الباب الثامن

الإحداثيات الكروية والاسطوانية

Spherical and cylindrical coordinates

(١.٨) مقدمة :

سبق لك أن تعرفت في المستوى على نوعين من نظم الإحداثيات أو نظم التعبير عن نقطة هندسية باستخدام أبعاد وكان هذا النوع هو الإحداثيات الكرتيزية ونوع آخر فيه التعبير عن نقطة هندسية من خلال بعد وزاوية وهو نظام الاحداثيات القطبية وهنا في الفراغ توجد نظم كثيرة ومعقدة للتعبير عن نقطة فراغية $(x,\ y,\ z)$ وهي الإحداثيات الكرتيزية والإحداثيات الكروية (القطبية الفراغية) التي تتحدد من خلال زاويتين θ, ϕ في المستوى وبعد في اتجاه العمودي على المستوى وأخرى فيها زاوية وبعدين وتسمى الاحداثيات الأسطوانية ولنعرض ذلك بالتفصيل.

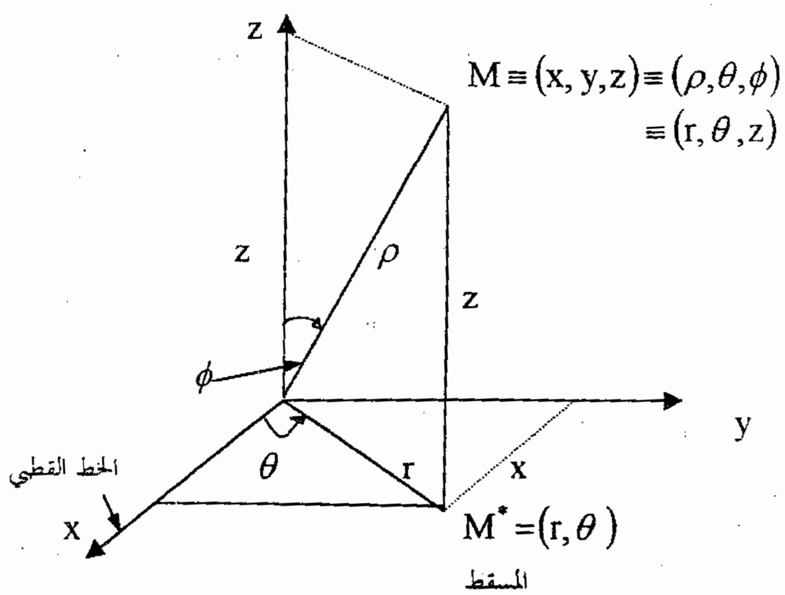
تتحدد الإحداثيات الكروية وكذلك الأسطوانية بمستوى α عليه مجموعة إحداثيات قطبية ثم ا تجاه عمودي على المستوى α وليكن oz .

بالنسبة لأي نقطة M في الفراغ E^3 تتحدد تحديداً تاماً بالكميات $\theta,\ \rho,\phi$ حيث $-\pi < \theta \le \pi, 0 \le \phi \le \pi\ ,\ 0 \le \rho < \infty$ وتسمى الكميات θ, ϕ, ρ بالإحداثيات الكروية للنقطة M ولكي نحدد M في الفراغ إذا أعطيت إحداثياتها الكروية نلاحظ أن ρ تحدد كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ρ والزاوية ϕ تحدد مخروطاً دائرياً قائماً رأسه نقطة الأصل وزاوية رأسه 2ϕ وأخيراً الزاوية θ تحدد مستوياً zoM عمودياً على المستوى α وتكون النقطة M هي تقاطع الكرة والمخروط والمستوى (شكل ١، ٢).

