الباب التاسع

سطح الكرة The sphere

(١.٩) مقدمة:

يعرف سطح الكرة على أنه المحل الهندسي لنقطة $R=(x_i)\in E^3$ تتحرك في الفراغ بحيث تكون دائماً على بعد ثابت r من نقطة ثابتة $R_o=(x_i^o)$ (المركز)، r تسمى نصف القطر، من هذا التعريف يمكن كتابة معادلة الكرة في الصورة:

$$S\equiv\langle R-R_o,R-R_o\rangle=r^2$$

أو

$$R^2-2\langle R,R_o\rangle+R_o^2-r^2=0$$

أو

$$R^2-2\langle R,R_o\rangle+C=0 \qquad (1)$$

حيث C ثابت يعطى من $C=R_o^2-r^2$، $\langle\ ,\ \rangle$ حاصل الضرب القياسي المعتاد

أو

$$\sum_{i=1}^{3}x_i^2-2\sum_{i=1}^{3}x_i\,x_i^o+C=0$$

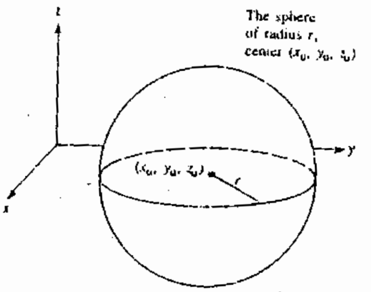
أو

$$|R-R_o|^2=r^2 \qquad (2)$$

أو في الصورة العامة

$$S\equiv\sum_{i=1}^{3}x_i^2-2\sum_{i=1}^{3}x_i\,x_i^o+C'=0 \qquad (3)$$

حيث $\sum_{i=1}^{3}(x_i^o)^2-C'\geq 0$ التساوي يحدث في حالة الكرة ذات نصف القطر صفر، انظر شكل (١).



شكل (١)

واضح من معادلة الكرة أنها تحتوى على أربع بارامترات C', x_i^0 ، إذن الكرة يمكن تحديدها بطريقة وحيدة إذا حققت أربعة شروط. وعلى سبيل المثال يمكن تحديد الكرة التي تمر بأربعة نقاط لا تقع في مستوى واحد $j = 1,2,3,4, \left(x_i^j\right)$ non - coplanar وذلك بالتعويض بإحداثيات الأربع نقاط في المعادلة **(3)**.

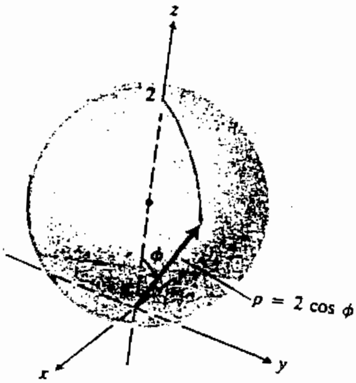
ويمكن الحصول على المعادلة بإسلوب الجبر الخطي (شرط الحذف) وذلك بحذف x_i^0 , C'.

<u>مثال (١):</u> أوجد معادلة الكرة $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ في الإحداثيات الكروية؟.

<u>الحل:</u> بالتعويض عن x, y, z من المعادلات التي تربطها بالإحداثيات الكروية

(ρ,θ,ϕ) (الباب السابق) نحصل على $\rho \neq 0, \rho^2 = 2\rho\cos\phi$

إذن المعادلة المطلوبة $\rho = 2\cos\phi$ حيث $\rho > 0$ فإن $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ كما هـــو مبين في شكل (٢).



شكل (٢)

مثال (٢) : المعادلــة $r^2 + z^2 = 4r\cos\theta + 6r\sin\theta + 2z$ تصــف كــرة في الإحداثيات الأسطوانية. أوجد الإحداثيات الكرتيزية لمركز الكرة؟.

الحل: استخدم العلاقة بين الإحداثيات المختلفة في الفراغ نحصل على المطلوب.

مثال (٣): أكتب معادلة الكرة في كل من الإحداثيات الأسطوانية والكروية؟.

الحل: من التحويلات التي تربط الإحداثيـــات الكرتيزيــة بالإحداثيــات الكرويــة (ρ,θ,ϕ) نجد أن معادلة الكرة تأخذ الصورة $\rho = \text{const.} = a$.

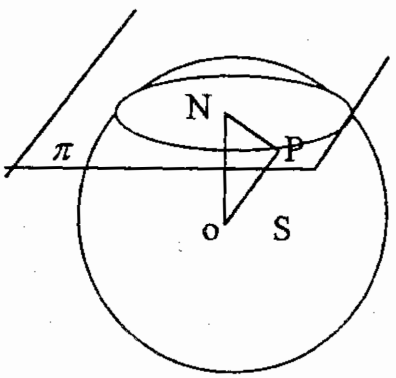
وبــالمثل فــإن معادلــة الكــرة في الإحداثيــات الأســطوانية (r,θ,z) هـــي $r^2 + z^2 = \text{const.} = a$ حيث a نصف قطر الكرة.

مثال (٤): أوجد معادلة المخروط في كل من الإحداثيات الأسطوانية والكروية؟

الحل: كما في المثال السابق فإن معادلة المخروط في الإحداثيات الأسطوانية هي $z = r\,(\tan\alpha)$ حيث α نصف زاوية رأس المخروط. وفي الإحداثيات الكروية فإن معادلة المخروط هي $\phi = \alpha$.

(٢.٩) الدائرة

إذا قطع مستوى π الكرة S فإن المنحنى المستوى الناتج من تقاطع المستوى مع الكرة يسمى دائرة المقطع وإذا مر المستوى بمركز الكرة فإن دائرة المقطع تسمى دائرة عظمى **Great circle** ويكون لها نفس مركز الكرة وكذلك نصف القطر.



