i\cos\alpha^i=\left\langle \underline{R}_o\,,\underline{n}\right\rangle=P_{\underline{n}}\,\underline{R}_o$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى في الصورة الإحداثية هي :

$$\sum_{i=1}^{3}x^i\cos\alpha^i=\rho \qquad (2)$$

أو في الصورة الاتجاهية $\rho = \langle \overline{R}, \overline{n} \rangle$ وتسمى الصورة العمودية normal form للمستوى π .

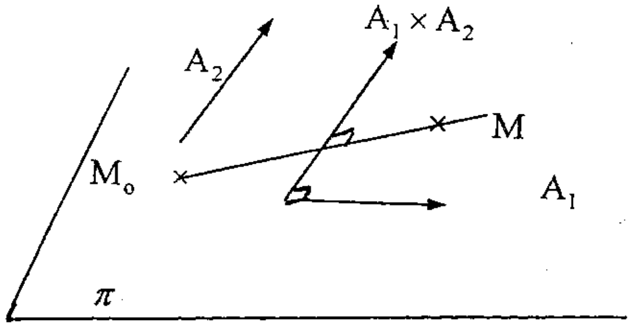
والصورة الإحداثية تعكس ما قلناه في مقدمتنا على أن معادلة المستوى هي علاقة بين الاحداثيات (x^i) لمجموعة من النقط، هذه العلاقة هي كثيرة حدود خطية تساوي صفر أو الإحداثيات ترتبط فيما بينها بدالة خطية.

(٢.١.٢) المستوى بدلالة نقطة معلومة ويحتوي على اتجاهين :—

لنفرض أن المستوى π يمر بنقطة $M_o = (x_o^i)$ ويحوي الاتجاهين $A_\alpha = (\ell_\alpha^i), \alpha = 1,2$ فإن المتجهات A_α, $\overline{M_o M} = (x^i - x_o^i)$ تقع في المستوى π حيث $\overline{M}, \overline{M_o}$ متجهات الموضع للنقطة M_o ونقطة عامة $M = (x^i)$ في π على الترتيب. أي أن

$$\left[\overline{MM_o}, A_1, A_2\right] = 0 \tag{3}$$

وهذا واضح باستخدام خصائص الارتباط الخطي (شكل ٢).



شكل (٢)

المعادلة العامة التي أشرنا إليها في البداية لابد من ربطها بما توصلنا إليه وعليه يكون من (3) وبفك المحدد نحصل على

$$B_i\, x^i = C \tag{4}$$

حيث B_i هي المحددات ذات الرتبة الثانية التي يمكن تكوينها من المصفوفة $[A_1\ \ A_2]^t$ حيث استخدمنا تجزئ المصفوفات وحيث أن A_1 , A_2 متجهات لا تقع على استقامة واحدة فإن أحد المحددات B_i مختلف عن الصفر (المحددات B_i تأخذ من أعمدة المصفوفة $[A_1 , A_2]$ مثنى مثنى بالترتيب الثابت، C يعطى من

$$C = - x_o^i\, B_i \tag{5}$$

المعادلة (4) هي المعادلة العامة للمستوى في نظام الإحداثيات الكرتيزية (x^i) وهذا هو برهان النظرية التي تنص على أن معادلة المستوى تعطى بعلاقة خطية من الاحداثيات (x^i).

وعكس هذه النظرية صحيح بمعنى أن أي معادلة من الدرجة الأولى في الاحداثيات (x^i) تعرف مستوى في الفراغ والبرهان متروك للطالب كتمرين.

والمعادلة $B_i\, x^i + C = 0$ يمكن تحويلها إلى الصورة العمودية بجعل B_i جيوب تمام اتجاه وذلك بضرب طرفي المعادلة في المقدار $1/\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}$ حيث تؤخذ الإشارة التي تخالف إشارة الحد المطلق C في المعادلة العامة للمستوى.

ونوضح هنا كيفية رسم مستو معطى بمعادلة خطية:ــ

<u>**تعريف (١):**</u>

تقاطع مستوى π في الفراغ مع أحد مستويات الإحداثيات π^i يسمى أثر المستوى π (trace) في المستوى الإحداثي π^i ويرمز له بالرمز $Tr_i(\pi)$ ونعني بالمستوى π^i هو المستوى الإحداثي المعطى بالمعادلة $x^i = 0$.

ويمكن استخدام آثار المستوى π للمساعدة في إظهار شكله في الفراغ كما يتضح من الأمثلة الآتية:ــ

مثال (١):

أرسم المستوى $\pi: \ 2x + 6y + 3z - 12 = 0$ في المثمن الأول 1^{st} octant

الحل: بوضع $z = 0$ نحصل على $Tr(\pi)$ في المستوى xy أي هو

$$L_1 : x + 3y = 6$$

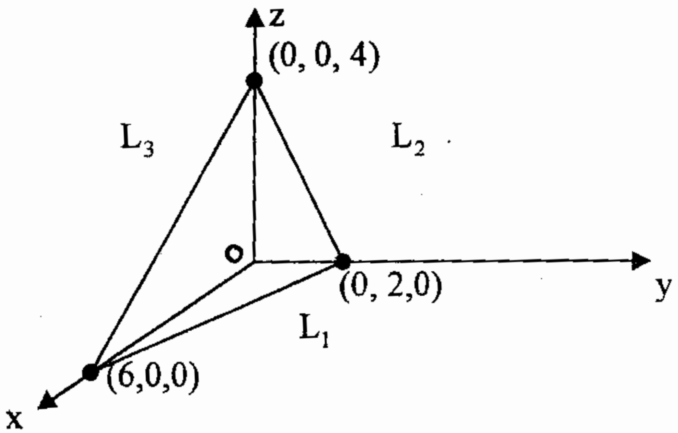
وكذلك أثر π في المستوى yz هو

$$L_2 : \ 2y + z - 4 = 0$$

وبالمثل أثر π في المستوى xz هو

$$L_3 : 2x + 3z - 12 = 0$$

المعادلات L_i تمثل خطوط مستقيمة في مستويات الإحداثيات. المنطقة المحددة بهـــذه المستقيمات هي جزء المستوى الموجود في الثمن الأول كما هو مبين بالرسم.

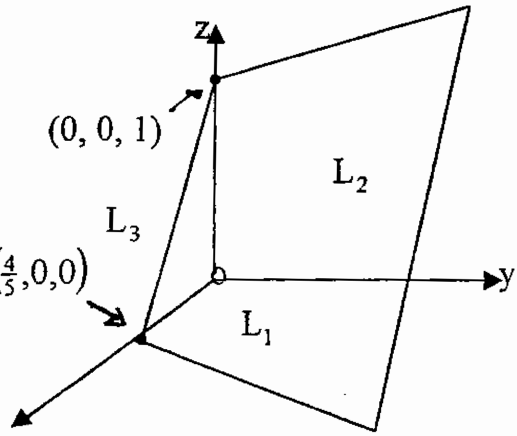


شكل (٣)

مثال (٢): ارسم المستوى $5x + 4z - 2y = 4$ في الثمن الأول من الفراغ.

الحل: نعين آثار المستوى مع مستويات الإحداثيات كالآتي (شكل ٤).

$$z=0,\ L_1: 5x-2y=4,$$
$$y=0,\ L_3: 5x+4z=4,$$
$$x=0,\ L_2: 4z-2y=4.$$



شكل (٤)

(٣.١.٢) علاقة متجه بمستوى :

إذا كان لدينا متجه $A=\left(a^i\right)$ ومستوى $\pi: B_i x^i + C = 0$ فإن الشرط الضروري والكافي كي يوازي المتجه A المستوى π أو يقع فيه هو أن يتحقق $\langle A, \vec{n} \rangle = 0$ حيث $\vec{n}=\left(B_i\right)$ اتجاه العمودي على المستوى π ويحدد هذا الاتجاه لأن $\vec{n}$- عمودي على المستوى في الاتجاه المعاكس. في الحالة التي فيها $\vec{n}=\left(B_i\right)$ يقال أن المستوى موجه oriented وعموما دائما نعتبر العمودي على المستوى هو $\vec{n}$ ما لم ينص غير ذلك. وتكتب $\pi /\!/ A$ وإذا كان A واقع في π فإننا نكتب $A \in \pi$. وباستخدام هذه العلاقة يمكن عرض الحالات الخاصة للمستوى باستخدام المعادلة العامة للمستوى π وهي $\pi: A_i x^i + C = 0$.

(i) $A_1 = 0$ ، المستوى π يوازي الاتجاه e_1 (يوازي محور x).

(ii) $A_2 = 0$ ، المستوى π يوازي الاتجاه e_2 (يوازي محور y)

(iii) $A_3 = 0$ ، المستوى π يوازي الاتجاه e_3 (يوازي محور z)

(iv) $C = 0$ فإن المستوى π يمر بنقطة الأصل.

