الباب الأول
المتجهات في الفراغ

(١.١) الفراغ الاقليدي E^3 Euclidean space :

دون الخوض في تفاصيل أنواع الفراغات والتي أمكن تصنيفها إلى نوعين رئيسين أقليدي وغير أقليدي وببساطة شديدة يمكننا تعريف الفراغ الاقليدي ذو الثلاث أبعاد والذي يرمز له بالرمز E^3 على أنه جميع النقاط الهندسية $\{P\}$ والتي تمثل من خلال مجموعة كل الثلاثيات $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ وباختصار $\left(x^i\right)$ وهذا يعطى من خلال راسم تناظر أحادي $R^3 = R \times R \times R \rightarrow E^3$

أي كل نقطة هندسية P يمكن تمثيلها كالآتي :

$$P \equiv \left(x^i\right), i = 1,2,3, \forall\, x^i \in R$$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

فئة النقاط $\left\{X \equiv \left(x^i\right)\right\}$ يعرف عليها دالة القياس لهذا الفراغ وهي

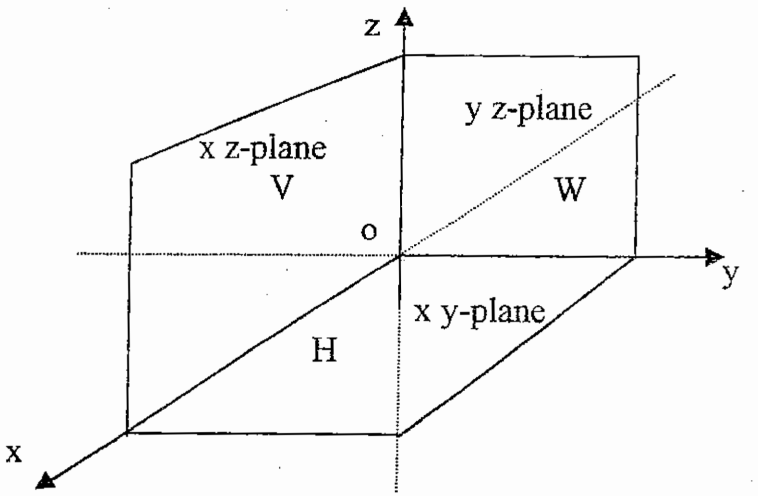
$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2$$

ومنها يعرف البعد بين نقطتين x,y كالآتي :ـــ

$$\langle x - y, x - y \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{3} \left(x^i - y^i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

ومن هذا العرض نكون قد عرفنا الفراغ الثلاثي الإقليدي بأسلوب بسيط والذي تتحقق فيه خاصية التوازي المعروفة، وبأسلوب أكثر دقة يعرف الفراغ الثلاثي الاقليدي على أنه فراغ اتجاهي معياري بعده 3 معرف على حقل الأعداد الحقيقية وله أساس معياري متعامد.

ويتبقى لدينا كيفية تمثيل ووصف هذا الفراغ من خلال الثلاثي(x^i)والذي فيه تسمى x^i بالإحداثيات الكرتيزية والتي يمكن وصفها في الفراغ على أنها الأبعاد العمودية عن ثلاث مستويات متعامدة مثنى مثنى، هذه المستويات تسمى بمستويات الإحداثيات Coordinate Planes والأبعاد الثلاثة العمودية تسمى بإحداثيات النقطة. المستويات الثلاث xy، xz، yz نرمز لها بالرموز H، V، W على الترتيب وتقسم الفراغ إلى ثمانية أجزاء منفصلة كل جزء يسمى octant ونوضح ذلك من خلال شكل (١) والجدول (١)

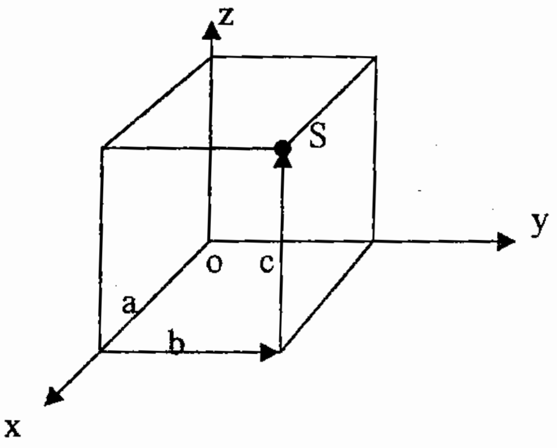


شكل (١)

Octant	Signs of Coordinates			Octant	Signs of Coordinates		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	−	+	+
II	+	−	+	VI	−	−	+
III	+	−	−	VII	−	−	−
IV	+	+	−	VIII	−	+	−

جدول (١)

وتتحدد النقطة $S(a, b, c)$ في الفراغ كما هو موضح بالرسم :



شكل (٢)

خطوط تقاطع المستويات الإحداثية تسمى بالمحاور الإحداثية والتي يرمز لها بـــالرمز x^i وإذا أخذنا متجهات الوحدة e_i في اتجاه المحاور x^i فإن أي نقطة P تمثل بالثلاثي (x^i) يكون متجه الموضع لها هـــو $\overline{oP}$ ويكتـــب علـــى الصـــورة (الوضـــع القياســـي :(Standard Position

$$\overline{oP} = \sum_{i=1}^{3} x^i \, e_i$$

حيث نقطة البداية نقطة الأصل initial point ونقطة النهاية terminal point P

ولنتفق من الآن فصاعدا أن الرموز ... ,i, j, k تأخذ القيـــم 1,2,3 ونتبـــع أسلوب أينشتين الأختزالي الجمعي ويتلخص الأسلوب :ـــ في أي صيغة مـــن الصيـــغ المشتملة على رموز ذات ترقيمات سفلية وأخرى علوية، إذا ظهر رمز وقيم متغـــيرة مرة بأعلى وأخرى بأسفل فإن هذا يعنى تلقائيا عملية جمع لهذه الصيغة في نطاق المـــدى المسموح به لهذا الرمز.