<u>تطبيق:</u> خطوط الطول والعرض على سطح الكرة الأرضية تحدد من الزوايا ϕ, θ

فمثلاً: إذا أخذنا المستوى α هو المستوى الاستوائي والمستوى zox يمر بمدينة جرينتش فإن :

خط عرض M يكون مساوياً $\frac{\pi}{2}-\phi$ ويكون هذا الخط شمالاً عندما $\phi<\frac{\pi}{2}$ ويكون جنوباً عندما $\phi>\frac{\pi}{2}$ أما خط الطول للنقطة M فهو θ ويكون هذا الخط شرقاً عندما تكون θ موجبة $(0\leq\theta\leq\pi)$ وغرباً عندما تكون θ سالبة $(-\pi\leq\theta\leq 0)$ وسنقوم بدراسة نموذج للكرة الأرضية وهو تقريباً كرة تعطى من $\rho=\text{const.}$ في الباب القادم.



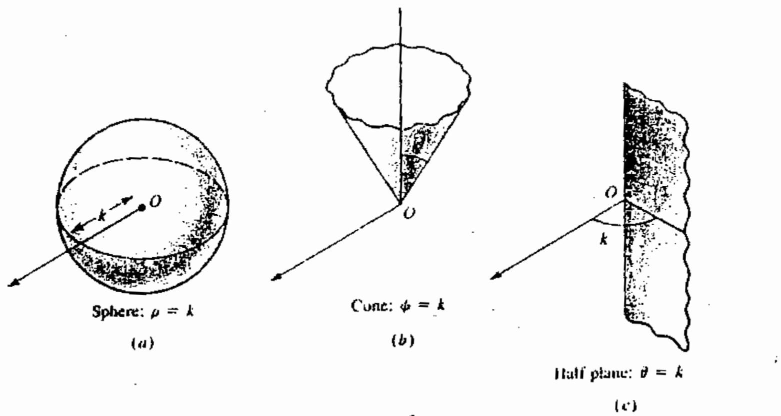
شكل (١)

ويمكننا من شكل (٣) ملاحظة أن العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية (x,y,z) والكروية ρ,θ,ϕ هي :

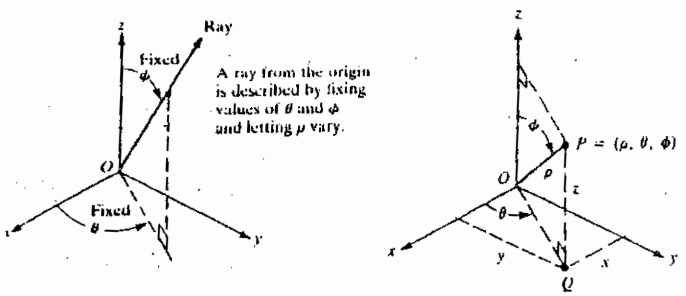
$$x = \rho \sin\phi \cos\theta \ , \ y = \rho \sin\phi \sin\theta \ , \ z = \rho \cos\phi \qquad (1)$$

والإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z) وعلاقتها بالكرتيزية تعطى من

$$x = r \cos\theta \ , \ y = r \sin\theta \ , \ z = z \qquad (2)$$



شكل (٢)



شكل (٣)

والتحويلات العكسية للتحويلات (1) ,(2) على الترتيب هي

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \ , \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\ ,z=z \qquad (4)$$

العلاقة بين الإحداثيات الكروية والأسطوانية هي

$$r=\rho\sin\theta\ ,z=\rho\ \cos\phi$$

والتحويل العكسي هو

$$\rho=\sqrt{r^2+z^2}\ ,\phi=\tan^{-1}\frac{r}{z}$$

مثال (١): التحويلات (الرواسم) السابقة تناظر أحادي؟

مثال (٢): إذا كانت $\left(1,-\sqrt{3},2\right)$ هي الإحداثيات الكرتيزية لنقطة M فأوجد احداثياتها الأسطوانية والكروية.

الحل : باستخدام العلاقات (2) ,(1) نحصل على المطلوب.

مثال (٣): أثبت أن المعادلة $\rho^2\left(1+3\sin\phi\ \cos^2\theta\right)=4$ تمثل مجسم ناقصي دوراني ناتج عن دوران قطع ناقص حول محور السينات حيث $\left(r,\phi,\theta\right)$ هي الاحداثيات الكروية في الفراغ.