شكل (٣)

ومن شكل (٣) نجد أن :

$$\overline{oN} \perp \overline{NP} \Rightarrow \overline{NP}^2 = \overline{oP}^2 - \overline{oN}^2 > 0 \Rightarrow oP > oN$$

حيث N مركز دائرة المقطع، $\overline{NP}$ نصف قطر دائرة المقطع، ودائرة المقطع تكون مجموعة غير خالية إذا كان وكان فقط المسافة بين مركز الكرة والمستوى π أقل من أو تساوي نصف قطر الكرة، كما هو مبين في شكل (٣).

إذن الدائرة هي تقاطع المستوى π الواقعة فيه الدائرة مع كرة تمر بها. أي أن الدائــرة تعطى من خلال معادلتين

$$S=0, \pi=0 \tag{4}$$

أو

$$\langle R-R_o, R-R_o\rangle = r^2, \langle R, n\rangle = \text{const.}$$

حيث n العمودي على المستوى.

<u>ملحوظة:</u> القارئ قد يلاحظ أن الدائرة هي تقاطع الأسطوانة

$$C \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

مع المستوى $\pi \equiv z=0$ وبالتالي فهي تعطى بالمعادلتين $C=0, \pi=0$

<u>مثال (٥):</u> أوجد مقطع الكرة $x^2+y^2+z^2-169=0$ بالمستوى $z=12$.

<u>الحل:</u> بالتعويض عن $z=12$ في معادلة الكرة نحصل على الدائــرة $x^2+y^2=25$ والتي مركزها $(0, 0, 12)$ يقع في المستوى $z=12$ ونصف قطرها 5، واضح أن نصف قطر الدائرة أقل من نصف قطر الكرة كما هو مبين في شكل (٤).

<u>مثال (٦) :</u> أوجد معادلات الدائرة التي تمر بــــرؤوس المثلــث $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ وكذلك أوجد إحداثيات المركز.

<u>الحل:</u> المستوى الذي يمر بالرؤوس الثلاث هو :

$$\pi : \frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}+\frac{x_3}{c}=1$$

(راجع جزء المستوى من سابقاً)

الدائرة المطلوبة هي تقاطع المستوى π بأي كرة تمر بالنقاط الثلاث السابقة.

لإيجاد معادلة الكرة نحتاج إلى نقطة رابعة من الضروري أن نأخذها نقطة الأصل.

إذا كانت

$$S \equiv \langle R-R_o, R-R_o\rangle = r^2$$

أو $R^2 - 2\langle R, R_o \rangle + R_o^2 - r^2 = 0$

هي الكرة التي تمر بالأربع نقاط السابقة الذكر نجد أن

$$a^2 - 2x_1^o a + R_o^2 - r^2 = 0 \qquad (i)$$
$$b^2 - 2x_2^o b + R_o^2 - r^2 = 0 \qquad (ii)$$
$$c^2 - 2x_3^o c + R_o^2 - r^2 = 0 \qquad (iii)$$
$$R_o^2 - r^2 = 0 \qquad (iv)$$

ومنها يكون $R_o^2 - r^2 = 0, \frac{a}{2} = x_1^o, \frac{b}{2} = x_2^o, \frac{c}{2} = x_3^o$

إذن معادلة الكرة هي

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - a x_1 - b x_2 - c x_3 = 0$$

ومنها تكون معادلة الدائرة هي

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - a x_1 - b x_2 - c x_3 = 0, \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

مركز الدائرة هو موقع العمود الساقط من مركز الكرة $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ على المستوى π.

معادلة العمودي هي:

$$n : \frac{x_1 - \frac{a}{2}}{\frac{1}{a}} = \frac{x_2 - \frac{b}{2}}{\frac{1}{b}} = \frac{x_3 - \frac{c}{2}}{\frac{1}{c}} = \lambda$$

ومنها يكون:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{2}, \frac{\lambda}{b} + \frac{b}{2}, \frac{\lambda}{c} + \frac{c}{2}\right) \in n$$

هي أي نقطة على هذا الخط. نقطة تقاطع n مع المستوى π تعطى من

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{2}=0$$

إذن

$$\lambda=-\frac{1}{2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

ويكون المركز

$$\left(\frac{a\left(\bar{b}^2+\bar{c}^2\right)}{2\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2\right)},\frac{b\left(\bar{c}^2+\bar{a}^2\right)}{2\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2\right)},\frac{c\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2\right)}{2\left(\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2\right)}\right)$$

حيث $\bar{c}=\frac{1}{c},\ \bar{b}=\frac{1}{b},\ \bar{a}=\frac{1}{a}$

(٣.٩) عائلة الكرات: Family of spheres

نعتبر كرتين $S_\alpha=0$ ، $\alpha=1,2$، النقاط المشتركة للكرتين S_α تحقق

$$S_1-S_2=0$$

أو

$$\sum_{i=1}^{3}2x_i\left(x_i^1-x_i^2\right)+d_1-d_2=0 \qquad (5)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى فهي تمثل مستوى وتكون نقاط المقطع تقع على المستوى (4) ويكون المقطع دائرة والمستوى (4) هو مستوى عمودي على الخط الواصل بين المركزين أي يوازي الاتجاه $\left(x_i^1-x_i^2\right)$