فمثلا : $a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$ ، وهكذا

ولأي متجه $A = \left(a^i\right)$ فإننا نعرف a^i على أنها مركبات المتجه A والزوايا بين المتجه $\overline{A}$ ومحاور الاحداثيات x^i تسمى بزوايا الاتجاه للمتجه $\overline{A}$ وجيوب التمام تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overline{A}$ ويرمز لها بالرمز α^i وعليه فإن الاتجاه L والذي يسمى جيوب تمام الاتجاه Direction Cosines هو

$$L = \cos\alpha^i \, e_i$$

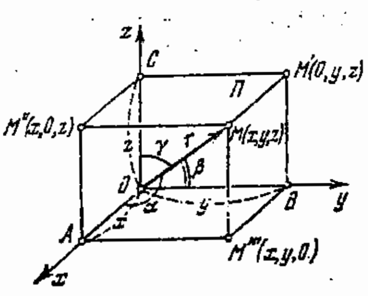
حيث $\cos\alpha^i = \dfrac{x^i}{|A|}$, $|A|$ طول المتجه $\overline{A}$, أي أن :

$$|A| = \left(\sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

<u>مثال (١):</u> أثبت أن $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \cos^2\alpha^i = 1$

<u>الحل:</u> $\overline{A} = |A|\vec{e}_A \, , \, e_A = \left(\cos\alpha^i\right) = \cos\alpha^i \, e_i$ نحصل على المطلوب.

وإذا كان $\overline{A}$ متجه وحدة فإن مركباته هي $\left|\cos\alpha^i\right|$ على امتداد محاور الإحداثيات ونوضح ذلك من خلال الشكل التالي:



شكل (٣)

ولتوضيح المسافة بين نقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقــــوم برسم مستويات توازي مستويات الإحداثيات وتمر خلال النقــاط M_1 , M_2 ونحدد النقاط $M_3=(x_2,y_2,z_1)$, $M_4(x_2,y_1,z_1)$.

النقاط M_1,M_2,M_3 تكون مثلث قائم الزاوية وكذلك النقــاط M_1,M_3,M_4 تكون مثلث قائم الزاوية.

وبتطبيق نظرية فيثاغورث Pythagorean theorem نجد أن :

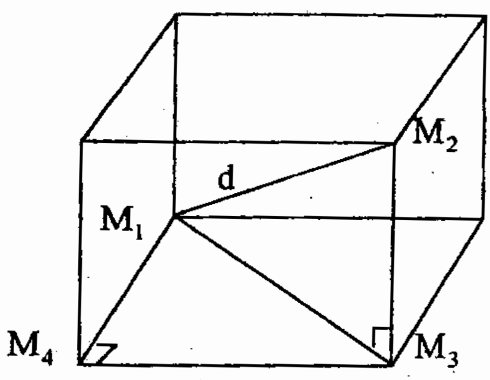
$$d(M_1,M_2)=\sqrt{d(M_1,M_3)^2+d(M_2,M_3)^2} \quad (1)$$

$$d(M_1,M_3)=\sqrt{d(M_1,M_4)^2+d(M_3,M_4)^2} \quad (2)$$

ومن شكل (٤)

$$d(M_2,M_3)=|z_2-z_1| \quad (3)$$

وبالتعويض من (2) ,(3) في (1) نحصل على الصيغة (*) التي تعطــي المســافة بــين نقطتين.



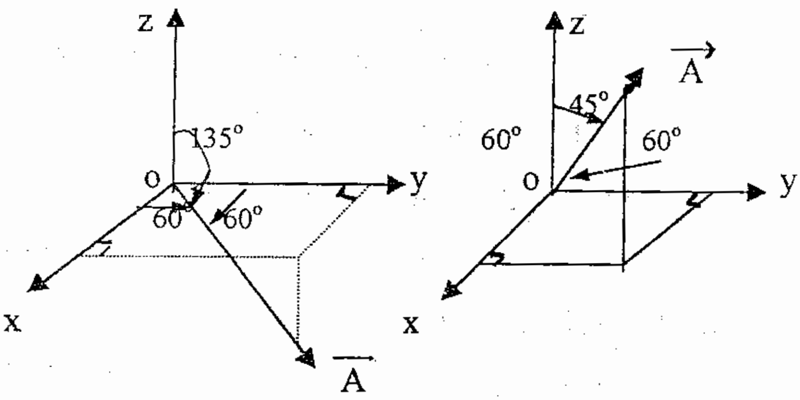
شكل (٤)

مثال (٢): المتجه $\overline{A}$ يصنع زاوية $60°$ مع محور x، محور y، ما هي الزاويــة الــتي يصنعها مع محور z؟

الحل: حيث أن $\cos\alpha^1 = \cos\alpha^2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\sum_i \cos^2\alpha^i = 1$ فإن $\cos^2\alpha^3 = \frac{1}{2}$ فإن $\cos\alpha^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن $\alpha = \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$ كما هو موضح بالرسم.



شكل (٥)

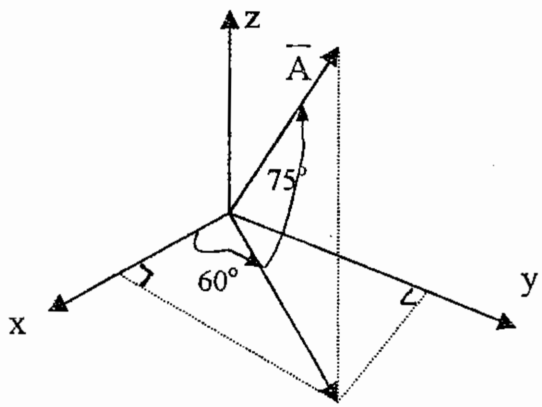
مثال (٣): إذا كانت α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات، ماذا عن $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$؟

الحل: استخدم العلاقة بين جيب وجيب تمام الزاوية ومتممتها.

مثال (٤): هل جيوب تمام الاتجاه وحيده؟

مثال (٥): ماذا نفهم إذا قلنا أن الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات متساوية؟ موضحا ذلك بالرسم.