الحل : باستخدام التحويل العكسي (3) واستخدام ما سبق دراسته من سطوح الدرجة الثانية الدورانية نحصل على المطلوب.

مثال (٤): عبر في الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة عن النقطة التي احداثياتها الأسطوانية هي $\left(4,\frac{\pi}{2},-2\right)$.

الحل: باستخدام المعادلات (2) ينتج المطلوب.

مثال (٥): اكتب كل من معادلة الأسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$ والمخـــروط الدائــري $x^2 + y^2 = c^2 z^2$ في الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: بالتعويض في المعادلات (2) ينتج المطلوب.

مثال (٦) : عين الإحداثيـــات الكرتيزيــة للنقطــة P الــتي احداثياتهــا الكرويــة $\left(2, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$.

الحل: استخدم التحويل العكسي (3).

مثال (٧): عين الاحداثيات الكروية للنقطة P حيـــث احداثياتهــا الكرتيزيــة هــي $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}\right)$.

الحل: استخدم التحويل (1).

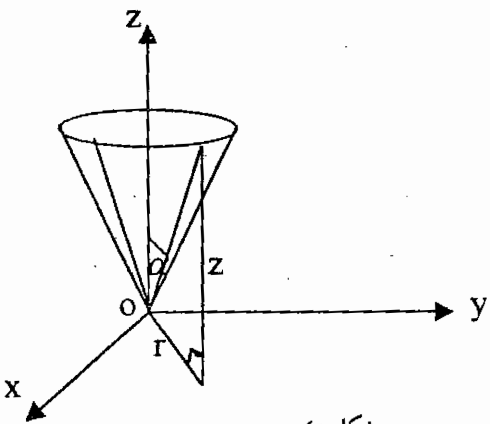
مثال (٨): عبر عن معادلة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ في الأحداثيات الكروية.

الحل: استخدم التحويل (1).

مثال (٩): معطى السطح $\rho^2 \sin\phi \cos\phi \cos\theta = 1$ في الإحداثيـــات الكرويــة (ρ, θ, ϕ) أكتب معادلته في الإحداثيات الكرتيزية وحدد نوعه.

الحل: استخدم التحويل العكسي (3).

مثال (١٠): مخروط زاوية رأسه 2α عين معادلته في الاحداثيات الكروية والأسطوانية إذا كان محورة هو oz .



شكل (٤)

الحل: في الإحداثيات الكروية نجد أن معادلة المخروط $\phi = \alpha$ للنصف العلوي للمخروط، $\phi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ للنصف السفلي للمخروط.

ومن الشكل والإحداثيات الأسطوانية يكون $z = r\cot\alpha \;,\; r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

مثال (١١) : أوجد الزاوية α في حالة المخروط الدائري $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

الحل: استخدم المثال السابق تحصل على المطلوب.

مثال (١٢): أثبت أن المعادلة $x^2 + y^2 = \lambda^2 z^2$ تمثل مخروط دائري.

الحل : حول هذه المعادلة إلى الإحداثيات الكروية وكذلك الأسطوانية ومن ثم أعط تفسيراً للبارامتر λ وباستخدم التأويل الهندسي للإحداثيات الكروية والأسطوانية السابقة.

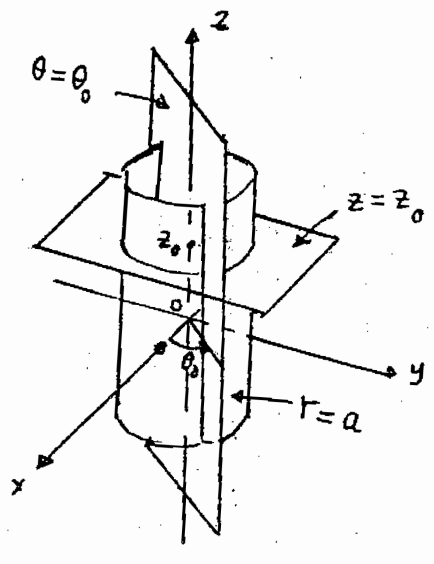
مثال (١٣): أعط وصف هندسي للسطوح $x^2 + y^2 = z^2 \,,\, 3(x^2 + y^2) = z^2$ في كل من الإحداثيات الكروية والأسطوانية.