المعادلة $S+\lambda\ \pi=0$ تمثل عائلة من الكرات التي تمر بالدائرة $S=0,\pi=0$. إذن عائلة الكرات التي تمر بالدائرة $S=0,\pi=0$ هي

$$\{S+\lambda\,\pi=0,\ \lambda\in R\} \qquad (6)$$

أيضاً المعادلة $S_1+\mu\,S_2=0$ تمثل عائلة من الكرات التي تمر بدائرة تقاطع كرتين

S_2, S_1 وعائلة الكرات التي تمر بالدوائر $\alpha = 1, 2, S_\alpha = 0$ هي

$$\{S_1 + \mu S_2 = 0, \mu \in R\} \tag{7}$$

ملاحظة : (١) $\mu = -1$ تعطى المستوى المار بدائرة تقاطع الكرتين $S_\alpha = 0$ ومنه تكون معادلة أي كرة تمر بالدائرة $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ تعطى من

$$S_1 + k(S_1 - S_2) = 0, \ k \in R \tag{8}$$

(٢) من المهم أن نلاحظ أن معادلة الكرة التي تمر بالدائرة

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0, z = 0$$

هي

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx + 2fy + 2kz + c = 0$$

حيث $k \in R$ بارامتر.

مثال (٧): أوجد معادلة الكرة خلال الدائرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, 2x + 3y + 4z = 5$$

والتي تمر بالنقطة (1,2,3) .

الحل: معادلة الكرة المطلوبة هي

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + \lambda(2x + 3y + 4z - 5) = 0.$$

والكرة تمر بالنقطة (1,2,3) فهي تحقق المعادلة السابقة ومنها $\lambda = -\frac{1}{3}$ وبالتعويض عن قيمة λ في معادلة الكرة نحصل على الكرة المطلوبة ويمكنك تعين المركز ونصف القطر.

مثال (٨): بين أن الدائرتين

$$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z = 0, \ x - y + z - 2 = 0 \ \&$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + z - 5 = 0, 2x - y + 4z - 1 = 0.$$

يقعان على نفس الكرة وأوجد معادلتها.

الحل: معادلة أي كرة تمر بالدائرة الأولى هي

$$x^2+y^2+z^2-y+2z+\lambda(x-y+z-2)=0. \qquad ①$$

معادلة أي كرة تمر بالدائرة الثانية هي

$$x^2+y^2+z^2+x-3y+z-5+\mu(2x-y+4z-1)=0. \qquad ②$$

المعادلتين ②,① تمثلان نفس الكرة إذا تحقق

$$\lambda=2\mu+1,\ -1-\lambda=-\mu-3,$$
$$2+\lambda=4\mu+1,\ -2\lambda=-\mu-5.$$

ويجب أن تكون هذه المعادلات متفقة أي لهـا حـل. ومـن السـهل أن نتبـين أن $\lambda=3,\ \mu=1$. وبالتالي الدائرتين يقعان على نفس الكرة وبالعكس

$$x^2+y^2+z^2-y+2z+3(x-y+z-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+3x-4y+5z-6=0$$

(٤.٩) قوة نقطة في الفراغ بالنسبة لكرة : Power of point

نفرض أن

$$S\equiv\sum_{i=1}^{3}x_i^2+2\sum_{i=1}^{3}x_i\,x_i^o+d=0$$

$$L:\frac{x_1-y_1}{\ell_1}=\frac{x_2-y_2}{\ell_2}=\frac{x_3-y_3}{\ell_3}=\lambda$$

هي معادلات الكرة والمستقيم على الترتيب.

النقطة $(x_i)=(y_i+\lambda\ell_i), i=1,2,3$ هي نقطة تقاطع الخط L مع الكـرة S إذا حققت المعادلة S=0 ومنها نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في λ وبالتالي توجـد قيمتين للمتغير λ وعليه توجد نقطتي تقاطع.

مثال (٩) : ناقش شرط تماس الخط مع الكرة؟

الحل: شرط التماس هو انطباق نقطتي التقاطع وعليه فإن مميز معادلة الدرجة الثانيـة في λ يساوي صفر.

مثال (١٠): الخط المستقيم $\frac{1}{4}(x+3)=\frac{1}{3}(y+4)=-\frac{1}{5}(z-8)=0$ يقطع الكرة $x^2+y^2+z^2+2z-10y=23$ في النقطتين $(5,2,-1)$, $(1,-1,3)$.

الحل: بالتعويض عن x, y, z من المعادلات البارامترية للخط المستقيم في معادلة الكـرة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في λ ونكمل الحل.

إذا قطع مستقيم، مرسوم من نقطة A في أي اتجاه، كرة في نقطتين P,Q فإن حـاصل الضرب $\overline{AP}\,.\,\overline{AQ}$ يكون ثابت. هذا الثابت يسمى قوة النقطـة (قـوة النقطـة A) بالنسبة للكرة.

ونوضح ذلك من خلال تقاطع المستقيم مع الكرة. وللسهولة نأخذ الخـط L بحيـث $\sum_{i=1}^{3}\ell_i^2=1$ ويكون λ_1,λ_2 هما أبعاد النقطة A عن نقطتي التقاطع Q,P أي أن

$$\overline{AP}\,.\,\overline{AQ}=\lambda_1\lambda_2=\sum_{i=1}^{3}y_i^2+2\sum_{i=1}^{3}x_i^{o}\,y_i+d \qquad (9)$$

المعادلة (9) تمثل حاصل ضرب الجذرين λ_1,λ_2 ويرمـز لهـا بـالرمز $P_S(A)$. حيث (y_i) إحداثيات النقطة A، (x_i^{o}) إحداثيـات مـركز الكـرة. وإذا كانت $\lambda_1=\lambda_2$ يصبح الخط مماس ويكون $\overline{AP}^2$ مربع طول المماس للكرة المرسومة من A.

من تعريف المستوى المماسي لأي سطح يمكنك الحصول على المستوى المماس لسـطح الكرة.