مثال (٦): أوجد جيوب تمام الاتجاه للمتجه المبين بالشكل



شكل (٦)

(٢.١) تحليل المتجهات:

لتسهيل أسلوب الدراسة داخل هذا الفراغ نقوم بعرض نظرية تحليل المتجهات أي العمليات الجبرية والمعاني الهندسية التي تربط المتجهات.

تعريف (١): يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين $\overline{A}=(a^i), \overline{B}=(b^i)$ والذي يرمز له بالرمز $\langle A, B\rangle$ كالآتي

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{3} a^i\, b^i \qquad (*)$$

تعريف (٢): يقال لمتجهين $\overline{A}, \overline{B}$ متسامتين إذا كان $\overline{B}=\lambda\ \overline{A}\ , \overline{A}\neq 0$ منطبقين أو متوازيين.

خصائص حاصل الضرب القياسي:

(١) خاصية التعامد $\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\rangle = 0 \text{ if } \overrightarrow{A}=0 \text{ or } \overrightarrow{B}=0 \text{ or } \overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$

(٢) خاصية التماثل: $\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\rangle = \langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{A}\rangle$

(٣) خاصية التوزيع $\langle\vec{A},\vec{B}+\vec{C}\rangle=\langle\vec{A},\vec{B}\rangle+\langle\vec{A},\vec{C}\rangle$

(٤) خاصية الضرب في عدد قياسي $\langle\alpha\vec{A},\vec{B}\rangle=\langle\vec{A},\alpha\vec{B}\rangle=\alpha\langle\vec{A},\vec{B}\rangle$

مثال (٧): أثبت أن $\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$ حيث δ_{ij} تسمى كرونكر دلتا وتعرف كالآتي

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \forall\ i=j\\ 0, & \forall\ i\neq j\end{cases}$$

الحل: المتجهات e_i عبارية متعامدة ومنها نحصل على المطلوب.

تعريف (٣): تعرف الزاوية بين متجهين على أنها الزاوية ϕ بين المتجهين A, B والتي تعطى عن طريق جيوب تمام الاتجاه α^i, β^i للمتجهين A, B على الترتيب بالعلاقة

$$\cos\phi=\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha^i\cos\beta^i$$

مثال (٨): أثبت أن

$$\cos\phi=\frac{\langle A,B\rangle}{\langle A,A\rangle^{\frac{1}{2}}\langle B,B\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

الحل: بقسمة طرفي العلاقة (*) على $|A|,|B|$ واستخدام تعريف جيوب تمام الاتجاه نحصل على المطلوب.

من الآن نتفق على أن نكتب رمز المتجه بالرمز A بدلا من $\vec{A}$.

ملحوظة : $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle>0$ ، θ زاوية حادة. $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle<0$ ، θ زاوية منفرجة.

تطبيقات حاصل الضرب القياسي :

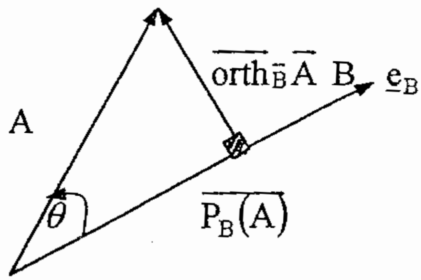
(١) المساقط :

ونعطي الآن تطبيق على حاصل الضرب القياسي:ـــ

(١) إيجاد طول مسقط متجه A على اتجاه معلوم B ويرمز له بالرمز $P_B(A)$ ويعطى من

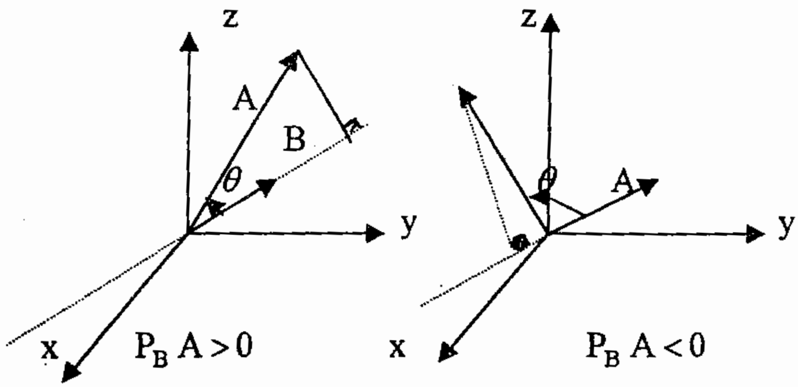
$$P_B(A)=\frac{\langle A,B\rangle}{|B|}=\underline{e}_B\ .A \qquad (1)$$

والمعنى الهندسي للمقدار $P_B(A)$ هو مركبة A التي توازي B كما هــو واضــح في شكل (٧)



شكل (٧)

لاحظ أن طول المسقط يكون موجب أو سالب على حسب الزاويــة θ حــادة أو منفرجة على الترتيب. ونوضح ذلك بالرسم كما في شكل (٨)



شكل (٨)

وكذلك طول مسقط B على A ويعطى من

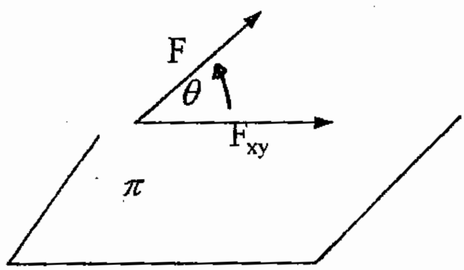
$$P_A(B)=\frac{\langle A,B\rangle}{|A|}=\underline{e}_A\ .\bar{B}\ ,\underline{e}_A=\frac{A}{|A|} \qquad (2)$$

من (2) ,(1) يكون لدينا العلاقة

$$\frac{P_B(A)}{P_A(B)}=\frac{|A|}{|B|}$$

<u>مثال (٩)</u>:(أ) أوجد طول مسقط $v=(1,3,5)$ على المتجه الذي يوازي $(1,-2,2)\equiv u$.