(v) $A_1 = A_2 = 0$ فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه e_3 ويوازي المستوى الإحداثي $x^3 = 0$.

(vi) $A_1 = A_3 = 0$ فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه e_2 ويوازي المستوى الإحداثي $x^2 = 0$.

(vii) إذا كان $A_2 = A_3 = 0$ فإن المستوى يكون عمودي على الاتجاه e_1 ويوازي المستوي الإحداثي $x^1 = 0$.

(viii) إذا كان $A_1 = C = 0$ فإن $e_1 \in \pi$ (المستوى يحتوي على محورx)

(ix) إذا كان $A_1 = A_2 = C = 0$ فإن π تنطبق على المستوى الإحداثي $x^3 = 0$.
وهكذا.

مثال (٣): أوجد معادلة المستوى الذي يمر بنقطتين معلومتين $M_\alpha = \left(x_\alpha^i\right)$, $\alpha = 1,2$ ويوازي اتجاه معلوم $\overline{A} = \left(\ell^i\right)$.

الحل: نفرض أن متجها الموضع للنقطتين M_α هما R_α ونحاول إيجاد اتجاه العمودي على المستوى المطلوب، من النقطتين M_α يمكن تحديد اتجاه واقع في المستوى مثلا $\overline{M_1M_2}$ ويوجد اتجاه أخر يوازي $\overline{A}$ واقع أيضا في المستوى. إذن المتجه $\overline{A} \times \overline{M_1 M_2}$ عمودي على المستوى ونأخذ نقطة معلومة من النقطتين M_α ولتكن M_1 وبذلك تكون معادلة المستوى هي

$$\left\langle R - R_1, \overline{A} \times \overline{M_1 M_2} \right\rangle = 0 \qquad (6)$$

أو

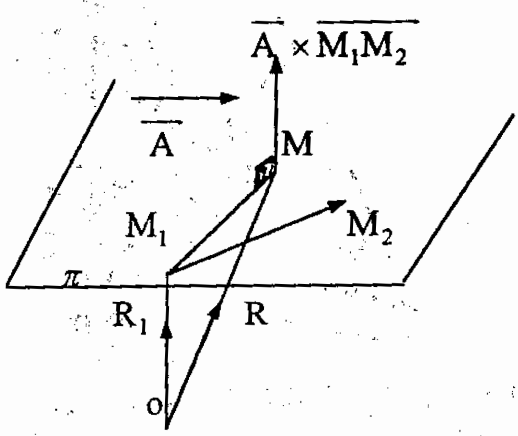
$$\left[R - R_1, \overline{A}, \overline{M_1 M_2}\right] = 0$$

حيث R متجه الموضع لأي نقطة عامة $M\left(x^1, x^2, x^3\right)$ (شكل ٥).

أو بالتفصيل

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_1^1 & x^2 - x_1^2 & x^3 - x_1^3 \\ \ell^1 & \ell^2 & \ell^3 \\ x_2^1 - x_1^1 & x_2^2 - x_1^2 & x_2^3 - x_1^3 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدد نحصل على معادلة خطية في الإحداثيات $\left(x^i\right)$ لأي نقطة عامة على المستوى.



شكل (٥)

مثال (٤): أوجد معادلة المستوى الذي يمر بثلاث نقاط $M_i = \left(x_i^j\right)$.

الحل: المستوى المطلوب يحوي ثلاث نقاط M_i ومنهم يمكن تكوين متجهين مستقلين واقعين في المستوى وليكن $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1 M_3}$ ونفرض أن النقطة المعلومة هي M_1

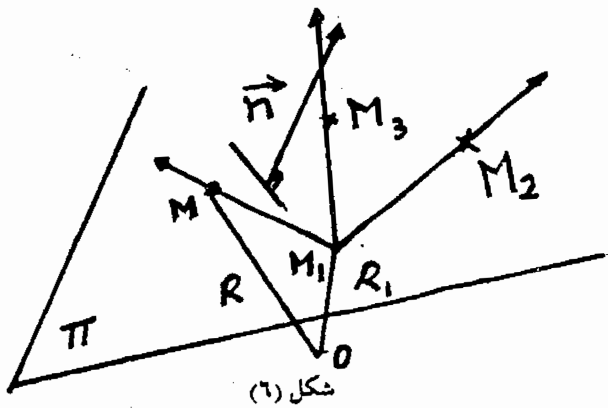
وأن M أي نقطة عامة في المستوى ويكون اتجاه العمودي $\overline{n}$ على المستوى هو $\overline{M_1M_3} \times \overline{M_1M_2}$ وعليه فإن معادلة المستوى هي

$$\left[\overline{R}-\overline{R_1},\overline{M_1 M_2},\overline{M_1 M_3}\right]=0 \qquad (7)$$

حيث R, R_1 هما متجها الموضع للنقاط M, M_1 على الترتيب (شكل ٦).

إذن معادلة المستوى في صورة صريحة هي :

$$\begin{vmatrix} x^1-x_1^1 & x^2-x_1^2 & x^3-x_1^3 \\ x_2^1-x_1^1 & x_2^2-x_1^2 & x_2^3-x_1^3 \\ x_3^1-x_1^1 & x_3^2-x_1^2 & x_3^3-x_1^3 \end{vmatrix}=0$$

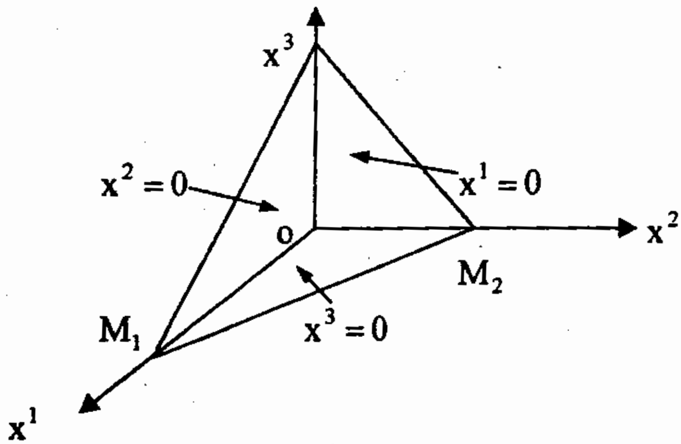


شكل (٦)

مثال (٥): أوجد معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات.

الحل: نفرض أن المستوى يقطع من محاور الإحداثيات ox_1, ox_2, ox_3 الأجزاء a^1, a^2, a^3 على الترتيب. إذن نقاط تقاطع المستوى مع محاور الإحداثيات هي $M_1(a^1,0,0), M_2(0,a^2,0), M_3(0,0,a^3)$ وبالتالي المستوى المطلوب يحوي ثلاث نقاط وباستخدام المعادلة (7) نحصل على معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة the intercepts من محاور الإحداثيات على الصورة (شكل ٧).

$$\frac{x^1}{a^1}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}=1 \qquad (8)$$



شكل (٧)

وهذا المستوى يمكن اعتباره اتحاد ثلاثة مستويات تعرف من المعادلات

$$x^3=0\,,\frac{x^1}{a^1}+\frac{x^2}{a^2}=1 \quad ، \; x^2=0\,,\frac{x^1}{a^1}+\frac{x^3}{a^3}=1 \quad ، \; x^1=0\,,\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}=1$$

(٤.١.٢) المعادلات البارامترية للمستوى :

بما أن المستوى في الصورة العامة يعطى من $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$ مثلا، فإنه إذا ما أعطينا مثلا x, y فإنه يمكننا الحصول على z أي أن كل نقطة في المستوى تعتمد على بارامترين x, y مثلا ولتوضيح ذلك في الشكل العام.