مثال (١١) : بين أن المستوى $\pi:\ell x+my+nz=P$ يمس الكرة

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$$

إذا تحقق

$$(u\ell+vm+wn+P)^2=(\ell^2+m^2+n^2)(u^2+v^2+w^2-d)$$

الحل: بمساواة نصف قطر الكرة $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ بطول العمود الساقط من المركز $(-u,-v,-w)$ على المستوى π نحصل على الشرط المطلوب.

مثال (١٢): أوجد المستويات المماسية للكرة

$$S: x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$$

والتي توازي المستوى $\pi: 2x+2y=z$

الحل: المعادلة العامة لمستوى يوازي المستوى π هي

$$\pi^*: 2x+2y-z+\lambda=0\,,\ \lambda\in R$$

π^* يكون مماس للكرة S إذا كانت المسافة من المركز$(2,-1,3)$ للكرة S إلى المستوى تساوي 3 (نصف القطر) ومنها نجد أن λ لها قيمتين $\lambda_1=10, \lambda_2=-8$. (أكمل).

مثال (١٣): أوجد معادلة الكرة التي تمس الكرة

$$S: x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$$

عند النقطة $(1,1,-1)$ وتمر بنقطة الأصل.

الحل: مما سبق نجد أن المستوى المماس للكرة S عند $(1,1,-1)$ هو

$$\pi: x+5y-6=0$$

معادلة الكرة المطلوبة هي $S^*\equiv S+k\pi=0$

$$S^*: x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3+k(x+5y-6)=0\,,\ k\in R$$

الكرة S^* تمر بنقطة الأصل ومنها نحصل على $k=-1/2$ (أكمل).

مثال (١٤): أوجد معادلات الكرات التي تمس الدائر

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x + 4y + 5z = 6$$

وتمس المستوى $z = 0$.

الحل: الكرة التي تمس الدائرة المعطاة هي

$$S^* : x^2 + y^2 + z^2 - 1 + \lambda (2x + 4y + 5z - 6) = 0, \lambda \in R$$

مركزها $\in R \left(-\lambda, -2\lambda, -\frac{5}{2}\lambda \right)$ ونصف قطرها

$$\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + \frac{25}{4}\lambda^2 + 1 + 6\lambda}$$

بما أن الكرة المطلوبة تمس المستوى $z=0$ (من سابقاً) نجد أن

$$-\frac{5}{2}\lambda = \pm \left(5\lambda^2 + \frac{25}{4}\lambda^2 + 1 + 6\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

أو في صورة أبسط $5\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$ أي أن $\lambda = -1 \text{ or } \lambda = -\frac{1}{5}$

وبالتعويض عن قيم λ في S^* نحصل على المطلوب.

مثال (١٥) : أوجد معادلات المستويات المماسية للكرة $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ والتي

تمس الخط المستقيم $\pi_1 : x + y - 6 = 0, \pi_2 : x - 2z - 3 = 0$

الحل: أي مستوى π يمر بخط تقاطع المستويات π_1, π_2 يعطى من

أي $\pi = \pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$

$$\pi : x + y - 6 + \lambda(x - 2z - 3) = 0$$

المستوى π يمس الكرة S إذا تحقق أن طول العمود الساقط من مركز الكرة على المستوى π يساوي نصف قطر الكرة، أي أن :

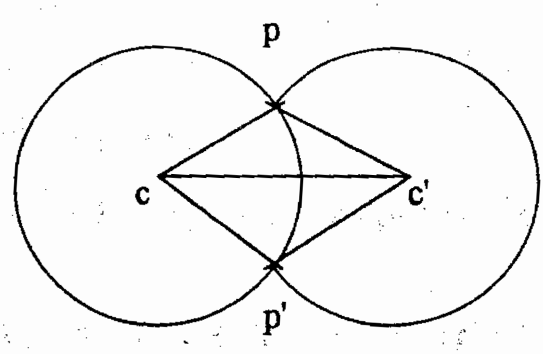
$$\frac{-6-3\lambda}{\left((1+\lambda)^2+1+4\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}=3$$

ومنها $2\lambda^2-\lambda-1=0$ أي أن $\lambda=1,-\frac{1}{2}$

وبالتعويض في معادلة المستوى π نحصل على المطلوب وهو عبارة عن مستويين.

(٥.٩) زاوية تقاطع كرتين: Angle of intersection

تعرف زاوية تقاطع كرتين عند نقطة مشتركة على أنها الزاوية بين المستويين المماسين للكرتين عند هذه النقطة. ولهذا فهي الزاوية بين أنصاف أقطار الكرتين للنقطة المشتركة. أنصاف الأقطار تتعامد على المستويات المماسية المناظرة عند النقطة المشتركة، انظر شكل (٣).



شكل (٥)

زوايا التقاطع هي $cp'c', cpc'$ وهي متساوية. إذا كانت زاوية التقاطع قائمة يقـلل أن الكرتين متقاطعين على التعامد. ونحاول إيجاد شرط التعامد ولذلك نفـرض أن لدينـا كرتين S_1, S_2 حيث

$$S_1 \equiv \langle R - R_o, R - R_o \rangle - r_1^2 = 0$$
$$S_2 \equiv \langle R - R'_o, R - R'_o \rangle - r_2^2 = 0$$

شرط التعامد هو $\overline{cc'}^2 = \overline{cp}^2 + \overline{c'p}^2$ أو ما يكافئ

$$\langle R_o - R'_o, R_o - R'_o \rangle = r_1^2 + r_2^2$$

أو

$$\langle R_o, R'_o \rangle = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \qquad (10)$$

حيث $r_1^2 = R_o^2 - d_1,\ r_2^2 = R'^2_o - d_2,\ R_o = (x_i^o), R'_o = (x'^o_i)$

مثال (١٦): أوجد معادلة الكرة التي تمر بالدائرة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0, 3x - 4y + 5z - 13 = 0$$

وتقطع الكرة $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$ على التعامد.