(ب) مسقط متجه على مستوى π هو البعد بين مسقط بدايته ومسقط نهايته وهو كمية اتجاهية. ومقياس مسقط المتجه $\bar{F}$ على المستوى xy يساوي $|\bar{F}|\cos\theta=|F_{xy}|$ حيث θ هي الزاوية بين $\bar{F}$ والمستوى xy.



شكل (٨)

<u>مثال (١٠) :</u>

في الفراغ الثلاثي E^3 إذا كان لدينا أساس معياري متعامد $\{e_i\}$ $\left(\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}\right)$ وارتبط بالثلاثي $\{u_i\}$ بالعلاقة $u_i=a_i^j\, e_j$ فإن الشرط الضروري والكافي كي تكون المجموعة $\{u_i\}$ أساس معياري متعامد للفراغ هو أن مصفوفة التحويل $\left(a_j^i\right)$ تكون عمودية، وعلى الطالب إثبات ذلك كتمرين؟

مثال (١١): عين الزاوية $\theta = B\hat{A}C$ حيث

$$A \equiv (1,1,1),\ B \equiv (2,2,1), C \equiv (2,1,2)$$

الحل: $\overline{AC} = \overline{oA} - \overline{oC}\ , \overline{AB} = \overline{oB} - \overline{oA},\ \cos\theta = \dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{|\overline{AB}|\,.\,|\overline{AC}|}$

ملاحظة: مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$ هو متجه $\overline{P_B}(A)$ ويعطى من

$$\overline{P_B A} = P_B(A)\vec{u} = \langle A, \vec{u}\rangle \vec{u}$$

حيث u وحدة المتجهات في إتجاة $\vec{B}$.

ومن شكل (٧) يتضح أن المتجه $\vec{A}$ مجموع جزئين، جزء في اتجاهB (مسقط A على B) وجزء في اتجاه عمودي على B ونرمز له بالرمز $\overline{orth_B A}$ أي أن

$$\vec{A} = \overline{Pr_{\vec{B}}\ \vec{A}} + \overline{orth_B A}$$

مثال (١٢): أوجد $\overline{orth_B A}\,, \overline{Pr_B A}$ إذا كان A=(2,3,-1), B=(8, -4,1)

الحل: $\overline{Pr_B A} = \langle A, u\rangle \vec{u}$ حيث $u = \dfrac{\vec{B}}{\langle B, B\rangle^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{-4}{9}, \dfrac{1}{9}\right)$

إذن $\overline{Pr_B A} = \left(\dfrac{8}{27}, \dfrac{-4}{27}, \dfrac{1}{27}\right)$

وكذلك $\overline{orth_B A} = \vec{A} - \overline{Pr_B\ A} = \left(\dfrac{46}{27}, \dfrac{85}{27}, \dfrac{-28}{27}\right)$

ويمكن أن تتأكد من أن $\langle \overline{Pr_B A}\,, \overline{orth_B\ A}\rangle = 0$

(٢) الإحصاء :

حساب معامل الارتباط بين الأطوال والأوزان لعدد n شخص فمثلا نفـــرض أن وزن الشخص رقم i هو w_i وطوله h_i والمتوسطات هي h, w على الترتيب.

نعتبر المتجهات $H=\left(h_i - h\right), W=\left(w_i - w\right)$

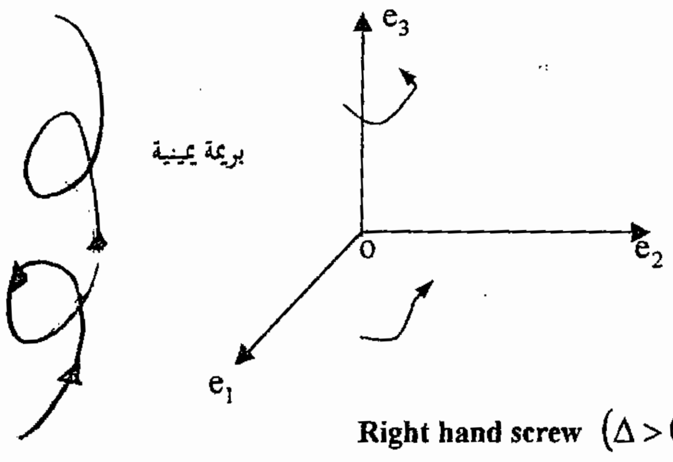
إذن معامل الارتباط بين الارتفاعات والأوزان يعطى من

$$\frac{\langle H, W\rangle}{\langle H, H\rangle^{\frac{1}{2}}\langle W, W\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

ويعرف على أنه جيب تمام الزاوية بين المتجهين W, H في فراغ بعده n ومن هذا يتضح معنى أن معامل الارتباط أقل من أو يساوي الواحد حيث أن مقياس جيب تمام الزاوية دائما أقل من أو يساوي الواحد.

<u>تعريف (٤):</u>

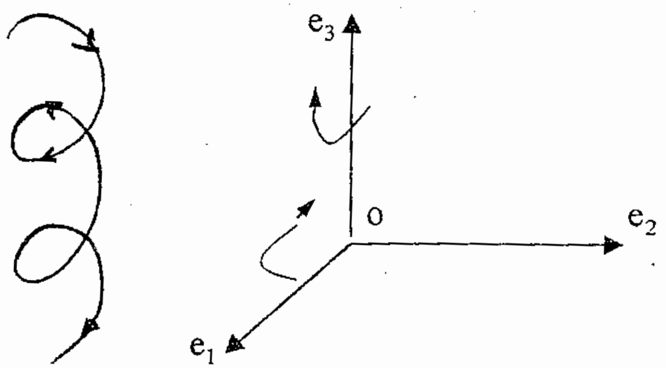
الأساسان $\{u_i\}, \{e_i\}$ يكون لهما نفس الوضع في الفراغ إذا تحقق $\Delta = \operatorname{Det}\left(a_j^i\right) > 0$ ويكونا منعكسان في الفراغ إذا كان $\Delta = \operatorname{Det}\left(a_j^i\right) < 0$. وفي الحالة التي يكون فيها $\Delta > 0$ نسمى الثلاثي المتعامد بالثلاثي اليميني حيث $u_i = a_i^j e_j$



Right hand screw $(\Delta > 0)$

شكل (٩)

بالطبع إذا كان الدوران بين e_1 ، e_2 يجعلنا نسير في اتجاه عكس الاتجاه e_3 فإن الثلاثي يكون في هذه الحالة بريمة يسارية والثلاثي يسمى ثلاثي يساري.