نفرض أن لدينا مستوى π يمر بنقطة $M_o=\left(x_o^i\right)$ ويحتوي على الاتجاهين $A_\alpha=\left(a_\alpha^i\right), \alpha=1,2$ وإذا اعتبرنا نقطة عامة $M=\left(x^i\right)\in\pi$ فإن المتجهات

$\overline{M_oM}=\left(x^i-x_o^i\right), A_\alpha$

تقع في مستوى واحد أي أنها مرتبطة خطيا فيكون

$$\overline{M_oM} = u^{\alpha} A_{\alpha} \tag{9}$$

حيث u^{α} كميات قياسية $\left(u^{\alpha} \in R\right)$. العلاقة (9) تأخذ الشكل الآتي :ـ

$$R = R_o + u^{\alpha} A_{\alpha}\,,\ R\left(u^1, u^2\right) = \left(x_o^i + u^{\alpha}\, a_{\alpha}^i\right) \tag{10}$$

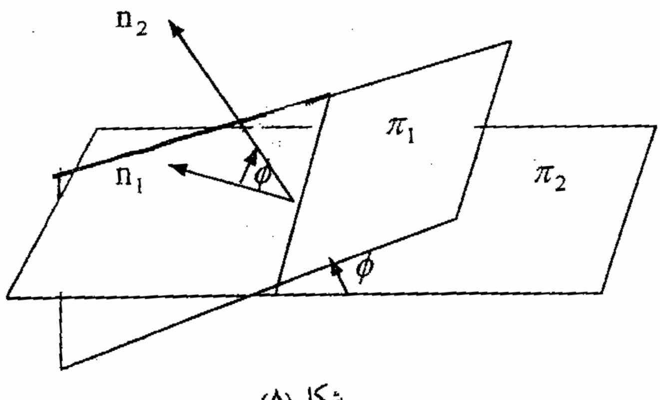
$$= \left(x_o^1 + u^1\, a_1^1 + u^2\, a_3^1, \dots\right)$$

$$x^i = x_o^i + u^{\alpha}\, a_{\alpha}^i\,,\ \forall\ i = 1,2,3\,, \alpha = 1,2 \tag{11}$$

المعادلات (11) تسمى المعادلات البارامترية للمستوي و المعادلة (10) تسمى الدالة الاتجاهية للمستوى وهي دالة اتجاهية خطية في متغيرين u^1, u^2.

تعريف (٢):

الزاوية بين المستويين $\pi_{\alpha} : a_i^{\alpha}\, x^i + C_{\alpha} = 0$ حيث $\alpha = 1, 2$ هي الزاوية ϕ بين العمودين $A_1 = \left(a_i^1\right), A_2 = \left(a_i^2\right)$ على المستويين π_{α} (شكل ٨) وتعطى من العلاقة:



شكل (٨)

$$\cos\phi = \frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{|A_1||A_2|} \tag{12}$$

يتوازى المستوى π_1 مع المستوى π_2 إذا تحقق أن $A_2 /\!/ A_1$ أي أن :

$$\frac{a_1^1}{a_1^2}=\frac{a_2^1}{a_2^2}=\frac{a_3^1}{a_3^2} \qquad (13)$$

ويتعامد المستويين π_1 , π_2 إذا تحقق أن

$$\langle A_1 , A_2 \rangle = 0 \qquad (14)$$

وعلى الطالب أن يتأكد من هذه الحقائق وذلك بتصور فراغي للمستوى والعمودي عليه وعلاقته بالمستويات الأخرى.

(٢. ١. ٥) حزمة المستويات :ـ

معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين π_α، حيث $\pi_\alpha : a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0$ تعطى من $\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$

أو

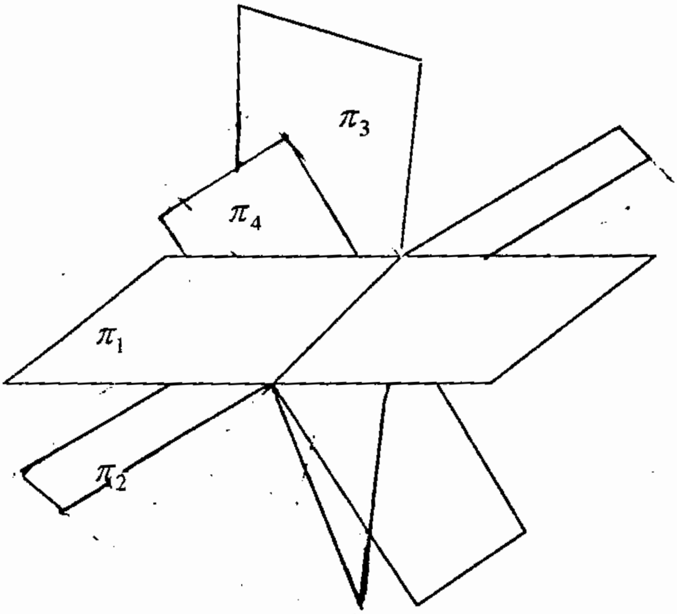
$$a_i^1 x^i + C_1 + \lambda \left(a_i^2 x^i + C_2\right) = 0$$

أو

$$\left(a_i^1 + \lambda\ a_i^2\right) x^i + C_1 + \lambda C_2 = 0 \qquad (15)$$

حيث λ عدد حقيقي يتعين بشرط إضافي على المستويين معا.

مجموعة المستويات التي تتحد لجميع قيم λ الحقيقية تسمى حزمة المستويات ويرمز لها بالرمز π_λ . المستويين π_1 , π_2 يسميان قاعدة الحزمة وخط تقاطع المستويين يسمى محور الحزمة.

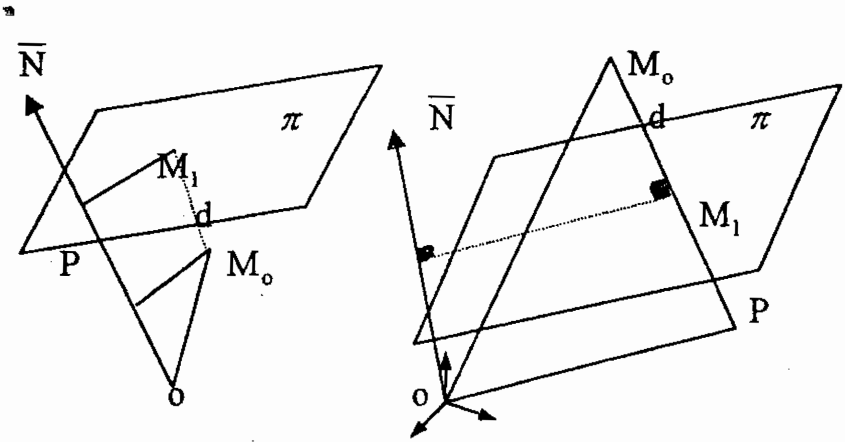


شكل (٩)

(٦.١.٢) بعد نقطة عن مستوى :ـ

<u>نظرية :</u> بعد النقطة $M_o = \left(x_o^i\right)$ عن المستوى $\pi : a_i\, x^i + C = 0$ يعرف بأنه $d = P_{\underline{n}}\, \overline{M_o M}$ حيث $M \in \pi$ (شكل ١٠) ويعطى من

$$d = \frac{\left| a_i\, x_o^i + C \right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad (16)$$



شكل (١٠)

<u>البرهان:</u> نحاول إثبات العلاقة (16) التي تعطى طول العمود الساقط من نقطة $M_o \equiv (x_o^i)$ على المستوى $\pi : a_i\, x^i + C = 0$. لذلك نفرض أن موقع العمود الساقط من M_o على المستوى π هو النقطة $M_1 \equiv (x_1^i)$ فيكون $(a_i) \,/\!/\, \overline{M_1M_o}$ ويكون المتجه $\overline{M_1M_o}$ يساوي $\overline{M_1M_o} = d\,\underline{n}$ حيث n وحدة المتجهات في الاتجاه العمودي على π .

أي أن

$$\underline{n} = \frac{(a_i)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad , \; a_i\, x_1^i + C = 0$$

ويكون

$$d = \left| \left\langle \underline{n}, \overline{M_1M_o} \right\rangle^{\frac{1}{2}} \right| , \quad \overline{M_1M_o} = \left(x_o^i - x_1^i \right)$$

$$= \left| \frac{a_i\, x_o^i - a_i\, x_1^i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

ولكن النقطة (x_1^i) تقع على المستوى π فهي تحقق معادلته أي $a_i\,x_1^i = -C$ وبالتالي العلاقة (16) تنتج مباشرة.

(٧.١.٢) الوضع المتبادل لمستويين في الفراغ :ـ

نفرض أن لدينا مستويين

$$\pi_\alpha : a_i^\alpha\, x^i + C_\alpha = 0 \ , \alpha = 1, 2 \qquad (*)$$

ونعتبر الحالات الآتية:ـ

(i) إذا كان $\frac{a_1^1}{a_1^2} \neq \frac{a_2^1}{a_2^2} \neq \frac{a_3^1}{a_3^2}$ فإن المستويان متقاطعان.

(ii) إذا كان $\frac{C_1}{C_2} \neq \lambda$ ، $\frac{a_1^1}{a_1^2} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = \frac{a_3^1}{a_3^2} = \lambda$ فإن المستويان متوازيان.

(iii) إذا كان $\frac{a_1^1}{a_1^2} = \frac{a_2^1}{a_2^2} = \frac{a_3^1}{a_3^2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$ فإن المستويان متطابقان.

(i) الشروط الضرورية والكافية لكي يتقاطع المستويان π_1, π_2 هي أن يتحقق أحد الشروط الآتية:ـ

(١) المحددات ذات الرتبة الثانية المتكونة من أعمدة المصفوفة (a_i^α) مختلفة عن الصفر ولتكن هي Δ_i .