الحل: الكرة المطلوبة تنتمي للعائلة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 + \lambda(3x - 4y + 5z - 13) = 0$$

أو

$$S^* \equiv x^2 + y^2 + z^2 + (3\lambda - 2)x + (3 - 4\lambda)y + (5\lambda - 4)z + 6 - 13\lambda = 0$$

ومن شرط التعامد للكرتين S^*, S نحصل على

$$S^* \equiv 5(x^2 + y^2 + z^2) - 13x + 19y - 25z + 45 = 0$$

(٦.٩) المستوى الأساسي Radical plane

يعرف المستوى الأساسي على أنه المحل الهندسي للنقطة التي قدراها متساوية بالنسبة لكرتين وهو المستوى العمودي على الخط الواصل بين المركزين.

ومن تعريف قدرة النقطة (قوة النقطة) نرى أن المستوى الأساسي يعرف بالآتي:

$$\left\langle R, R_1^{\circ} - R_2^{\circ} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(d_2 - d_1\right) \tag{11}$$

أو

$$2x\left(u_1 - u_2\right) + 2y\left(v_1 - v_2\right) + 2z\left(w_1 - w_2\right) + d_1 - d_2 = 0 \tag{12}$$

حيث

$$S_{\alpha} \equiv R^2 + 2\left\langle R, R_{\alpha}^{\circ} \right\rangle + d_{\alpha}\,, \alpha = 1,2$$

$$R_{\alpha}^{\circ} = \left(u_{\alpha}, v_{\alpha}, w_{\alpha}\right), R \equiv \left(x, y, z\right)$$

من (12) واضح أن $\left(u_1 - u_2, v_1 - v_2, w_1 - w_2\right) = R_o - R'_o$ هو الخط الواصل بين المركزين وعمودي على المستوى الأساسي. المعادلة (12) يمكن كتابتها في الصورة $S_1 - S_2 = 0$.

<u>ملحوظة :</u> في حالة تقاطع كرتين يكون مستوى الدائرة المشتركة هو المستوى الأساسي.

المستويات الأساسية الثلاث لثلاث كرات تتقاطع في خط مستقيم يسمى الخط الأساسي Radical line. فإذا كانت $S_3 = 0, S_2 = 0, S_1 = 0$ ثلاث كرات فإن المستويات الأساسية هي

$$S_1 - S_2 = 0, S_2 - S_3 = 0, S_3 - S_1 = 0$$

من الواضح أن هذه المستويات تتقاطع في الخط $S_1 = S_2 = S_3$ أو ما يكافئ

$$S_1 - S_2 = 0, S_2 - S_3 = 0 \tag{13}$$

هذا الخط يسمى الخط الأساسي لثلاث كرات.

الأربع خطوط أساسية لأربع كرات مأخوذة ثلاثة ثلاثة تتقاطع في نقطة تسمى المركز الأساسي لأربع كرات Radical centre. النقطة المشتركة للثلاث مستويات

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$$

واضح أنها مشتركة للخطوط الأساسية مأخوذة ثلاثة ثلاثة للأربع كرات

$$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, S_4 = 0$$

هذه النقطة هي تقاطع للخطين.

$$\left.\begin{array}{l} S_1 - S_2 = 0, S_2 - S_3 = 0; \\ S_1 - S_3 = 0, \ S_2 - S_4 = 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

هذه النقطة تسمى المركز الأساسي للأربع كرات.

<u>نظرية (١):</u> إذا كانت $S_2 = 0, S_1 = 0$ كرتين فإن المعادلة

$$S_1 + \lambda S_2 = 0, \ \lambda \in R \qquad (15)$$

تمثل عائلة من الكرات بحيث أن أي كرتين من العائلة لهما نفس المستوى الأساسي.

<u>البرهان:</u> نفرض أن $S_1 + \lambda_1 S_2 = 0, S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ أي عنصرين من عناصر العائلة (15).

ويمكن كتابة المعادلتين في شكل معادلة الكرة أي أن

$$\frac{S_1 + \lambda_1 S_2}{1 + \lambda_1} = 0; \ \frac{S_1 + \lambda_2 S_2}{1 + \lambda_2} = 0$$

المستوى الأساسي لهذه الكرات هو

$$\frac{S_1 + \lambda_1 S_2}{1 + \lambda_1} - \frac{S_1 + \lambda_2 S_2}{1 + \lambda_2} = 0$$

أو ما يكافئ $S_1 - S_2 = 0$

وهي معادلة لا تعتمد على λ_1, λ_2 وبالتالي أي زوج من الكرات ينتمي للعائلة(15) يكون له نفس المستوى الأساسي.

(٧.٩) عائلات الكرات متحدة المحور Co-axal systems

عائلة الكرات التي فيها أي زوج من الكرات له نفس المستوى الأساسي تسمى عائلة متحدة المحور. إذن نظام الكرات $S_1 + \lambda S_2 = 0$ هو متحد المحور ويحدد بالكرتين $S_1 = 0, S_2 = 0$ والمستوى الأساسي المشترك هو $S_1 - S_2 = 0$ أو

$$S_1 + \mu\,(S_1 - S_2) = 0$$

بالمثل يمكن برهنة أن

<u>نظرية (٢):</u> عائلة الكرات $S + \lambda\pi = 0$ هي عائلة متحدة المحور حيث $S=0$ كرة، $\pi = 0$ مستوى ويكون المستوى الأساسي المشترك هو $\pi = 0$.

<u>نظرية (٣):</u> المحل الهندسي لمراكز الكرات متحدة المحور هو خط مستقيم.