بريمة يسارية

left hand screw $(\Delta < 0)$

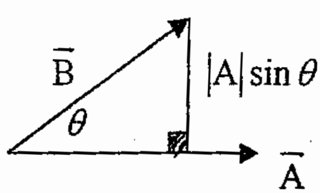
شكل (١٠)

وسنتفق طوال الدراسة على أن الأساس المختار هو الأساس المعياري المتعامد ويكـــون بريمة يمينية ونكتفي بكلمة ثلاثي لنعنى أساس معياري orhtonormal basis.

<u>تعريف (٥):</u>

يعرف حاصل الضرب الأتجاهي Vector product أو Cross product لمتجهين A، B والذي يرمز له بالرمز $A \times B$ ، على أنه

$$A \times B = \langle A, A\rangle^{\frac{1}{2}} \langle B, B\rangle^{\frac{1}{2}} \sin\theta\, \bar{n}$$



شكل (١١)

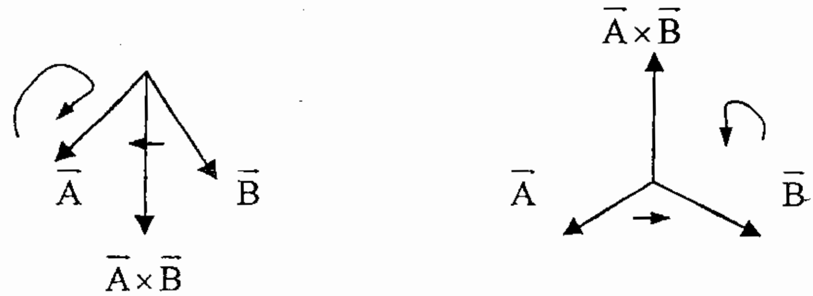
حيث θ هي الزاوية بين المتجهين A , B ، $\bar{n}$ متجه الوحدة في الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين A, B ويكون طول المتجه هو

$$\langle A\times B , A\times B \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle A, A\rangle^{\frac{1}{2}} \langle B, B\rangle^{\frac{1}{2}} \sin\theta$$
$$= |A||B|\sin\theta$$

والذي نرمز له بالرمز $|A\times B|$ ولهذا الطول معنى هندسي وهو أنه مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين المتجاورين A,B أي أن A,B متجهين (ضلعين) متجاورين فيه ومنه نصل إلى الخاصية التي تنص على أن المساحة كمية اتجاهية.

والضرب الاتجاهي يحقق الخواص الآتية :ـــ

$$e_i \times e_j = e_k \quad , \quad i<j \quad ، \quad e_i \times e_i = 0 \quad , \quad \forall\ i$$



شكل (١٢)

وإذا استخدمنا مجموعة التباديل على المجموعة $(1, 2, 3)$ فإن $e_i \times e_j = \varepsilon\ e_k$ حيث ε تساوي 1 أو -1 طبقا للآتي (i, j, k) تبديل زوجي أو فردي من المجموعة $(1,\ 2,\ 3)$ على الترتيب وهذا يمكن الحصول عليه بسهولة بالتحقق أولا من الخصائص الآتية:ـــ

$$A\times B = -B\times A \quad , \quad A\times A = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

أي أن خاصية الإبدال غير محققة

$$A \times B = 0 \text{ if } A = 0 \text{ or } B = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

أو المتجه A يوازي المتجه B ويحاول الطالب إعطاء تفسير لذلك باستخدام تعريف التوازي؟

خاصية الدمج القياسية (Scalar associative property) :

$$(\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha (A \times B) \qquad \textbf{(3)}$$

حيث α عدد قياسي.

خاصية التوزيع (Distributive property):

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \qquad \textbf{(4)}$$

مثال (١٣): إذا كان $A = a^i e_i$, $B = b^i e_i$ أثبت أن

$$A \times B = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix}$$

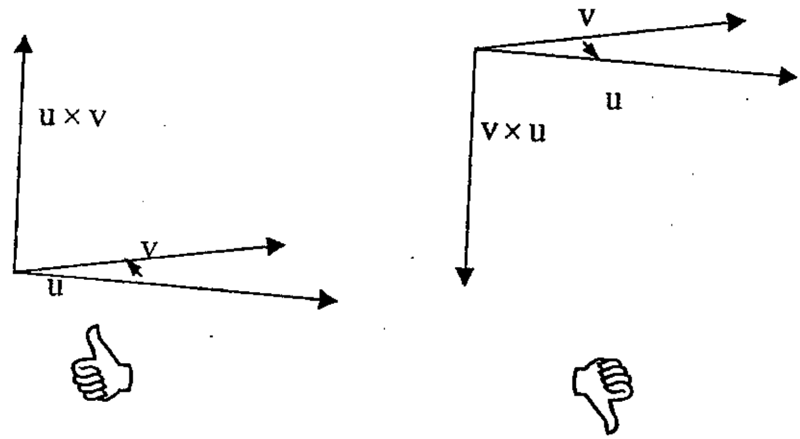
الحل: استخدم خواص الإبدال والتوزيع نحصل على :

$$A \times B = a^i e_i \times b^j e_j = \sum_{i,j}^{3} \left(a^i b^j - a^j b^i\right) e_i \times e_j$$

$$= \sum_{\substack{j,i,k \neq i \\ k \neq j}} \left(\left(a^i b^j - a^j b^i\right) e_k\right)$$

وخواص فك المحدد نحصل على المطلوب.

شكل (١٢) يحدد إشارة حاصل الضرب الاتجاهي ويمكن توضيحه عن طريق قاعدة اليد اليمنى كما في شكل (١٣).



$$u \times v = -v \times u$$

شكل (١٣)

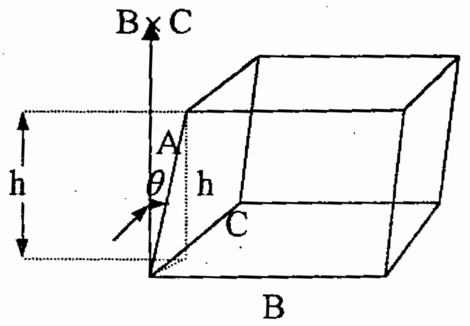
مثال (١٤): إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين u,v غير متعامدين، أثبت أن

$$\tan\theta = \frac{|u \times v|}{\langle u, v\rangle}$$

الحل: من تعريف حاصل الضرب القياسي والاتجاهي ينتج المطلوب.

تعريف (٦)

يعرف حاصل الضرب الثلاثي القياسي Triple Scalar product للمتجهات A, B, C على أنه حاصل الضرب القياسي للمتجهين $A \times B$, C . أي أنه $(A \times B).C$ والقيمة المطلقة له (القيمة الموجبة) تساوي حجم متوازي السطوح المكون بهذه المتجهات الثلاث على أنها ثلاثة أضلاع متجاورة. وعلى الطالب أن يرى ذلك بنفسه ؟ (تمرين للطالب) كما هو واضح من الرسم حيث :—



شكل (١٤)

الارتفاع هو $h = |A| \cos\theta$، مساحة القاعدة هي $|B \times C|$ و θ هي الزاوية بـــين المتجه A والعمودي على القاعدة.

وحاصل الضرب الثلاثي القياسي له الخصائص الآتية:ـــ

(١) $(A \times B).C = 0$ أي أن حجم متوازي السطوح يساوي صفر إذا كان أحد هذه الحالات محقق :ـــ

(i) أحد المتجهات الثلاث متجه صفري.

(ii) متجهين من الثلاثة متوازيين.

(iii) المتجهـــات الثـــلاث تقـــع في مســـتوى واحد (توازي مستوى واحد)، متروك للطالب كتمرين.

(٢) $(A \times B).C = A.(B \times C)$

(٣) $(A \times B).C = B.(C \times A) = C.(A \times B)$

ولإثبات (١)، (٢)، (٣) نستخدم خصائص المحددات.

مثال (١٥): إذا كان لدينا ثلاث متجهات $A_i = \left(a_i^j\right)$ فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو $A_1.\left(A_2 \times A_3\right)$ ويعطى من $\operatorname{Det}\left(a_i^j\right)$ والذي يكتب أحيانا بالشكل $\left[A_1, A_2, A_3\right]$ ويعطى من العلاقة $\left[A_1, A_2, A_3\right] = \operatorname{Det}\left(a_j^i\right)$ وهو محدد المصفوفة $\left(a_j^i\right)$ وعلى الطالب أن يتحقق من ذلك بنفسه (تمرين متروك للطالب)؟

مثال (١٦): $[A, B, C] > 0$ أو $[A, B, C] < 0$ إذا كان $C , A \times B$ متجهات في اتجاه واحد أو ناحيتين مختلفتين على الترتيب.

الحل: يمكن التأكد منها باستخدام العمليات الأولية المسموح بها على صفوف المصفوفات وكذلك خصائص المحددات.

ومن الخصائص السابقة نكون قد برهنا النظرية الآتية:ـ

نظرية: الشرط الضروري والكافي كي توازي المتجهات A_i مستو واحد هو أن يتحقق $\left[A_1, A_2, A_3\right] = 0$

مثال (١٧): أوجد حجم الهرم الذي يتكون من المتجهات A_i.

تعريف (٧):

المتجهات في النظرية السابقة يقال أنها مرتبطة خطيا أما إذا كان $\left[A_1, A_2, A_3\right] \neq 0$ سميت المتجهات الثلاث مستقلة خطيا.

من هذا التعريف يكون لزاما علينا أن نعطى تعريف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة من المتجهات في الفراغ الاقليدي E^n . إذا كان لدينا m من المتجهات A_α ، $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ في الفراغ E^n فيقال أنها مرتبطة خطيا Linearly dependent إذا وجد m من الأعداد k^α ليست جميعها أصفارا بحيث $k^\alpha A_\alpha = \underline{0}$ وإذا كانت $k^\alpha = 0 , \forall \alpha$ فيقال أن المتجهات A_α مستقلة خطيا

Linearly independent وإذا كان أحــد المتجهات A_α متجــه صفــري فــإن المتجهات $A_\alpha, \forall \alpha$ تكون مرتبطة خطيا.

وهنا نعطي خواص الارتباط والاستقلال الخطي من خلال حاصل الضــرب الثلاثــي القياسي كالآتي :ــ

١ــ المتجهين A_1 , A_2 مرتبطين خطيا إذا وإذا فقط $A_1 \times A_2 = 0$ والمتجــهين في هذه الحالة يقعان على مستقيم واحد أو متوازيين (البرهان متروك للقارئ).

٢ــ المتجهــات A_1, A_2, A_3 تكــون مرتبطــة خطيــا إذا وإذا كـــان فقــط $[A_1, A_2, A_3] = 0$ والمتجهات في هذه الحالة تقع في مستو واحــد أو بصــورة أخرى يمكن التعبير عن أحدهما كتركيبة خطية من الأثنين الآخرين على الصـــورة $A_3 = k^1 A_1 + k^2 A_2$ حيث k^1, k^2 أعداد قياسية (البرهان متروك للقارئ).

٣ــ في الفراغ E^3 أي أربعة متجهات تكون مرتبطة خطيا.