الحل: استخدم المثال السابق.

(٢.٨) التأويل الهندسي للإحداثيات الأسطوانية:

المعادلة $r = a = const.$ تصف ليس فقط دائرة في المستوى $x\,y$ لكن تصف أسطوانة كاملة حول محور z، محور z نفسه يعطى بالمعادلة $r = 0$.

المعادلة $\theta = b = const.$ تصف المستوى الذي يحتوي على محور z ويصنع زاوية مقدارها b (تقدير دائري) مع الاتجاه الموجب لمحور x (انظر شكل (٤)).

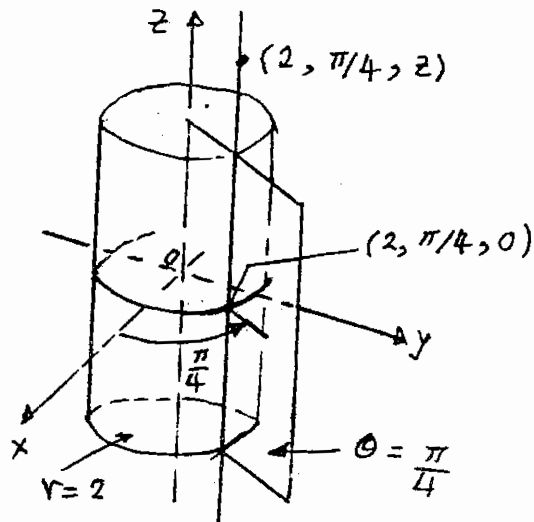


شكل (٤)

مثال (١٤): صف النقاط في الفراغ التي إحداثياها الأسطوانية تحقق المعادلات

$$r = 2\,,\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

الحل: هذه النقاط تصف الخط الذي فيه الأسطوانة $r = 2$ تقطع جزء المستوى $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ الذي عليه r موجبة. هذا الخط يمر بالنقطة $\left(2, \dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ ويوازي محور z (شكل (٥)) أي أن النقاط المعطاة في المثال تصف خط مستقيم يوازي محور z.

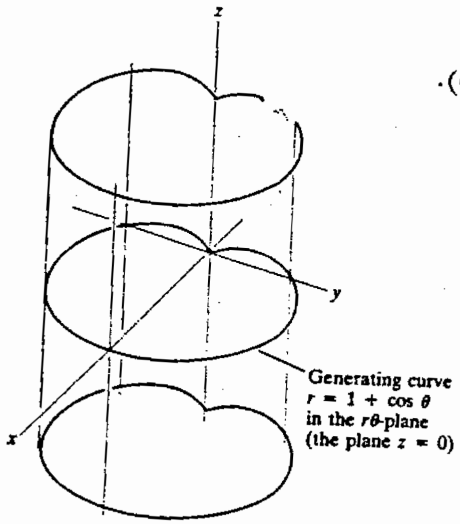


شكل (٥)

مثال (١٥): ارسم السطح $r = 1 + \cos\theta$ حيث (r, θ, z) هي الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: المعادلة المعطاة خالية من الإحداثي z . ولهذا فإن السطح هو أسطوانة مقامة على منحنى الكارديوئيد $r = 1 + \cos\theta$ في المستوى $r\,\theta$ ومولدات الأسطوانة توازي

محور z (شكل (٦)).