<u>البرهان:</u> إذا كانت (x,y,z) هي مركز الكرة $S_1 + \lambda\ S_2 = 0$ نحصل على

$$(x,y,z) = \left(-\frac{u_1 + \lambda u_2}{1+\lambda}, -\frac{v_1 + \lambda v_2}{1+\lambda}, -\frac{w_1 + \lambda w_2}{1+\lambda}\right)$$

بحذف λ نجد أن (x,y,z) تقع على الخط المستقيم.

$$\frac{x + u_1}{u_1 - u_2} = \frac{y + v_1}{v_1 - v_2} = \frac{z + w_1}{w_1 - w_2}$$

النظرية (٣) يمكن صياغتها بأسلوب أكثر وضوحاً كالآتي :

الخط الواصل بين مراكز أي كرتين يكون عمودي على المستوى الأساسي المشترك.

نفرض أن لدينا الكرتين

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + d_1 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + d_2 = 0$$

حيث محور x هو الخط الواصل بين مركزيهما.

المستوى الأساسي لهذه الكرات هو

$$2x(u_1 - u_2) + d_1 - d_2 = 0$$

إذا أخذنا المستوى الأساسي منطبق على المستوى yz أي x=0 وبالتالي $d_1 = d_2 = d$ (وليكن لسهولة التوضيح). إذن الكرات المعطاة بالشروط السابقة لها المعادلات

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2d_\alpha x + d = 0, \alpha = 1,2$$

مثال (١٧): المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0, \lambda \in R$ تمثل عائلة من الكرات متحدة المحور لقيم مختلفة من λ, d ويكون المستوى yz هو المستوى الأساسي ومحور x هو الخط الواصل بين المراكز للعائلة.

المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda x + d = 0$ يمكن كتابتها في الصورة

$$(x + \lambda)^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 - d$$

الكرات التي لها نصف قطر صفري (نقطة) تحدث عندما $\lambda = \pm\sqrt{d}$ ويكون النظام محتوي على الكرتين النقطية

$$\left(-\sqrt{d}, 0,0\right), \left(\sqrt{d},0,0\right)$$

هذه النقاط تسمى نقاط النهاية limiting points.

ملحوظة: نقاط النهاية تحدث فقط عندما $d > 0$ أي أن الكرات لا تتقابل مع المستوى الأساسي في دائرة حقيقية.

تعريف: نقاط النهاية لعائلة من الكرات متحدة المحور هي الكرات النقطية.

مثال (١٨): أوجد نقاط النهاية لعائلة الكرات متحدة المحور المعرفة بالكرات

$$S_1 \equiv \langle R, R\rangle + \langle R, R_o^1\rangle + 6 = 0 \ , R_o^1 = (3, -3, 0)$$

$$S_2 \equiv \langle R, R\rangle + \langle R, R_o^2\rangle + 6 = 0 \ , R_o^2 = (2, -4, -2)$$

الحل: معادلة مستوى الدائرة التي تمر بالكرتين المعطيتين

$$S_1 \equiv S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow x + y + 2z = 0$$

إذن عائلة الكرات متحدة المحور المعرفة بهذه الكرات هي

$$S_1+\lambda(x+y+2z)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+(\lambda+3)x+(\lambda-3)y+2\lambda z+6=0,\lambda\in R \quad (*)$$

مركز الكرة (*) هو $\left(-\frac{\lambda+3}{2},-\frac{\lambda-3}{2},-\lambda\right)$ ونصف القطر هو

$$\gamma=\left(\left(\frac{\lambda+3}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda-3}{2}\right)^2\lambda^2-6\right)^{\frac{1}{2}}$$

بوضع $\gamma=0$ نحصل على $6\lambda^2-6=0$ أي أن $\lambda=\pm1$ ، الكرات المناظرة للقيم $\lambda=\pm1$ تصبح كرات نقطية تنطبق على مراكزها وهي نقاط النهاية لهذه العائلة.

مثال (١٩): بين أن الكرات التي تقطع كرتين في دوائر عظمى تمر بنقطتين ثابتتين.

الحل: نختار وضع مناسب للمحاور ومعادلات الكرات المعطاة كالآتي:—

نعتبر الكرتين:

$$x^2+y^2+z^2+2u_1x+d=0 \quad \text{(i)}$$
$$x^2+y^2+z^2+2u_2x+d=0 \quad \text{(ii)}$$

وأي كرة أخرى تعطى من المعادلة العامة

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+c=0 \quad \text{(iii)}$$

$u,v,w,c\in R$ تختلف باختلاف الكرات.

الدائرة المشتركة للكرات (i), (iii) تقع في المستوى

$$2x(u-u_1)+2vy+2wz+(c-d)=0$$

ويمر بالمركز $(-u_1,0,0)$ للكرة (i) إذا تحقق

$$2u_1(u-u_1)+c-d=0 \quad \text{(iv)}$$

والذي هو شرط أن الكرة (iii) تقطع الكرة (i) في دائرة عظمى.

بالمثل

$$-2u_1(u-u_2)+c-d=0 \qquad (v)$$

هو شرط أن الكرة (iii) تقطع الكرة (i) في دائرة عظمى.

بحل المعادلات (iv), (v) للقيم u,c نحصل على $u=u_1+u_2, c=2u_1u_2+d$

ولهذا u,c ثوابت لكونهما تعتمد على u_1, u_2, d فقط.

الكرة (iii) تقطع محور x في نقطة احداثيها السيني يعطى من المعادلة

$$x^2+2ux+c=0$$

جذور هذه المعادلة ثوابت.

إذن كل كرة (iii) تقابل محور x في نفس النقطتين وبالتالي نكـــون قـــد توصلنـــا إلى المطلوب.