<u>تعريف (٨):</u>

حاصل الضــرب الثلاثــي الاتجــاهي لثــلاث متجــهات A_i يرمــز لــه بــالرمز $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ وهو عبارة عن متجه عمودي على المستوى الذي يشمل المتجهين $A_2 \times A_3 , A_1$ ويحقق المتطابقة الاتجاهية

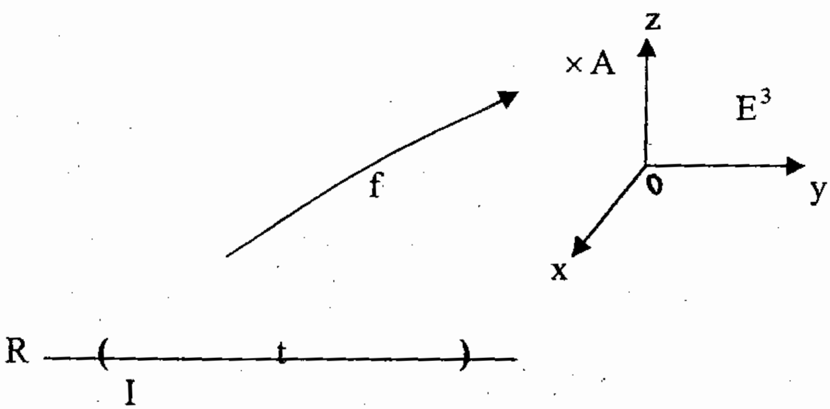
$$A_1 \times (A_2 \times A_3) = \langle A_1 . A_3 \rangle A_2 - \langle A_1 . A_2 \rangle A_3$$

وهذه المتطابقة لها تطبيقات كثيرة في علم البلورات في الفيزياء.

(١.٣) الدالة الاتجاهية في متغير واحد: كما تعودنا سابقا بمعرفتنا للكميــات الثابتة (الأعداد الحقيقية مثلا) أمكن تعريف الكميات المتغيرة ومنها الدوال في متغير أو أكثر. يمكننا بأسلوب مشابه جعل مركبات المتجه دوال وليست كميات ثابتة أي أنــه في هذه الحالة طول المتجه دالة قياسية وليست كمية ثابتة، في هذه الحالة يسمى المتجــه

بالدالة الاتجاهية وهذا التعريف ليس دقيق في نصه ولكننا يمكن إعطاء تعريف رياضي دقيق كالآتي :

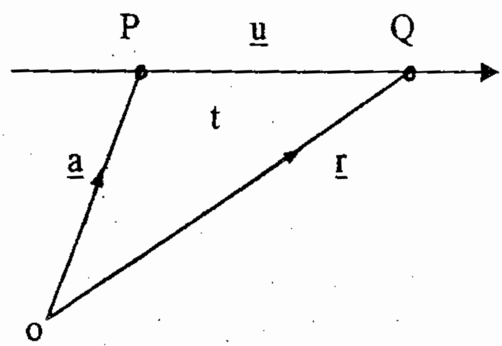
الدالة الاتجاهية هي راسم من الأعداد الحقيقية R أو جزء منها I (فترة مفتوحة أو مغلقة مثلا) إلى الفراغ الأقليدي E^3 بحيث أنه لكل $t \in I$ توجد نقطة A في E^3 .



شكل (١٤)

$$f = f(t) = \overline{A} = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

مثال (١٨) : إذا كانت الدوال $f_i(t)$ دوال خطية في t فإن الدالة الاتجاهية في هذه الحالة تحدد مستقيم في الفراغ $\underline{r} = t\,\underline{u} + \underline{a}$.



شكل (١٥)

حيث t بارامتر، $\underline{a}=(a_i), \underline{u}=(u_i)$ وتصبح $\underline{r}$ على الصورة

$$\underline{r}=\underline{r}(t)=(t\,u_1+a_1, t\,u_2+a_2, t\,u_3+a_3)$$

و t عدد حقيقي (بارامتر).

وإذا كان $\{e_i\}$ هو أساس الفــــراغ فــإن $\underline{f}(t)$ يمكــن كتابتــها علــى الصــورة $\underline{f}(t)=f^i(t)e_i$ وفي هذه الحالة الدالة الاتجاهيه ترسم منحنى في الفــــراغ معادلاتــه البارامترية هي $f^i=f^i(t)$ وببساطة شديدة يمكننا تعريف اتصال الدالـــة الأتجاهيــة فيقال أن الدالة الاتجاهية متصلة إذا كانت كل مركبة $f^i(t)$ متصلـــة في t . ويقـــال أن $\underline{f}=\underline{f}(t)$ تفاضلية إذا كانت كل مركبة $f^i(t)$ تفاضلية ودون الخوض في تفاصيل التعريف الدقيق لتفاضل الدالة الاتجاهية فنكتفي بهذه المعاني بالنسبة للتفاضل تعــــرف $\underline{f}'(t)$ بالمشتقة التفاضلية الأولى للدالة الاتجاهية وتعطى من

$$\underline{f}'(t)=\frac{df}{dt}=\left(\frac{df^i(t)}{dt}\right)=\left(\frac{df^1}{dt},\frac{df^2}{dt},\frac{df^3}{dt}\right)$$

$$=\left(f^{i\prime}(t)\right),\quad '=\frac{d}{dt}$$

والمعنى الهندسي للمشتقة الأولى هو اتجاه المماس للمنحنى عند نقطة ما. وهذا الموضوع يكمل دراسته في السنوات القادمة.

يمكن أن يعبر عن المنحنى كتقاطع سطحين فمثلا تقاطع مستويين هو خط مستقيم وهو حالة خاصة من منحنى الفراغ.

نعتبر المنحنى الناتج عن تقاطع سطحين σ_α وبذلك تكون معـــادلات المنحـــنى هـــي $\sigma_\alpha \equiv F_\alpha(x^i)=0, \alpha=1,2$، بحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى x^1, x^2 مثلا نحصــل على $x^1=\phi^1(x^3)\ , x^2=\phi^2(x^3)$ وهي تمثل أيضا المعادلات البارامترية للمنحنى في المستوى.

حيث x^3 هي البارامتر وله المعادلة الاتجاهيــة $\underline{r}=\left(\phi^1\left(x^3\right),\phi^2\left(x^3\right)\right)$ وهي تمثـــل معادلـــة منحنى واقـــع في مستـــوى يوازي المستوى الأحداثي $x^1\,x^2$. وبفـرض أن $x^3=t$ نحصل على

$$\underline{r}=\left(\phi^1(t),\phi^2(t),t\right)$$

وهي تمثل منحنى فراغ له البارامتر t حيث $t\in R$.

مثال (١٩): الدالة الإتجاهية $X(t)=\left(t,t^2,0\right)$ تمثل جزء القطع المكـــافئ $x_2=x_1^2$ في المستوى $x_1\,x_2$.

مثال (٢٠): أوجد التمثيل البارمتري للمنحنى $x_2^2=x_1\,,\,x_3^2=1-x_1$

الحل: بالجمع نحصل على $x_2^2+x_3^2=1$ وهي معادلة دائـــرة في المســـتوى $x_2\,x_3$ ومعادلاتها البارامترية $x_2=\sin t\,,\,x_3=\cos t$ وبالتعويض في المعادلات المعطـــــاة $x_1=\sin^2 t$ ويكون التمثيل البارامتري (المعادلة الاتجاهية) هي

$$x(t)=\left(\sin^2 t\,,\sin t\,,\cos t\right),\ 0\le t<2\pi$$

تمارين (١)

١- أثبت أن المتجهات $\{u_i\}$ تكون أساس معياري متعامد ثم أوجد $\{e_i\}$ بدلالة $\{u_i\}$ حيث

$$u_1 = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3), u_2 = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3), u_3 = \frac{1}{3}(2e_1 + e_2 - 2e_3)$$

(ارشاد: استخدم معكوس مصفوفة التحويل)

٢- أوجد اتجاه المتجه u الذي يصنع زوايا حادة متساوية القياس مع محاور الإحداثيات.

٣- إذا كانت $\{u_i\}$ أساس للفراغ E^3 وكان $v_i = \dfrac{u_j \times u_k}{[u_1, u_2, u_3]}$ حيث (i,j,k) تبديلة زوجية من الأعداد (1, 2,3) , i, j, k مختلفة فبرهن على أن الثلاثيان $\{u_i\}, \{v_i\}$ يحققان العلاقة: $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

٤- إذا كان u, v متجهات وحدة فاثبت أن $|u - v| = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$ حيث θ الزاوية بينهما.

٥- أثبت أنه إذا كان المتجهات $\bar{a}, \bar{b}$ غير متسامتين وغير صفريين فإن $x\bar{a} + y\bar{b} = 0$ لا يمكن أن تتحقق إلا عندما $x = 0, y = 0$.

٦- أثبت أنه إذا كانت $x_1 a + y_1 b = x_2 u + y_2 b$ حيث a, b غير متسامتين وغير صفرين فإن $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

٧ـ أعط معاني هندسية للكميات α^{i} , β^{i} في الحالات الآتية:ـ

(i) A, B متجهان متوازيان، (ii) A, B متجهان متعامدان.

حيث α^{i} , β^{i} هي الزوايا التي يصنعها المتجهان A,B على الترتيب مع محاور الإحداثيات.

٨ـ عين زوايا المثلث الذي ضلعان من أضلاعه هما $\overline{A}=(3,6,-2), \overline{B}=(2,3,-6)$ وأثبت أن

$$|A\times B|^{2}+\langle A,B\rangle^{2}=|A|^{2}|B|^{2} \qquad (*)$$

ولأي متجهين $\overline{A}$, $\overline{B}$ يمكن إثبات العلاقة (*) والتي تسمى متطابقة لاجرانج.

٩ـ أوجد حجم الهرم الثلاثي الذي رؤوسه هي

$$A\equiv(2,2,2), B\equiv(4,3,4), D\equiv(5,5,6)$$

١٠ـ أثبت أن متوازي الأضلاع الذي أقطاره هي المتجهات $A_{1}=(3,-4,-1), A_{2}=(2,3,-6)$ هو معين وأوجد أطوال أضلاعه وزواياه.

١١ـ بين أنه إذا كان $A\neq \underline{0}$ وكل من الشرطين $\langle A,B\rangle=\langle A,C\rangle$ and $A\times B=A\times C$ يتحققان معا فإن $B=C$ ولكن إذا تحقق شرط واحد فقط فإن $B\neq C$ بالضرورة.

١٢ـ برهن على أن الشرط الضروري والكافي كي يتحقق $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ هو أن $(A\times C)\times B=\underline{0}$.ناقش الحالات التي فيها $A\,.\,B=0$ أو $B\,.\,C=0$.

١٣ـ عين قيم λ التي عندها تكون المتجهات $B = (1, 2, -3)$, $A = (3, \lambda, 5)$
$C = (2, -1, 1)$ واقعة في مستوى واحد.

١٤ـ بين أن $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$

١٥ـ لأي ثلاث متجهات A_1, A_2, A_3, A_4 بين أن

$$\langle A_1 \times A_2, A_3 \times A_4 \rangle = \langle A_1, A_3 \rangle \langle A_2, A_4 \rangle - \langle A_1, A_4 \rangle \langle A_2, A_3 \rangle$$

١٦ـ إذا كانت $\underline{u} \times \frac{du}{dt} = \underline{0}$ فإن المتجـــه $\underline{a} = \underline{u}(t)$ ثابت الاتجاه والعكس صحيح
$\left(\underline{u} = \alpha(t)\underline{A}\right)$ حيث $\underline{A}$ متجه ثابت.

١٧ـ إذا كانت $\underline{r} = 4a\left(\sin^2 t\, e_1 + \cos^2 t\, e_2\right) + 3b \cos 2t\, e_3$
فأوجد $\frac{d\underline{r}}{dt}, \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}, \left[\frac{d\underline{r}}{dt}, \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}, \frac{d^3\underline{r}}{dt^3}\right]$ حيث a, b ثوابت، t بارامتر.

١٨ـ أوجد الزاويـــة بين المنحنيـــين $x_3^2 = 2 - x_1$, $x_2^2 = x_1$, $x(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$
عند النقطة $(1, 1, 1)$.