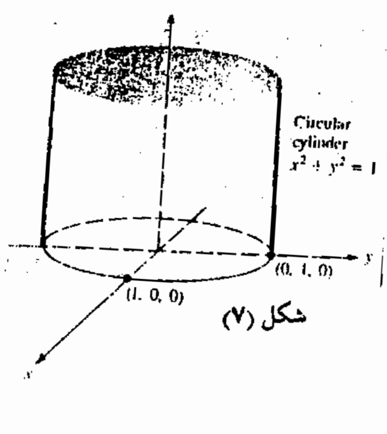
شكل (٦)

ومقطع الأسطوانة العمودي على محور z هو منحنى الكارديوئيد.

مثال (١٦): صف الأسطوانة التي نصف قطرها a وارتفاعها h في الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: نفرض أن محور الأسطوانة هو الأتجاه الموجب لمحور z وقاعدتها السفلى مركزها هو قطب الإحداثيات الأسطوانية (أنظر شكل (٧)). ومن دراستك للإحداثيات الأسطوانية نجد أن الأسطوانة المطلوبة تعطى من

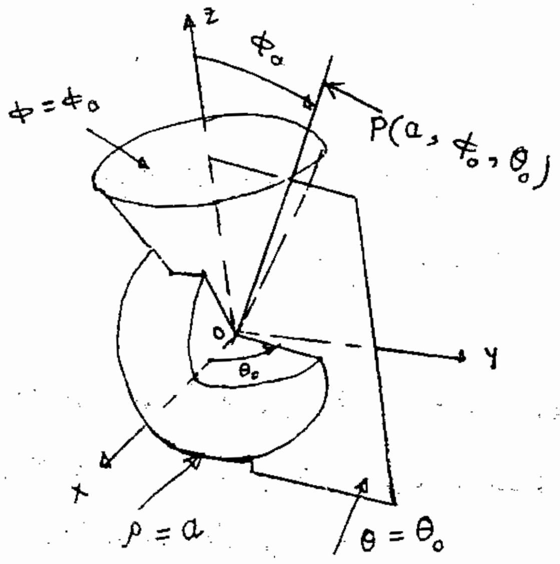
$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le a \ , \ 0 \le z \le h$$



شكل (٧)

(٣.٨) التأويل الهندسي للإحداثيات الكروية:

المعادلة $\rho = a = \text{const.}$ تصف كرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل. المعادلة $\phi = \phi_o = \text{const.}$ تصف مخروط وحيد رأسه نقطة الأصل ومحوره يقع على امتـــداد محور z $\left(0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$ وإذا كانت $\phi = \frac{\pi}{2}$ نحصل على المســـتوى x y وإذا زادت ϕ عن $\frac{\pi}{2}$ فإن المخروط ينقلب إلى اسفل Opens downward(شكل (٨)).

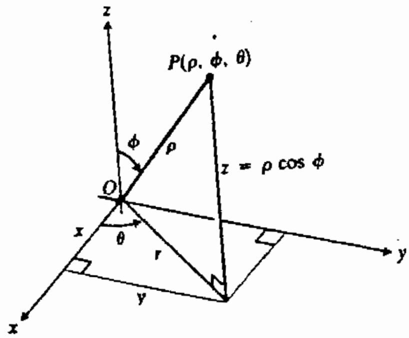


شكل (٨)

العلاقة بين الإحداثيات الكرتيزية والأسطوانية والكروية تعطى من

$$r = \rho \sin \phi \;, x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$
$$z = \rho \cos \phi \,, y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

كما هو مبين بالشكل (٩).



شكل (٩)

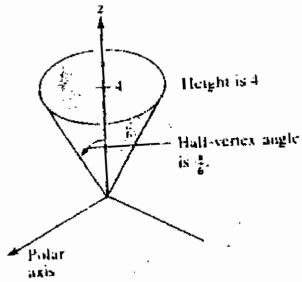
مثال (١٧): أوجد معادلة المستوى $z = 4$ في الإحداثيات الكروية.