مثال (٢٠): أوجد نقط تقاطع الكرتين S_α

$$S_\alpha : \langle R-R_o^\alpha, R-R_o^\alpha\rangle = r_\alpha^2, \ \alpha=1,2$$

مع المستوى $\pi: z=3$

حيث

$$r_1=5, r_2=4, R_o^1=(-1,-1,0), \ R_o^2=(1,1,3)$$

الحل: بالتعويض عن $z=3$ في معادلتي الكرتين نحصل على

$$x^2+y^2+2(x+y)=14$$
$$x^2+y^2-2(x+y)=14$$

ومنها يكون $x^2+y^2=14, x+y=0$ وبالتالي $x=\pm\sqrt{7}, y=-x$ وهكـــذا نحصل على نقطتين

$$\left(\sqrt{7},-\sqrt{7},3\right),\left(-\sqrt{7},\sqrt{7},3\right)$$

(٨.٩) غلاف الكرة Enveloping of sphere

المحل الهندسي للمماس للكرة والذي يوازي خط مستقيم ما هـــو أســـطوانة تسمى الأسطوانة المغلقة Enveloping cylinder (نظر شكل (٦))

لإيجاد الأسطوانة المغلقة للكرة (i) $x^2+y^2+z^2=a^2$ مثلاً والتي مولداها توازي $L: \dfrac{x}{\ell}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$، نفرض أن (x_1,y_1,z_1) أي نقطة على الأسطوانة المغلقة.

معادلة المولدات التي تمر بالنقطة (x_1,y_1,z_1) هي

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=\lambda \qquad \text{(ii)}$$

من التعريف نجد أن المولدات (ii) يجب أن تمس الكرة (i) وشرط التماس (بـالتعويض من (ii) في (i) ومساواة المميز بالصفر) هو

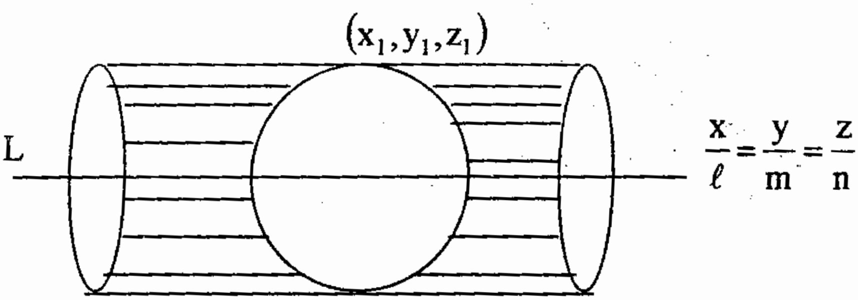
$$\left(\ell x_1+my_1+nz_1\right)^2=\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)$$

أو في الحالة العامة

$$\left(\ell x+my+nz\right)^2=\left(\ell^2+m^2+n^2\right)\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right) \qquad (16)$$

وإذا كانت ℓ,m,n جيوب تمام اتجاه تكون معادلة الأسطوانة المغلقة هي

$$\left(\ell x+my+nz\right)^2-x^2-y^2-z^2+a^2=0 \qquad (17)$$



شكل (٦)

مثال (٢١): أوجد معادلة الإسطوانة المغلفة للكرة $R^2 = 4$ والتي تـــوازي رواسمــــها الخط المستقيم $x = 2t, y = 3t, z = 4t, t \in R$

الحل: معادلة الاسطوانة المغلفة للكرة نحصل عليها باســـتخدام المعطيـــات في المثـــال والتعويض في (16)، (17).

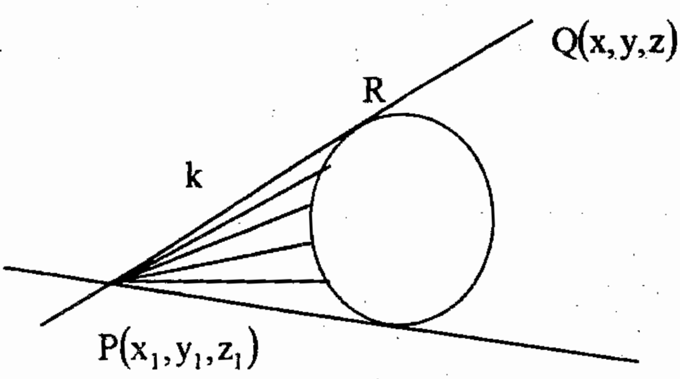
المحل الهندسي للمماسات من نقطة ما لكرة ما هو مخروط يسمى بـــالمخروط المغلفة Enveloping cone أو المخروط المماسي من نقطة ما للكرة (شكل (٧)).

بنفس الطريقة المتبعة في الأسطوانة، نفرض أن $P(x_1, y_1, z_1)$ هي النقطة المعطـاة وأن $Q(x, y, z)$ أي نقطة على المماس من P للكرة، $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

نفرض أن نقطة التماس R تقسم PQ بنسبة $k : 1$

إذاً إحداثيات R هي $\left(\dfrac{kx + x_1}{k+1}, \dfrac{ky + y_1}{k+1}, \dfrac{kz + z_1}{k+1}\right)$

ولكن R تقع على الكرة S فهي تحقق معادلتها وبالتالي نحصل على معادلة من الدرجـة الثانية في k.



شكل (٧)

بما أن الخط PQ مماس للكرة S إذن مميز معادلة الدرجة الثانية يجب أن يساوي الصفر أي أن

$$\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right)\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2-a^2\right)=\left(x_1x+y_1y+z_1z-a^2\right)^2 \quad (18)$$

هي معادلة المخروط المغلف للكرة S.

المعادلة (18) تكتب في شكل مختصر

$$S S_1 = T^2$$

حيث

$$S \equiv x^2+y^2+z^2-a^2 \,,\, S_1 \equiv x_1^2+y_1^2+z_1^2-a^2$$

$$T \equiv x\,x_1+y\,y_1+z\,z_1-a^2$$

الطرف الأيمن من المعادلة (18) هو مربع معادلة المستوى المماس للكرة S =0 عند (x_1, y_1, z_1).

تمارين (٩)

١ـــ أوجد معادلات الكرات التي تنتمي إلى عائلة الكرات متحدة المحور

$$x^2+y^2+z^2-5+\lambda\ (2x+y+3z-3)=0$$

والتي تمس المستوى $3x+4y=15$

٢ـــ أوجد معادلة الكرة التي مركزها يقع على الخط $5y+2z=0,\ 2x-3y=0$ وتمـــر بالنقاط $(0,-2,-4),\ (2,-1,-1)$

٣ـــ أوجد معادلة الكرة التي لها الدائرة

$$x^2+y^2+z^2+10y-4z-8=0,\ x+y+z=3$$

كدائرة عظمى (مركز الدائرة المطلوبة يقع على المستوى $x+y+z=3$)

٤ـــ بين أن الدائرتين

$$\left.\begin{array}{l}2\left(x^2+y^2+z^2\right)+8x-13y+17z-17=0\\ \quad 2x+y-3z+1=0\end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2+3x-4y+3z=0\\ \quad x-y+2z-4=0\end{array}\right\}$$

تقعان على نفس الكرة وأوجد معادلتها.

٥ـــ أوجد معادلة المستوى المماس للكرة

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right)-2x-3y-4z-22=0$$

عند النقطة $(1,2,3)$.

٦ـــ أثبت أن الكرتين

$$x^2+y^2+z^2=25$$

$$x^2+y^2+z^2-24x-40y-18z+225=0$$

تتماس من الخارج وأوجد نقطة التماس.

٧ــ أوجد مراكز الكرتين اللتان تمسان المستوى $4x+3y=47$ عند النقطة $(8,5,4)$ والكرة $x^2+y^2+z^2=1$

٨ــ أوجد معادلة الكرة التي تمر بالدائرة

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z+6=0,\ 3x-4y+5z-1=0$$

وتقطع الكرة $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+11=0$ على التعامد.

٩ــ بين أن أي كرة تمر بالدائرة $x^2+y^2-2a\,x+r^2=0,\ z=0$ تقطع على التعامد أي كره تمر بالدائرة $x^2+z^2=r^2,\ y=0$

١٠ــ (أ) بين أنه في الحالة العامة يوجد كرتين من النظام متحدا المحور تمس مستوى ما.

(ب) أوجد معادلات الكرتين من النظام متحد المحور

$$x^2+y^2+z^2-5+\lambda(2x+y+3z-3)=0$$

والتي تمس المستوى $3x+4y=5$.

١١ــ أوجد نقط النهاية لعائلة الكرات متحدة المحور

$$x^2+y^2+z^2-20x+30y-4z+29+\lambda(2x-3y+4z)=0$$

١٢ــ ناقش الوضع المتبادل للكرتين

$$S_\alpha=R^2-\left\langle R,R_\alpha^o\right\rangle+d_\alpha=0\,,\alpha=0$$

من حيث التماس من الداخل أو الخارج أو التقاطع أو التباعد.

١٣ــ أوجد المخروط المغلف للكرة $x^2+y^2+z^2+2x-2y=2$ والذي رأسه $(1,1,1)$.

١٤ــ أوجد معادلة المخروط الذي رأسه نقطة الأصل ومولداته تمس الكرة

$$x^2+y^2+z^2-2x+4z=1$$

١٥ـ أثبت أن الخطوط المستقيمة المرسومة من نقطة الأصل وتمس الكرة

$$x^2+y^2+z^2+2ux+d=0$$

تقع على المخروط $d\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ux+vy+wz)^2$

١٦ـ أوجد معادلة الأسطوانة المغلفة للكرة $x^2+y^2+z^2-2x+4y=1$ والتي مولداتها توازي الخط $x=y=z$

١٧ـ أثبت أن المستوى المماس عند النقطة (x_1,y_1,z_1) للأسطوانة

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

هو $x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)+gx_1+fy_1+c=0$

١٧ـ أثبت أن المنحنى المرسوم بكل النقط التي لها متجه الوضع

$$\underline{r}=(-1+\sin 2t\cos 3t)e_1+(2+\sin 2t\sin 3t)e_2+$$
$$+(-3+\cos 2t)e_3$$

يقع بأكمله على سطح كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها النقطة التي لها متجه الوضع $\underline{a}=-e_1+2e_2-3e_3$.

١٨ـ أوجد معادلة المستويات المماسية للكرة

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$$

والتي توازي المستوى $2x+2y=z$.

١٩ـ أوجد معادلة الكرة التي تمس الكرة

$$x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$$

عند النقطة (1, 1,-1) وتمر بنقطة الأصل.

٢٠ـ أوجد معاملات الكرة خلال الدائرة

$$x^2+y^2+z^2=1,2x+4y+5z=6$$

والتي تمس المستوى $z=0$.

٢١ــ أوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم

$$2(x+1) = 2 - y = z + 3$$

٢٢ــ أوجـــد مراكـــز الكـــرات التي تمس المستوى $4x + 3y = 47$ عند النقطـة $(8,5,4)$ والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 10$

٢٣ــ بين أن الكرتين

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 , x^2 + y^2 + z^2 - 24x - 40y - 18z + 225 = 0$$

متماستان من الخارج وأوجد نقطة التماس.