(٢) الأعمدة $(a_i^1), (a_i^2)$ على المستويان غير متوازية.

(٣) رتبة مصفوفة المعاملات (a_i^α) تساوي 2 .

(ii) الشروط الواجب توافرها لكي تكون المستويات π_α متوازية هي أن يتحقق أحد الشروط الآتية :ـ

(١) أن تكون المتجهات $(a_i^1), (a_i^2)$ متوازية أي أن $\forall i$ ، $\frac{a_i^1}{a_i^2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

(٢) أن كل محددات الرتبة الثانية المتكونة من أعمدة المصفوفة $\left(a_i^{\alpha}\right)$ تساوي صفر وأن أحد المحددات الآتية :ـ

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & C_1 \\ a_1^2 & C_2 \end{vmatrix}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_2^1 & C_1 \\ a_2^2 & C_2 \end{vmatrix}, \delta_3 = \begin{vmatrix} a_3^1 & C_1 \\ a_3^2 & C_2 \end{vmatrix}$$

يكون مختلف عن الصفر.

(٣) رتبة المصفوفة $\left(a_i^{\alpha}\right)$ تساوى واحد ورتبة المصفوفة الموسعة $\left(a_i^{\alpha} \mid C_{\alpha}\right)$ تساوي 2.

(iii) شروط انطباق مستويين هو أن يتحقق أحد الشروط الآتية :ـ

(١) $\delta_i = \Delta_i = 0$

(٢) المتجهات $\left(a_i^1\right), \left(a_i^2\right)$ متوازية وأن $\forall i \ \frac{a_i^1}{a_i^2} = \frac{C_1}{C_2}$.

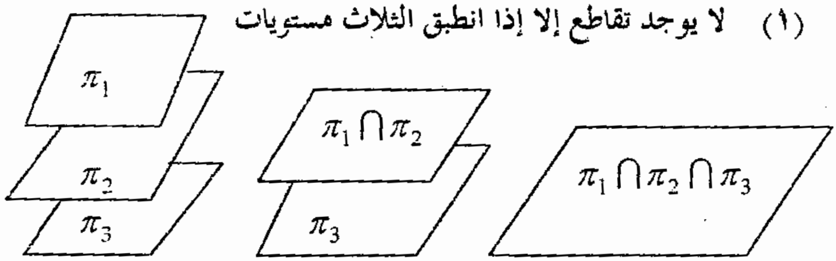
(٣) رتبة المصفوفة الموسعة $\left(a_i^{\alpha} \mid C_{\alpha}\right)$ تساوي واحد.

وهذه الشروط يمكن التأكد منها (نعنى البرهان) باستخدام رتبة المصفوفة الموسعة ورتبة مصفوفة المعاملات بحيث يكون نظام المعادلات (*) متفق (متوافق) Consistent.

(٨.١.٢) الوضع المتبادل لثلاث مستويات في الفراغ:

توجد احتمالات كثيرة للوضع النسبي المتبادل للمستويات الثلاث π_j وخط تقاطع المستويات الثلاث. وهذه الأوضاع يمكن التعرف عليها من مناقشة الحلول الممكنة للمعادلات $j=1,2,3$, $\pi_j : a_i^j x^i + b^j = 0$ ويمكن ترجمتها إلى الأشكال الآتية:

(١) لا يوجد تقاطع إلا إذا انطبق الثلاث مستويات



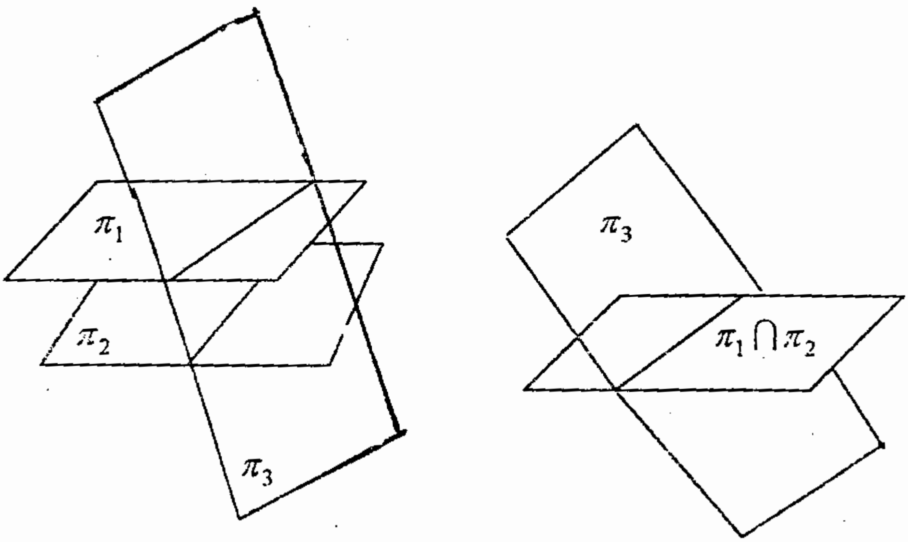
توازي (لا يوجد تقاطع)　　　لا يوجد تقاطع　　　التطابق

$\pi_1 \cap \pi_2 \parallel \pi_3$

شكل (١١)

$\pi_1 \cap \pi_2$ تعني أن π_1 ينطبق على π_2 .

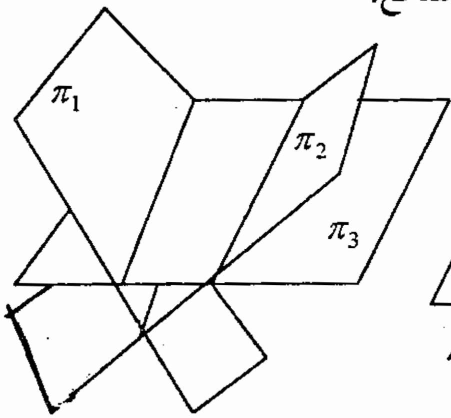
(٢) يتقاطع المستويات في خط مستقيم إذا أنطبق أثنين من المستويات وخلاف ذلك لا يوجد تقاطع (أي توازي مستويان وقطعا الثالث).



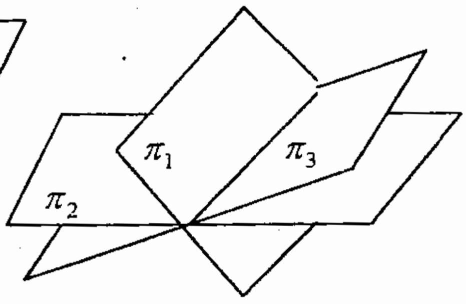
لا يوجد تقاطع　　　التقاطع خط مستقيم

شكل (١٢)

(٣) إذا كان كل مستويان متقاطعان وخطوط تقاطعهما متوازيه في هذه الحالـــة لا يوجد تقاطع إلا إذا انطبقت خطوط التقاطع.



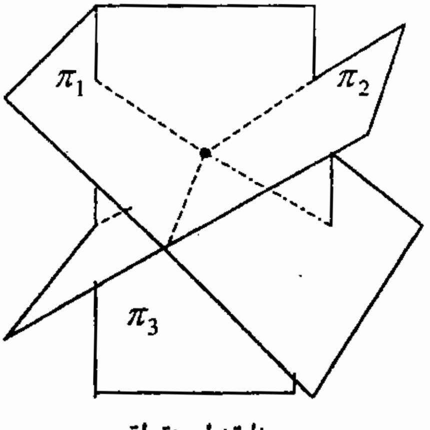
لا يوجد تقاطع



التقاطع خط مستقيم

شكل (١٣)

(٤) إذا لم يوجد مستويان متوازيان وخطوط تقاطعهما غير متوازية فـــإن المســـتويات تتقاطع في نقطة ويمكن إيجادها بحل المعادلات الخطية الثلاث والتي تمثل المستويات آنيا Simultaneously (معا في وقت واحد) ويكون الحل وحيد



التقاطع نقطة

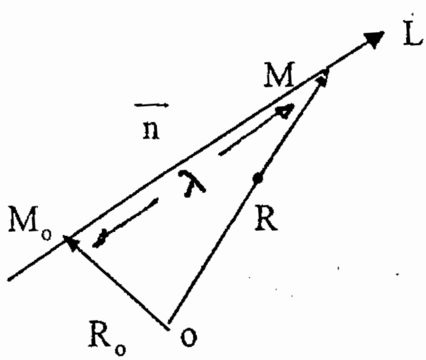
شكل (١٤)

(٢.٢) الخط المستقيم في الفراغ E^3:

من المعادلة المألوفة للخط المستقيم في المستوى وهي $y = m x + c$ حيث m الميل أي أن معادلة الخط المستقيم في المستوى تتحدد بنقطة M_o والميل وهو اتجاه الخط المستقيم أي ظل الزاوية التي يصنعها الخط مع الاتجاه الموجب لمحور x وإن كان هذا الاتجاه يمكن التعبير عنه $\bar{a} = (\cos\theta , \sin\theta)$ ويكون $M_oM \uparrow\uparrow \bar{a}$ ومنها يكون اتجاه العمودي عليه هو $(-\sin\theta, \cos\theta)$ ومنها نحصل على $y=mx+C$ حيث $m = \tan\theta$. بنفس الأسلوب يمكن عرض معادلات الخط المستقيم في الفراغ كالآتي:ـ

نفرض أن لدينا خط مستقيم L، $M = (x^i)$ نقطة اختيارية عليه و L يمر بالنقطة $M_o = (x^i)$ وله اتجاه المتجه $\bar{n} = (\ell^i)$. إذن $\bar{n} \uparrow\uparrow \overline{M_oM}$ وبذلك تكون المركبات متناسبة، أي أن

$$\frac{x^i - x_o^i}{\ell^i} = \lambda \quad , \forall \ i \tag{17}$$



شكل (١٥)

المعادلة (17) يمكن كتابتها على الصورة

$$x^i = x_0^i + \lambda \ell^i \;,\; i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

أو في الصورة الاتجاهية

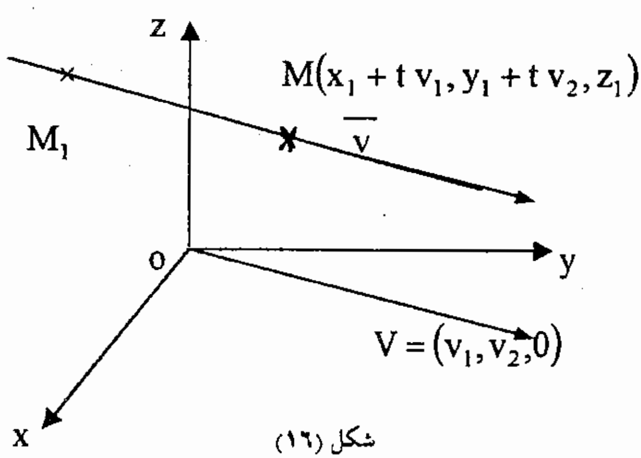
$$R = R_o + \lambda\; n \tag{19}$$

حيث R, R_o متجهات المنوضع للنقط M, M_o على الترتيب، المعادلات **(17)** تسمى المعادلات القانونية أو المتماثلة Symmetric equation، والمعادلات **(18)** تسمى المعادلات البارامترية Parametric equation للخط المستقيم L الذي اتجاهه n ويمر بنقطة معلومة M_o , λ بارامتر أي لقيم البارامتر λ المختلفة نحصل على نقط مختلفة على الخط المستقيم، المعادلة (19) تعتبر تطبيق على الدالة الاتجاهية في متغير واحد (شكل ١٥).

ونوضح هندسيا (أي بالرسم) المعادلات **(17)** في حالتين مثلا.

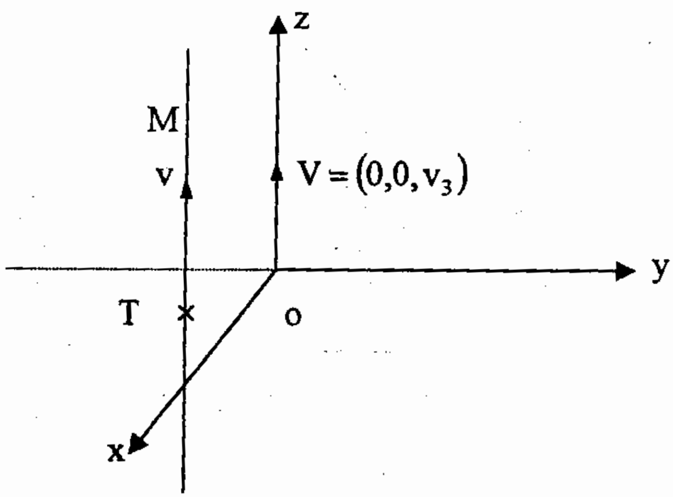
مثال (٦): الخط يوازي مستوى إحداثي وليكن يوازي المستوى xy ويمر بالنقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ويوازي الاتجاه $(v_1, v_2, 0)$ الواقع في المستوى x,y حيث $v_1 , v_2 \neq 0$ فإن معادلاته المتماثلة هي (شكل ١٦).

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} \;, z = z_1$$



شكل (١٦)

مثال (٧): الخط يوازي أحد محاور الإحداثيات وليكن محور z ويمر بالنقطـــة M_1 ، إذن معادلاته القياسية $x = x_1 , y = y_1$.



شكل (١٧)

حيث $T(x_1, y_1, 0)$ هي نقطة تقاطع الخط مع المستوى xy.

مثال (٨): أوجد المعادلات (17)، (18)، (19) للخـــط المســتقيم المـــار بنقطتـــين $\alpha = 1,2 \; M_\alpha = \left(x_\alpha^i\right)$.

الحل: استخدم $\left(r_2 - r_1\right) r = r_1 + \lambda$ أو $\left(r - r_1\right) \times \left(r_2 - r_1\right) = 0$ حيـــث r متجـــه الموضع لأي نقطة عامة، r_α متجهات الموضع للنقاط M_α.

مثال (٩): أثبت أنه إذا وقعت النقط M_1, M_2, M_3 على استقامة واحدة فإن :

$$r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1 = 0$$

الحل: بوضع $r = r_3$ في المثال السابق واستخدام خاصية التوزيع نحصل على المطلوب.

(١.٢.٢) الوضع المتبادل لمستقيمين في الفراغ:

هنا نقوم بإعطاء الشروط الضرورية والكافية للوضع المتبادل لمستقيمين L_α معطيان بالمعادلات القانونية الآتية:ـــ

$$L_\alpha : \frac{x^i - x^i_\alpha}{\ell^i_\alpha} = \lambda \ , \ M_\alpha = \left(x^i_\alpha\right) \in L_\alpha \ , \ \forall \ i, \alpha$$

ونعتبر الحالات الآتية :ـــ

(١) المستقيمان L_α لا يقعان في مستوى واحد إذا تحقق

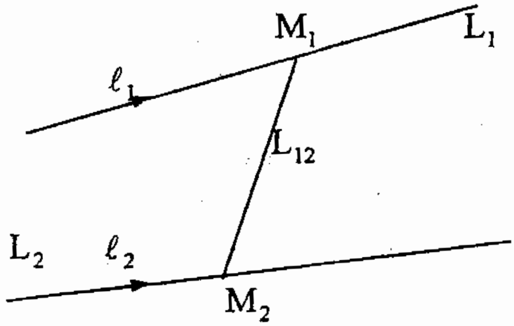
$$\Delta = \left[\ell_1 \ \ell_2 \ L_{12}\right] \neq 0$$

حيث $L_{12} = \left(x^i_1 - x^i_2\right)$, $\ell_\alpha = \left(\ell^i_\alpha\right)$

(٢) المستقيمان متقاطعان إذا تحقق $\Delta = 0$ وأن ℓ_1 , ℓ_2 غير متوازيين.

(٣) المستقيمان متوازيان إذا تحقق $\ell_2 \nearrow\nearrow \ell_1$ ولكن المتجه L_{12} لا يوازيهما أي أن $\Delta = 0$.

(٤) المستقيمان منطبقان إذا تحقق أن L_{12}, ℓ_1 , ℓ_2 تقع على استقامة واحدة أي أن $\Delta = 0$، البرهان متروك للطالب ويمكن استخدام مفهوم الاستقلال والارتباط الخطي وحاصل الضرب الثلاثي القياسي (شكل ١٨).



شكل (١٨)

مثال (١٠): أثبت أن الشرط (٤) يمكن كتابته في الصورة

$$\frac{x_3^1 - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} = \frac{x_3^2 - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{x_3^3 - x_1^3}{x_2^3 - x_1^3}$$

حيث $M_3 = \left(x_3^i\right)$

(٢.٢.٢) الوضع المتبادل للمستوى والمستقيم:

نفرض أن لدينا مستقيم L اتجاهه $\ell = \left(\ell^i\right)$ يمر بالنقط $M_o = \left(x_o^i\right)$ ومستوى معطى بالمعادلة $a_i\, x^i + C = 0$ أي العمودي عليه $n = \left(a_i\right)$، نعتبر الحالات الآتية:ـــ

(١) المستقيم والمستوى متقاطعان :ـــ $\langle n, \ell \rangle \neq 0$ (نقطة التقاطع وحيدة).

(٢) المستقيم والمستوى متوازيان :ـــ $\langle n, \ell \rangle = 0;\ a_i\, x_o^i + C \neq 0$

(٣) المستقيم يقع في المستوى :ـــ $\langle n, \ell \rangle = 0,\ a_i\, x_o^i + C = 0$

البرهان : المعادلات البارامترية للخط المستقيم هي

$$x^i = x_o^i + \lambda\, \ell^i \quad , \ \forall\ i$$

وبالتعويض عنها في معادلة المستوى نحصل على $\lambda = \dfrac{a_i\, x_o^i + C}{-\langle n , \ell \rangle}$

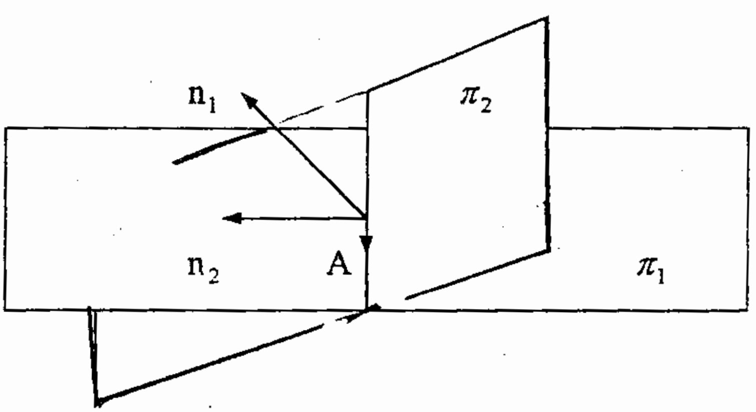
أي أن المستوى والمستقيم لهما نقطة مشتركة ولذلـــك فـــهما متقـــاطعين إذا كـــان $\langle n, \ell \rangle \neq 0$ وهكذا يمكن تكملة البرهان.

(إرشاد : بالنسبة للحالة (٣) ناقش الحالات التي فيها λ مقدار لانهائي، λ كمية غير معينة على الصورة $\frac{0}{0}$) .

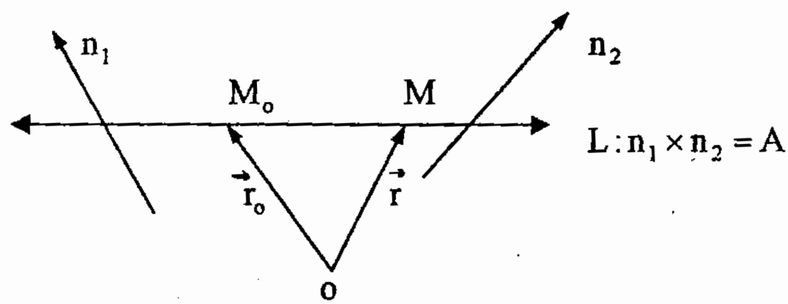
(٣.٢.٢) المستقيم كخط تقاطع مستويين :

من هندسة الفراغ نعلم أنه إذا تقاطع مستويين فيكون ناتج التقـــاطع خـــط مستقيم (شكل ١٩) ولذلك يكون الخط المستقيم هو مجموعة كل النقاط الهندســـية (x^i) التي تحقق المعادلتين.

$$\pi_\alpha : a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0 \;, \alpha = 1, 2 \tag{20}$$



شكل (١٩)



شكل (٢٠)

للحصول على المعادلات القانونية للخط المستقيم (20) يجب تعيين نقطة $M_o = \left(x_o^i\right)$ تحقق المعادلات (20) وهي بذلك تقع على المستقيم. كذلك الاتجاه $A = \left(\Delta_i\right) = n_1 \times n_2$ حيث

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3^1 & a_1^1 \\ a_3^2 & a_1^2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

هو اتجاه خط تقاطع المستويين (20) وذلك لأن $\langle n_1, A\rangle = 0, \langle n_2, A\rangle = 0$
حيث $n_\alpha = \left(a_i^\alpha\right)$ أعمدة على المستويين π_α. ويمكن للطالب أن يتأكد من ذلك؟ وذلك باستخدام تعريف حاصل الضرب القياسي ومفكوك المحددات (شكل ٢٠).

وعليه فإن المعادلات القانونية للخط المستقيم هي :

$$\frac{x^i - x_o^i}{\Delta_i} = \lambda \ , \forall i, \ \ M = \left(x^i\right) \in L$$

<u>مثال (١١):</u> كيف يمكن تعيين النقطة الاختيارية M_o كي تحقق المعادلات (20)؟

<u>الحل:</u> نختار أحد المركبات للنقطة العامة $\left(x_i\right)$ بقيمة معينة (أي عدد حقيقي) وليكن مثلا $x_1 = 0$ وبالتعويض عنها في المعادلات (20) نحصل على معادلتين في مجهولين

x_2, x_3 نقوم بحلهما آنيا ونحصل على النقطة M_o في الصورة $(0, x_1, x_2)$ أو بأي اختيار للمركبة x_1 أو x_2 أو x_3.

(٤.٢.٢) معادلات خط أقصر بعد بين مستقيمين :

لنعتبر المستقيمين L_α حيث

$$L_\alpha : \frac{x^i - x^i_\alpha}{\ell^i_\alpha} = \lambda \ , \alpha = 1, 2 ; \ \forall i$$

هي المعادلات القانونية للخطوط L_α (غير متقاطعان وغير متوازيان).

نفرض أن المستقيمان غير متوازيان أي أن

$$\ell_1 \times \ell_2 \neq \underline{0}, \ell_1 = (\ell^i_1), \ \ell_2 = (\ell^i_2)$$

وبالتالي يكون $\ell_1 \times \ell_2$ هو اتجاه العمودي على كل منهما. خط أقصر بعد بينهما هو ذلك المستقيم L العمودي على $L_\alpha , \forall \alpha$ فيكون اتجاه خط أقصر بعد هو اتجاه المتجه $\ell_1 \times \ell_2$.

ومعادلات خط أقصر بعد تتعين باعتباره خط تقاطع مستويين π_α حيث π_1 يحتوي على المستقيم L_1 والنقطة M_1 وخط أقصر بعد $\ell_1 \times \ell_2$, π_2 يحتوى على المستقيم L_2 والنقطة M_2 وخط أقصر بعد $\ell_1 \times \ell_2$ أي أن المستويين π_α هما:

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 : \left[\overline{M_1M}, \ell_1, \ell_1 \times \ell_2\right] = 0 \\ \pi_2 : \left[\overline{M_2M}, \ell_2, \ell_1 \times \ell_2\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

حيث $\overline{M_\alpha M} = (x^i - x^i_\alpha)$ متجه واقع في المستوى π_α .

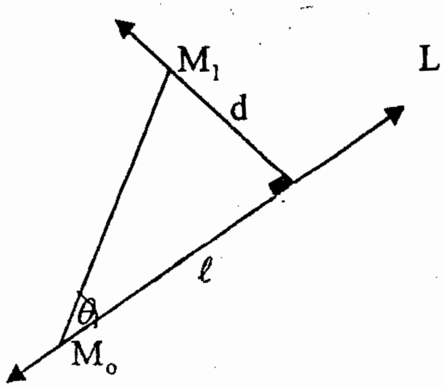
مثال (١٢): أكتب المعادلات (21) في شكل صريح بدلالة x^i ,x^i_α , ℓ^i_α .

الحل: بفك المحددات الممثلة لحاصل الضرب الثلاثي القياسي نحصل على المطلوب.

نعتبر في الفراغ E^3 النقطة $M_1 \equiv \left(x_1^i\right)$ والمستقيم $L : \dfrac{x - x_o^i}{\ell^i} = \lambda , \forall i$. بعد النقطة M_1 عن المستقيم L والذي نرمز له بالرمز d يمكن اعتباره ارتفاع متوازي الأضلاع الذي فيه المتجهين $\overline{M_o M_1} = \left(x_1^i - x_o^i\right)$, $\ell = \left(\ell^i\right)$ ضلعين متجاورين فيكون

$$d = \frac{\left|\overline{M_o M_1} \times \ell\right|}{|\ell|} = \left|\overline{M_o M_1}\right| \sin\theta$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1^1 - x_1^o & x_2^1 - x_2^o & x_3^1 - x_3^o \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{vmatrix} / |\ell| \qquad \textbf{(22)}$$



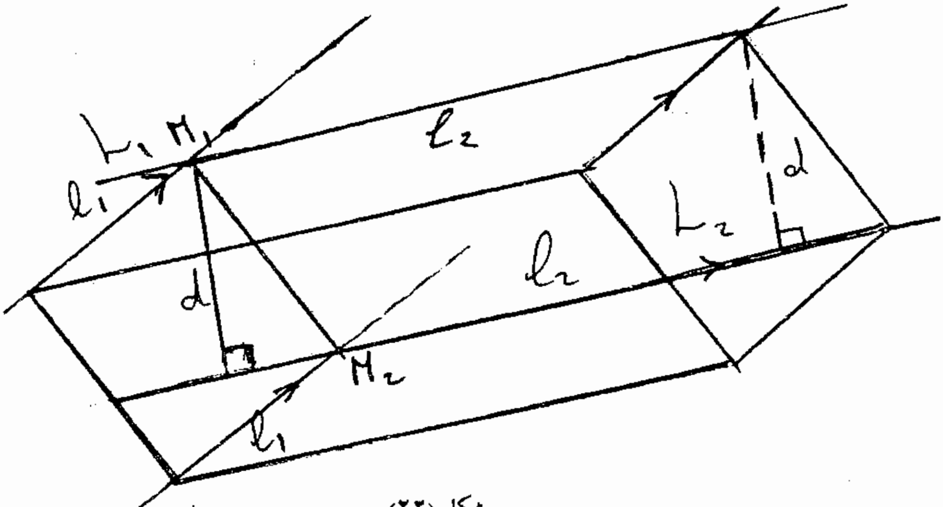
شكل (٢١)

العلاقة (22) تعطي بعد النقطة M_1 عن المستقيم L (شكل ٢١).

نعتبر الآن المستقيمين L_α الغير واقعين في مستوى واحد حيث

$$L_\alpha : \frac{x^i - x_\alpha^i}{\ell_\alpha^i} = \lambda \ , \alpha = 1, 2 \ \forall i$$

خط أقصر بعد هو خط مستقيم عمودي على كل من المتجهين $\ell_\alpha = \left(\ell_\alpha^i\right)$ وهما اتجاه المستقيمين L_α على الترتيب.



شكل (٢٢)

نعتبر المتجهات $\overline{M_1M_2} = \left(x_2^i - x_1^i\right), \ell_\alpha$ والتي تكون متوازي مستطيلات حجمه $V = \left|\overline{M_1M_2}, \ell_1, \ell_2\right|$ وقاعدته محددة بالمتجهين ℓ_1, ℓ_2 ومساحتها هي S تعطى من $S = \left|\ell_1 \times \ell_2\right|$ وبالتالي يكون طول أقصر بعد هو ارتفاع متوازي المستطيلات المنشأ على المتجهات $\overline{M_1M_2}, \ell_\alpha$ ويعطى من

$$d = \frac{V}{S} = \frac{\left|\overline{M_1M_2}, \ell_1, \ell_2\right|}{\left|\ell_1 \times \ell_2\right|} \tag{23}$$

أو

$$d = \overline{M_1M_2} \cdot \frac{e}{|e|}, \quad e = \ell_1 \times \ell_2$$

حيث e متجه في اتجاه العمودي على كل من المستقيمين L_α (شكل ٢٢).

<u>مثال (١٣):</u> عين مسقط النقطة $M_o = (1, 2, 5)$ على المستوى $\pi : 2x + y - z = 0$.

الحل : المعادلات البارامترية للعمودي على المستوى π والمار بالنقطة M_0 هي :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-1}=\lambda$$

مسقط النقطة M_0 على π هو موقع العمود الساقط من M_0 على π .

بالتعويض عن قيم x, y, z في معادلة المستوى π نجد أن $\lambda=\frac{1}{6}$ وتكون إحداثيات المسقط هي $x=1+\frac{1}{3}, y=2+\frac{1}{6}, z=5-\frac{1}{6}$

(إرشاد: لاحظ أن مسقط نقطة على المستوى هي نقطة واقعة على المستوى وعلى العمودي على المستوى المار بالنقطة المعطاة).

مثال(١٤): عين مسقط النقطة $M_0 \equiv (3,7,1)$ على المستقيم

$$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$$

الحل: نعين معادلة المستوى π الذي يمر بالنقطة M_0 وعمودي على المستقيم L وهي $\pi: x+y+2z-7=0$ ثم بحل معادلة المستوى مع معادلة المستقيم L نحصل على إحداثيات مسقط M_0 على L وهي $\left(\frac{10}{3},-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$.

(إرشاد: لاحظ أن مسقط M_0 على L هو تقاطع المستوى π مع المستقيم L).

مثال (١٥): عين مسقط المستقيم $L:\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$

على المستوى $\pi: x+2y+3z+4=0$

الحل: بما أ ن المسقط يقع في المستوى المعطى π فإن أحد معادلات المسقط هي المعادلة التي تصف المستوى π. والمعادلة الثانية نحصل عليها من مستوى الإسقاط وهو ذلك المستوى الذي يمر بالمستقيم L وعمودي على المستوى المسقط عليه أي المستوى الذي يحوي اتجاه L واتجاه العمودي على المستوى π. إذن المستوى المطلوب يعطى من:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$5x - 4y + z - 19 = 0$$

وتكون المعادلات المطلوبة هي

$$x + 2y + 3z + 4 = 0 \ , \ 5x - 4y + z - 14 = 0$$

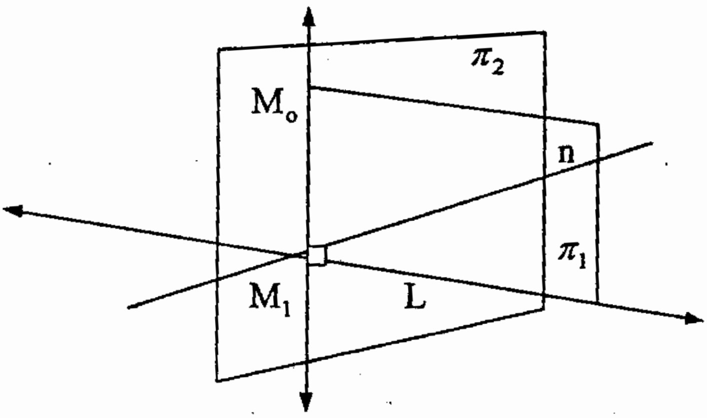
مثال (١٦): كون معادلة العمودي على المستقيم $L: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z+3}{1}$ من النقطة $M_o \equiv (3,2,1)$.

الحل: نعتبر معادلة المستوى المار بالنقطة M_o وعمودي على المستقيم وهي

$$\pi_1 : 2x + 4y + z - 15 = 0$$

نعتبر المستوى π_2 المار بالنقطة M_o ويحتوي على المستقيم L وهذا المستوى يحتوى على النقطتين M_o , $M_1 \equiv (0,0,-3) \in L$ وبالتالي يحتوي على الاتجاه $\overline{M_o M_1} \equiv (3,2,4)$ فتكون معادلته هي

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 14x - 5y - 8z - 24 = 0$$



شكل (٢٣)

المستويين π_2 ، π_1 يتقاطعان في مستقيم يمر بالنقطة M_o وعمودي على المستقيم L وبذلك تكون معادلاته هي معادلات المستويات π_2 ، π_1 معا.

(٥.٢.٢) تطبيقات على تحليل المتجهات: التطبيقات كثيرة ومتعددة ولنأخذ منها حلول المعادلات الاتجاهية Solutions of vector equations أي مجموعة النقاط الهندسية التي تحقق مجموعة المعادلات الاتجاهية وفي هذه الحالة يكون الحل نقطة أو مستقيم أو مستوى.

مثال (١٧): أوجد المتجه r الذي يحقق

$$r \times b = a \times b \qquad (1)$$

حيث a,b متجهان معلومان.

الحل: المعادلة (1) يمكن كتابتها في الصورة

$$(r - a) \times b = 0$$

أو ما يكافئ

$$r - a = t\,b, \; t \in R$$

أو

$$r = a + t\,b, \quad \forall t \in R \tag{2}$$

أي أن المعادلة (1) لها عدد لانهائي من الحلول والحل (2) يعطى الحل العام والمعادلة الاتجاهية (2) تمثل خط مستقيم في الفراغ.

مثال (١٨): أوجد المتجه r الذي يحقق $r \times b = a$ حيث b,a متجهان معروفان ويحققان أن a عمودي على b.

الحل: نعتبر المتجهات المستقلة خطيا $a, b, a \times b$ وتكتب r كتركيب خطي من هذه المتجهات على الصورة

$$r = x\,a + y\,b + z\;\; a \times b$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة واستخدام خواص الاستقلال الخطي نحصل على

$$x = 0, \;\; z = -\frac{1}{\langle b, b\rangle}$$

أي أن

$$r = y\;\, b - \frac{1}{\langle b, b\rangle}\; a \times b \tag{*}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة يمكن أن نرى أن (*) هو حل للمعادلة المعطاة لجميع قيم y. ولهذا تعتبر (*) حل عام للمعادلة المعطاة حيث y بارامتر.

هندسيا يمكن القول أن المعادلة (*) تمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $-\frac{1}{\langle b,b\rangle} a \times b$ ويوازي الاتجاه b.

مثال (١٩): أوجد حل لمجموعة المعادلات الاتجاهية

$$r \times b = c \times b \tag{1}$$

$$\langle r, a\rangle = 0 \qquad (2)$$

بشرط أن a ليست عمودي على b.

<u>الحل:</u> من المعادلة (1)

$$(r - c)\times b = 0$$

أو

$$r = c + t\,b\,, t \in R$$

وبالتعويض في (2) نحصل على

$$\langle c, a\rangle + t\langle b, a\rangle$$

$$t = -\frac{\langle c, a\rangle}{\langle b, a\rangle},\ \langle b, a\rangle \neq 0$$

إذن

$$r = c - \frac{\langle c, a\rangle}{\langle b, a\rangle} b$$

لاحظ أن المعادلة الثانية تعرف مستوى يمر بنقطة الأصل وعمودي على المتجه a. وبالتالي فإن حل المعادلات (1)، (2) يمثل نقطة تقاطع الخط المستقيم $r = c + t\,b$ مع المستوى $\langle r, b\rangle = 0$.

<u>مثال (٢٠):</u> أوجد المتجه r الذي يحقق

$$k\,r + r\times a = b\,, \qquad (*)$$

k عدد قياسي مختلف عن الصفر، b, a متجهات معلومة.

<u>الحل:</u> نكتب r كتركيب خطي من المتجهات المستقلة خطيا $a\times b, b, a$ على الصورة

$$r = x\,a + y\,b + z\,a\times b$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على (استخدام تعريف الاستقلال الخطي).

$$x = \frac{\langle a, b\rangle}{k\left(k^2 + a^2\right)},\ y = \frac{k}{k^2 + a^2},\ z = \frac{1}{k^2 + a^2}$$

حيث $a^2 = \langle a, a\rangle$ أي أن

$$r = \frac{1}{k^2 + a^2}\left\{\frac{\langle a, b\rangle}{k} a + k\,b + a \times b\right\}$$

وهذا هو الحل الوحيد الذي يحقق (*).

تمارين(٢)

١- كون معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$$2x + 3y - z + 2 = 0\ ,\ x + y - 5z - 1 = 0$$

ويمر بالنقطة $M_o = (3, 2, 1)$.

٢- عين معادلة المستوى العمودي على المستوى $2x - 5y + z - 3 = 0$ ويقطعه في مستقيم يقع في المستوى الإحداثي $y = 0$.

٣- عين معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين $x+2y-z-2=0$, $x+3y-2z-5=0$ ويوازي e_1 .

٤- كون معادلة المستوى الذي يمر بخط تقاطع المستويين $a_i^\alpha x^i + C_\alpha = 0$,$\alpha = 1,2$ وبنقطة الأصل.

٥- عين معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$$3x + y - 7z = 0,\ 2x - y - 12z - 3 = 0$$

والعمودي على المستوى $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

٦- عين معادلة مسقط المستقيم

$$3x - 2y - z + 4 = 0\ ,\ x - 4y - 3z - 2 = 0$$

على المستوى $5x + 2y + 2z - 7 = 0$

٧- عين معادلة المستوى المار بنقطة الأصل وعمودي على المستقيم

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+7}{4} = \frac{z+3}{1}$$

ثم عين الزاوية التي يصنعها هذا المستوى مع المستوى الإحداثي $z = 0$.

٨- عين معادلة المستوى المار بالنقطة $(0, 1, 1)$ وعمودي على المستويين

$$3x - y + 2z + 5 = 0\ ,\ x + 2y - z + 5 = 0$$

٩ــ عين طول أقصر بعد ومعادلات أقصر بعد بين المستقيمين

$$L_1: x=1+2\lambda \;, y=-1+3\lambda \,, z=5\lambda \;, \; \forall \lambda \in R$$

$$L_2: x=3\mu \,, y=3+4\mu \,, z=1+2\mu \,, \; \forall \mu \in R$$

١٠ــ أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي على المستقيمين المتوازيين

$$L_1: x=3+2\lambda \;, y=-4+\lambda \,, z=1+3\lambda \quad, \; \forall \lambda \in R$$

$$L_2: x=-1+2\mu \,, y=2+\mu \,, z=-3+3\mu \quad, \; \forall \mu \in R$$

وأوجد البعد العمودي بين المستويين.

١١ــ أثبت أن المستقيمين

$$L_1: x=4+\lambda \;, y=5+3\lambda \,, z=-6-4\lambda \quad, \; \forall \lambda \in R$$

$$L_2: x=3+\mu \,, y=-4-3\mu \,, z=5+3\mu \quad, \; \forall \mu \in R$$

يتقاطعان وأوجد أحداثيات نقطة التقاطع وطول العمود الساقط من النقطة (3 ,2- ,3) على المستوى الذي يحتوي على هذين المستقيمين.

١٢ــ عين البعد بين المستقيمين $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-1}{2} \;,\; \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$

(إرشاد: المستقيمان المتوازيان يكون البعد بينهما هو بعد أي نقطة عن الأخر).

١٣ــ أثبت أن المستقيم

$$6x+4y-5z=4 \,,\; x-5y+2z=12$$

والمستقيم $x=9+2\lambda \,, y=-4-\lambda \,, z=5+\lambda \,, \; \forall \lambda \in R$

يقعان في مستوى واحد وأوجد معادلته.

١٤ــ أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي على المستقيم

$$x+y+z=3 \,,\; 3x+5y+2z=5$$

ويوازي المستقيم $4x+y+z=0 \,,\; 2x-3y-5z=0$

١٥ــ أثبت أن المستقيمين

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{0},\ \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$$

متقاطعين وبين نقطة تقاطعهما.

(إرشاد: بالنسبة للمستقيمين غير متوازين نحسب طول أقصر بعد ثم نقوم بحل المعادلات معا).

١٦ــ عين أقصر بعد بين المستقيمين L_1, L_2 حيث

$$L_1: x+y-2z+3=0,\ 2x+y+2z=0$$
$$L_2: x-2y+z=0,\ 3x+y-z-2=0$$

١٧ــ أثبت أن المستقيمين

$$x=4+t,\ y=-8-2t,\ z=12t \quad ,\forall t\in R$$
$$x=3+2s,\ y=-1+s,\ z=-3-3s \quad ,\forall s\in R$$

غير متقاطعين وأوجد اقصر بعد بينهما.

١٨ــ أوجد أقصر مسافة بين الخطين

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4},\ \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$$

وأثبت أيضا أن الخطوط تقع في مستوى واحد.

١٩ــ أوجد معادلة المستوى الذي يحتوى الخط $x=2,\ y-z=0$ وعمودي على المستوى $x+z=3$. وأوجد النقطة التي يقابل فيها المستوى المستقيم $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

٢٠ـ أوجد حجم الهرم المكون من الأوجه (المستويات) الآتية:

$$m\,y+n\,z=0,\ n\,z+\ell\,x=0,\ \ell x+m\,y=0,\ \ell\,x+my+n\,z=P$$

٢١ـ أوجد حل للمعادلات الاتجاهية الآتية

$\langle r, n_1\rangle = 1,\ \ \langle r, n_2\rangle=1$ حيث n_1, n_2 متجهات معروفة.

٢٢ـ أوجد الشرط الذي يجعل المعادلات الآتية

$$r\times a=b\,,\ r\times c=d$$

متفقة Consistent أي لها حل r وأوجد الحل، حيث a, b, c, d متجهات معروفة.

٢٣ـ أوجد نقاط تقاطع المستويات الثلاث

(i) $x+y+z=0\,,\ 2\,x+2\,y-3\,z+3=0$
$2\,x-3\,y+2\,z=0$

(ii) $3\,x+2\,y-2\,z=0\,,\ x-y+2\,z-11=0$
$9\,x+y+2\,z-20=0$

٢٤ـ ارسم المستويات الآتية في الثمن الأول من الفراغ

(i) $x+2\,y+3\,z=6$, (ii) $y+3\,z=6$
(iii) $x=3$, (v) $x+2\,y=5$
(iv) $y=4$, (vii) $x+y-z=1$

٢٥ـ بين أن نقطة تقاطع المستوى $\pi: a\,x+b\,y+c\,z=d$ مع الخط المستقيم المار بنقطة الأصل وعمودي على المستوى π هي (a d, b d , c d).

٢٦ـ أوجد المحل الهندسي لجميع النقاط التي تقع على مسافات متساوية من المستويات

$$2\,x+2\,y-z-1=0\,,\ x-2\,y+2\,z+1=0$$