الحل: من التحويلات التي تربط الإحداثيات الكرتيزية بالإحداثيات الكروية نجد أن

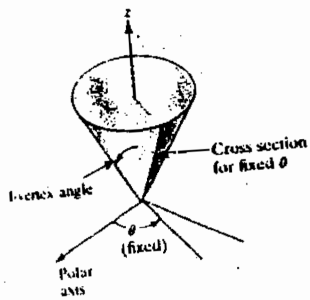
$$\rho = 4 \sec \phi$$

مثال (١٨): صف المخروط الذي ارتفاعه 4 وحدات ونصف زاوية رأسه $\frac{\pi}{6}$ في الإحداثيات الكروية.

الحل: في الإحداثيات الكروية $0 \le \theta \le 2\pi$ ، لأي قيمة ثابتة θ فإن المقطع يكون مثلث كما هو مبين بشكل (١٠). على هذا المثلث الزاوية ϕ تتغير من 0 إلى $\frac{\pi}{6}$ ولأي قيم ثابتة θ, ϕ فإن المقطع عبارة عن قطعه مستقيمة تبدأ من نقطة الأصل حتى المستوى $z = 4$ كما هو موضح بالشكل (١١).



شكل (١٠)



شكل (١١)

كما في المثال السابق فإن هذا المستوى معادلته $\rho = 4\sec\phi$ وبالتالي فإن المخــروط المطلوب يعطى من

$$0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6} \ , \ 0 \le \rho \le 4 \ \sec\phi$$

تمارين (٨)

(١) حدد معادلة المخروط الدائري القائم الذي محوره منطبق على محور z ورأسه نقطة الأصل ونصف زاوية رأسه θ.

(٢) أثبت أن الزاوية θ بين راسمي المخروط $6yz-2xz+5xy=0$ الواقعين في المستوى $3x+y-5z=0$ تحقق $\cos\theta=\frac{1}{6}$

(٣) أثبت أن مقاطع السطح المخروطي $9x^2-36y^2+4z^2=0$ بمستويات موازية للمستوى $y=0$ تكون قطاعات ناقصه لها نفس الاختلاف المركزي.

(٤) أثبت أن المستوى $2x-12y-z+16=0$ يقطع السطح المكافئ الزائدي $x^2-4y^2=2z$ في راسمين وأوجد معادلة كل منهما.

(٥) أوجد الزاوية بين الراسمين المارين بالنقطة $(-2, 0, 1)$ على السطح المكافئ الزائدي $9x^2-4y^2=36z$

(٦) عين السطوح الآتية في الإحداثيات الكارتيزية وأذكر نوع السطح

(i) $z=r^2\sin 2\theta$ (ii) $z=r^2$

(iii) $\rho\sin\phi\tan\phi\sin 2\theta=2$ (iv) $\rho=\sin\phi\,\cos\phi$

(v) $z=r^2\cos 2\theta$ (vi) $\rho\sin\phi=1$

(٧) صف السطوح الممثلة بمجموعة النقاط التي إحداثياتها الأسطوانية تحقق المعادلات ومن ثم أرسمها.

(i) $r=4$, (ii) $r^2+z^2=1$

(iii) $r=2,\ z=3$, (iv) $r=2\cos\theta$

(v) $\theta=\frac{\pi}{6},\ z=r$, (vi) $r=3,\ \theta=\frac{\pi}{2}$

(٨) صف السطوح الممثلة بمجموعة النقاط التي إحداثياتها الكروية تحقق المعادلات ومن ثم أرسمها.

(i) $\phi=\frac{\pi}{6}$, (ii) $\rho=6,\phi=\frac{\pi}{6}$

(iii) $\rho=5,\theta=\frac{\pi}{4}$, (v) $\theta=\frac{\pi}{4},\phi=\frac{\pi}{4}$

(iv) $\theta=\frac{\pi}{2},\rho=4\cos\phi$

(٩) ادرس مجموعة النقاط (ρ,θ,ϕ) التي تحقق $\theta=\frac{\pi}{2},\phi=\frac{\pi}{2}$.

(١٠) ادرس المنطقة $1\le\rho\le 2,\frac{\pi}{2}\le\phi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi$