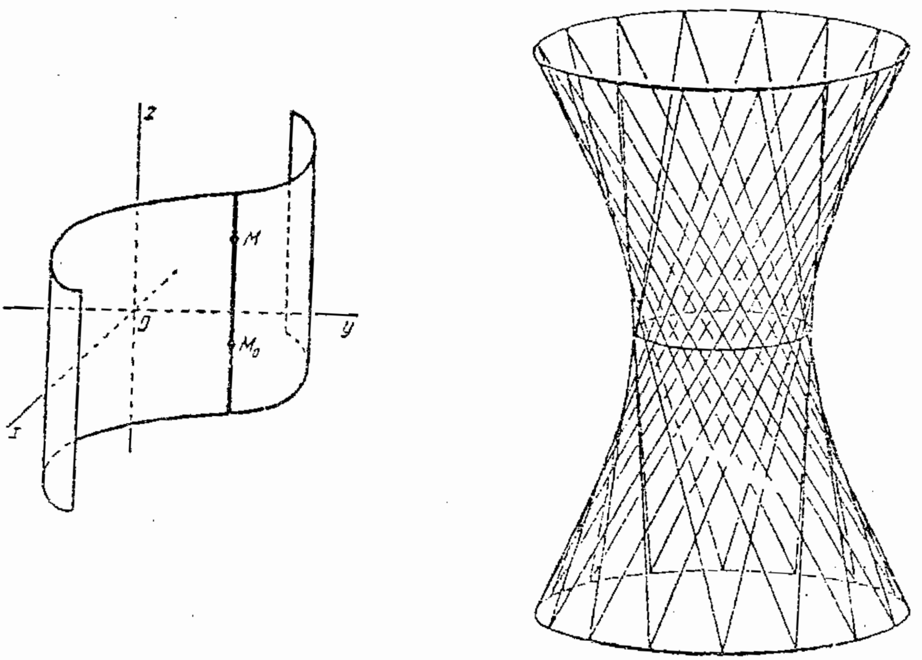
الباب السابع

السطوح المسطرة Ruled surfaces

(١.٧) السطوح المسطرة العامة :

السطح المسطر هو سطح يتولد بعائلة من الخطوط المستقيمة ذات البارامتر الواحد. أو بمعنى آخر هو السطح الناتج عن حركة مستقيم في الفراغ موازيا لاتجاه معلوم ويقطع في حركته منحنى معلوم. المستقيم يسمى راسم السطح ruling والمنحنى بدليل السطح directrix. كما هو مبين في شكل (١)



شكل (١)

نحاول استنتاج معادلة السطح المسطر في الصورة العامة. لهـــذا نفـــرض أن معادلة الراسم هي

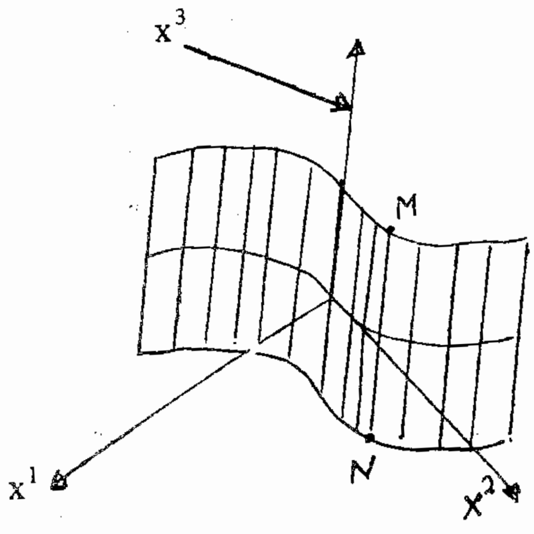
$$\frac{x^1 - a^1}{b^1} = \frac{x^2 - a^2}{b^2} = \frac{x^3}{1} \qquad (1)$$

بفرض أنه يوازي الاتجاه الثابت $(b^1, b^2, 1)$ ويمر بالنقطة $N(a^1, a^2, 0)$ وهي نقطة تقاطعه مع المستوى x^1ox^2.

نفرض أن الدليل هو منحنى تقاطع سطحين ويعطى بالمعادلة

$$\left.\begin{aligned} f_1(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ f_2(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

بما أن النقطة $(a^1, a^2, 0)$ هي نقطة تقاطع الراسم مع الدليل فهي تحقق المعادلة (2)



شكل (٢)

وبالتالي يمكن حذف x^1, x^2, x^3 من (1), (2) لنحصل على علاقة في a^1, a^2 ولتكن $\Phi\left(a^1, a^2\right)=0$ أو

$$a^2 = f\left(a^1\right) \tag{3}$$

بالتعويض من (3) في (1) نحصل على

$$x^2 - b^2 x^3 = h\left(x^1 - b^1 x^3\right) \tag{4}$$

وهذه هي المعادلة العامة للسطح المسطر الذي راسمه يوازي الاتجاه $\left(b^1, b^2, 1\right)$ ودليله المنحنى (2).

<u>مثال (١):</u> أوجد السطح الأسطواني الناتج عن حركة المستقيم الذي يوازي الاتجاه (9,6,6) ويقطع دائما المنحنى $x^1 = 0, \left(x^2 - 9\right)^2 = 12\left(x^3 - 5\right)$

<u>الحل:</u> المعادلات البارامترية لراسم السطح الأسطواني هي

$$x'^1 = x^1 + 3t, x'^2 = x^2 + 2t, x'^3 = x^3 + 2t \tag{1}$$

حيث $N\left(x^1, x^2, x^3\right)$ هي النقطة التي يمر بها الراسم والنقطة $M\left(x'^1, x'^2, x'^3\right)$ هي نقطة تقاطع الراسم مع المستوى الذي يحتوي على الدليل وهو المستوى $x^1 = 0$

بوضع $x^1 = 0$ في المعادلات نحصل على $x'^1 - 3t = 0 \Rightarrow t = +\dfrac{x'^1}{3}$.

وبالتعويض في المعادلتين الثانية والثالثة من (1) نحصل على :

$$x'^2 = x^2 + \frac{2x'^1}{3}, x'^3 = x^3 + \frac{2}{3}x'^1$$

بالتعويض عن هذه القيم في معادلة الدليل نحصل على

$$\left(x'^2 - \frac{2x'^1}{3} - 9\right)^2 = 12\left(x'^3 - \frac{2}{3}x'^1 - 5\right)$$

وهي معادلة السطح الأسطواني المطلوب.

مثال (٢) : كون معادلة السطح المخروطي الذي رأسه النقطة (6, 4, 5) ودليله المنحنى $\left(x^1-6\right)^2+\left(x^2-4\right)^2=9\,,\,x^3=0$

الحل : المعادلات البارامترية لراسم السطح هي

$$\frac{x'^1-6}{x^1-6}=\frac{x'^2-4}{x^2-4}=\frac{x'^3-5}{x^3-5}=t \qquad (1)$$

هذا المستقيم يقطع دائما دليل السطح الذي يقع في المستوى $x'^3=0$ ومنها نحصل على $t=\frac{-5}{x^3-5}$ وبالتعويض في المعادلات (1) نحصل على:

$$x'^1=6-\frac{5\left(x^1-6\right)}{x^3-5}\,,\,x'^2=4-\frac{5\left(x^2-4\right)}{x^3-5}$$

وبالتعويض في معادلة الدليل المعطاة نحصل على

$$25\left(x^1-6\right)^2+25\left(x^2-4\right)^2=9\left(x^3-5\right)^2$$

أو

$$\left(\frac{x^1-6}{3}\right)^2+\left(\frac{x^2-4}{3}\right)^2-\left(\frac{x^3-5}{5}\right)^2=0$$

وهي معادلة سطح مخروطي رأسه النقطة (6, 4, 5) وهو مخروط دائري قائم.

(٢.٧) رواسم سطوح الدرجة الثانية المسطرة :

Generators of ruled concoid

المستقيم الذي جميع نقطة تقع على سطح من سطوح الدرجة الثانية

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\,x^i\,x^j+\sum_{i=1}^{3} b_i\,x^i+c=0$$

يسمى براسم لهذا السطح ويعتبر سطح الدرجة الثانية في هذه الحالة سطح مسطر.

ومن سطوح الدرجة الثانية المسطرة التي لها خطوط مستقيمة مولدة سطح الأسطوانة

وسطح المخروط ومجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة ومجســـم القطــع المكــافئ الزائدي. وهذه السطوح يمكن اعتبارها ناتجة عن حركة مستقيم في الفراغ.

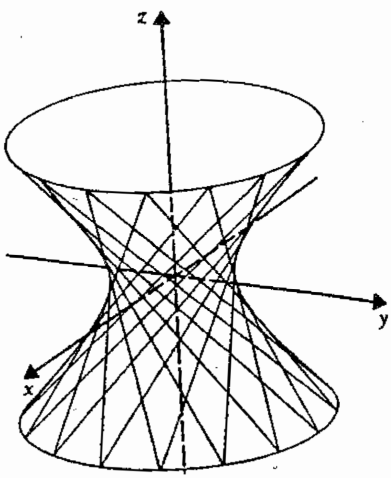
مثال (٣) : المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة

الحل : بالنسبة لمجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة يمكن إثبات الخواص الآتية:ـــ

١ـــ خلال كل نقطة من نقط مجسم القطع الزائد ذو الطية الواحدة

$$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2+\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2-\left(\frac{x^3}{a^3}\right)^2=1$$

يمر راسمين لهذا السطح ونشاهد في الشكل المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة ومجموعتي رواسمه المستقيمة



شكل (٣)

(٢) تقسيم مجموعة الرواسم إلى عائلتين $\{L_1\}$, $\{L_2\}$ حيث

$$L_1:\ \frac{x^1-x^1_o}{\frac{a^1x^2_o}{a^2}}=\frac{x^2-x^2_o}{\frac{-a^2x^1_o}{a^1}}=\frac{x^3}{a^3}$$

$$L_2 : \frac{x^1 - x_o^1}{\frac{-a^1 x_o^2}{a^2}} = \frac{x^2 - x_o^2}{\frac{a^2 x_o^1}{a^1}} = \frac{x^3}{a^3}$$

حيث الرواسم (المولدات) تمر بالنقطة $\left(x_o^1, x_o^2, o\right)$ ويوازيان الاتجاه

$$\left(\pm \frac{a^1 x_o^2}{a^2}, \mp \frac{a^2 x_o^1}{a^1}, a^3\right)$$

(٣) أي راسمين من عائلتين مختلفتين يقعان في مستوى واحد ويتوازيان إذا كان يمران بنهايتي قطر للقطع الناقص الحلقي.

$$\left(\frac{x^1}{a^1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 = 1, x^3 = 0$$

(٤) أي راسمين ينتميان لعائلة واحدة لا يقعان في مستوى واحد.

مثال (٤) : أوجد رواسم الجسم المكافئ الزائدي (سطح السرج) Saddle Surface

الحل: بالنسبة لمجسم القطع المكافئ الزائدي

$$a^2 \left(x^1\right)^2 - a^1 \left(x^2\right)^2 = 2 a^1 a^2 x^3 , a^1, a^2 > 0$$

يمكن إثبات أن رواسمه تنقسم إلى عائلتين إحداهما توازي المستوى $\sqrt{a^2}\ x^1 - \sqrt{a^1}\ x^2 = 0$ والأخرى توازي المستوى $\sqrt{a^2}\ x^1 + \sqrt{a^1}\ x^2 = 0$

وبالتالي يمكن أن نلاحظ أن المستوى $x^1 o x^2$ يقطع مجسم القطع المكافئ الزائدي في زوج من المستقيمات

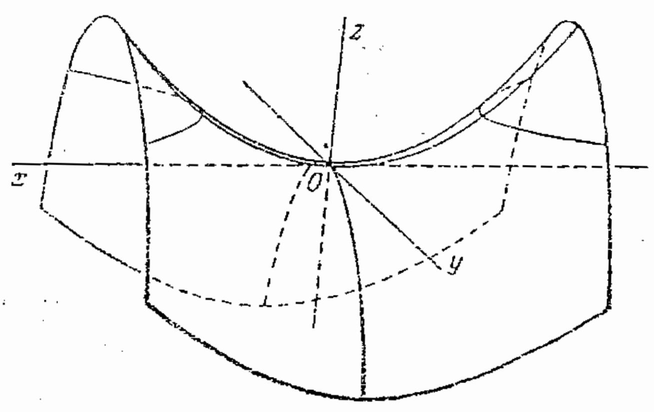
$$L_1 : \frac{x^1}{\sqrt{a^1}} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2}} = 0 , x^3 = 0 ,$$

$$L_2 : \frac{x^1}{\sqrt{a^1}} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2}} = 0 , x^3 = 0 ,$$

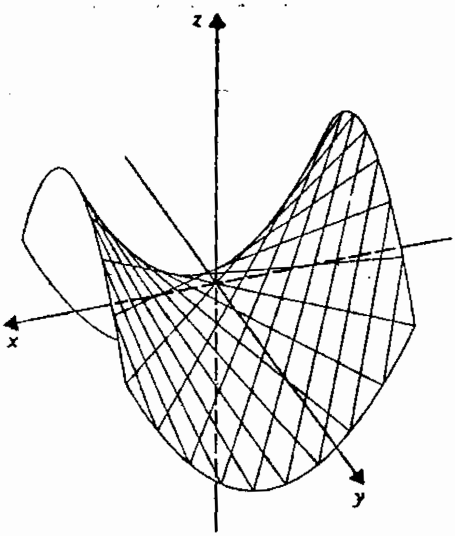
وبالتالي تصبح مجموعتا رواسمه هي :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a^2}\, x^1 - \sqrt{a^1}\, x^2 &= 2\lambda\, a^1 x^3 \\ \lambda\left(\sqrt{a^2}\, x^1 + \sqrt{a^1}\, x^2\right) &= a^2 x^3 \end{aligned}\right\} ,\lambda \in R$$

$$\left.\begin{aligned} \mu\left(\sqrt{a^2} + \sqrt{a^1}\, x^2\right) &= 2a^1 x^3 \\ \sqrt{a^2}\, x^1 - \sqrt{a^1}\, x^2 &= \mu\, a^2 x^3 \end{aligned}\right\} ,\mu \in R$$

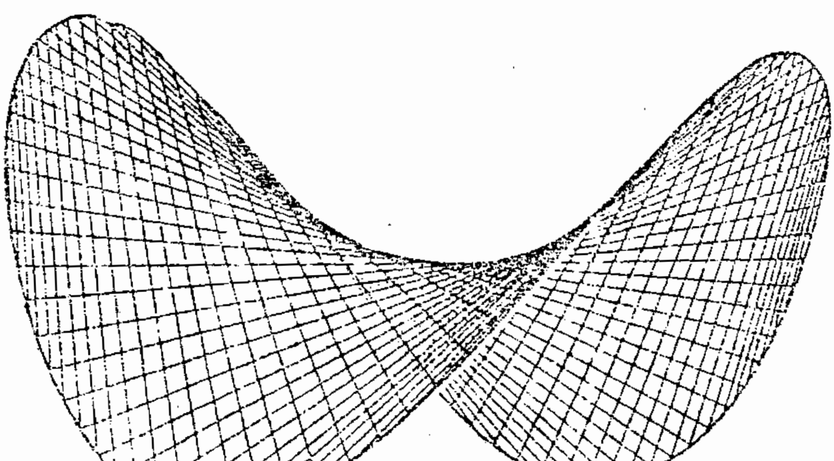


شكل (٤)



شكل (٥)

ونشاهد في الشكل الجسم المكافئ الزائدي ومجموعتي رواسمه المستقيمة.



شكل (٦)

وقد استخدم الروس فكرة الطابع المسطر للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة في المنشآت الصناعية وتستخدم بكثرة في أبراج المياه والهوائيات اللاسلكية العالية لأنها خفيفية ومتينة.

في العرض السابق بينا أنه من بين سطوح الدرجة الثانية يوجد سطوح مسطرة أي سطوح تتكون من مستقيمات : المخروطات والأسطوانات والمجسم الزائدي ذو الطية الواحدة والمجسم المكافئ الزائدي وهذه الحقيقة ليست واضحة بمجرد النظر غير أنه من السهل إثباتها جبريا. ونعطي الآن الإثبات في حالة الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة كمثال.

مثال (٥): أوجد جبريا رواسم المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة

الحل: نكتب المعادلة القياسية للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة على الصورة

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

بالتحليل لكل طرف نحصل على :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right) \qquad (1)$$

نعتبر معادلتي الدرجة الأولى

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned} \qquad ,\ \alpha,\beta\in R \qquad (2)$$

حيث $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ ولقيمة ثابتة من قيم α,β فإن المعادلتين (2) تعرفان معا مستقيما.

وبتغير α,β نحصل على عدد لانهائي من المستقيمات إذا ضربنا كل طرفين منـــاظرين للمعادلتين (2) في بعضهما نحصل على المعادلة (1).

ومن هنا ينتج أن كل مستقيم من هذه المستقيمات يقع كلية على الجسم الزائـــدي ذي الطية الواحدة.

نبين أخيرا أن بكل نقطة من نقط الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة يمر مستقيم واحـــد وفقط مستقيم واحد من مجموعة المستقيمات المذكورة.

نفرض أن $M_o(x_o,y_o,z_o)$ نقطة اختيارية على الجسم الزائدي ذي الطية الواحـــدة فإن :

$$\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)=\left(1+\frac{y_o}{b}\right)\left(1-\frac{y_o}{b}\right) \tag{3}$$

وسنبحث عن العددين α,β اللذين يمر المستقيم المناظر لهما من المجموعة (2) بالنقطة M_o. وحيث أن احداثيات النقطة M_o يجب أن تحقق معادلتا هذا المستقيم، إذن

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y_o}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x_o}{a}-\frac{z_o}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y_o}{b}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

وإذا كان $1+\frac{y_o}{b}\neq 0$ نجد من المعادلة الأولى في هذه المجموعة أن $\beta=k\,\alpha$ حيث

$$k=\frac{\frac{x_o}{a}+\frac{z_o}{c}}{1+\frac{y_o}{b}} \tag{5}$$

وعندما تكون $\beta=k\,\alpha$ تحقق أيضا المعادلة الثانية من المجموعة (4) فنحصـــل علـــى زوج من المعادلات محدد تماما :

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

$$k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}$$

يناظر مستقيما واحدا (تقاطع مستويين) فقط وهذا المستقيم يمر بالنقطة M_o .

أما إذا كانت $1+\frac{y_o}{b}=0$ فإن العلاقة (5) تفقد معناها. وفي هذه الحالة يكون $1-\frac{y_o}{b}\neq 0$ وبالتالي يمكن إثبات أنه في هذه الحالة أيضا يمر بالنقطة M_o مستقيم واحد ووحيد من المجموعة (2) وعلى هذا الأساس تعرف المعادلتان (2) عند قيم α, β المختلفة مجموعة لانهائية من المستقيمات الواقعة على الجسم الزائدي ذي الطية الواحدة وتغطيه كلية باتصال. وتسمى هذه المستقيمات بالرواسم المستقيمة للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة.

علاوة على المعادلتين (2) ومثلهما يمكن تكوين المعادلتين :

$$\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\qquad(6)$$

والمعادلتان (6) تعرفان أيضا مجموعة من الرواسم المستقيمة للمجسم الزائدي ذي الطية الواحدة، علما بأنها تختلف عن تلك المجموعة المعرفة بالمعادلتين (2). ولذا يسمى المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة سطح مسطر مرتين doubly rulled.

<u>مثال (٦):</u> بالمثل يمكن برهان نفس الحقيقية بالنسبة للسطوح المسطرة المذكورة.

<u>مثال (٧):</u> أوجد أطوال الشكل الرباعي المكون من نقاط تقاطع الأربع رواسم للسطح الزائدي

$$\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=49 \qquad (1)$$

والتي تمر بالنقطتين $M_1 \equiv (10,5,1), M_2 \equiv (14,2,-2)$

<u>الحل:</u> نكتب المعادلة (1) في الصورة

$$\left(\frac{x}{2}-z\right)\left(\frac{x}{2}+z\right)=(7-y)(7+y)$$

ويمكن أن نرى أن معادلات عائلتي المولدات للسطح الزائدي هي:

$$\frac{x}{2}-z=\lambda(7-y),\ \ \lambda\left(\frac{x}{2}+z\right)=7+y \qquad (2)$$

$$\frac{x}{2}-z=\mu(7+y),\ \mu\left(\frac{x}{2}+z\right)=7-y \qquad (3)$$

المولدات (2) ,(3) يمرا خلال النقاط M_2, M_1 إذا حققت النقاط المعـــادلات ,(2) (3) وعليه نحصل على زوج من القيم λ, μ كالآتي:

$$(\lambda,\mu)=\left(2,\frac{1}{3}\right),(\lambda,\mu)=\left(\frac{2}{5},1\right)$$

إذن أزواج الخطوط المستقيمة المارة خلال النقطتين M_2, M_1 تعطى من

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{2}-z=2(7-y),2\left(\frac{x}{2}+z\right)=7+y &(4)\\ &\frac{x}{2}-z=\frac{1}{3}(7+y),\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+z\right)=7-y &(5)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{2}-z=\frac{9}{5}(7-y),\frac{9}{5}\left(\frac{x}{2}+z\right)=7+y &(6)\\ &\frac{x}{2}-z=7+y\ ,\frac{x}{2}+z\ =7-y &(7)\end{aligned}\right\}$$

بحل أزواج المعادلات (4) ,(7) وكذلك (5) ,(6) نجد أن نقاط التقاطع الأخرى هي

$$M_3 = \left(14, \frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right), M_4 = \left(\frac{12}{2}, \frac{77}{16}, \frac{21}{16}\right)$$

وعليه يمكن حساب أطوال الشكل الرباعي $M_i\,M_j$ $i, j = 1, \ldots, 4$ كالآتي :

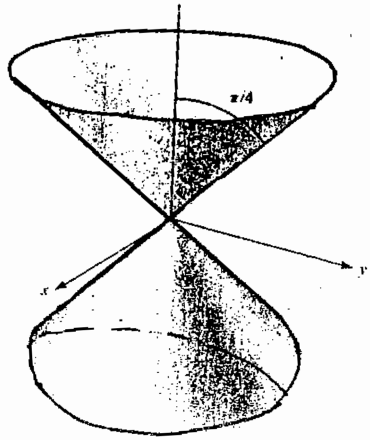
$$\sqrt{98}/16,\ \sqrt{308}/3, \sqrt{2}/3, \sqrt{7970}/16$$

(٣.٧) المخروط العام : General Conical Surface (Cone)

وفي الحالة العامة نـــرى أن المعادلـــة $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ متجانسة $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$., $n \in R$ ـ أي كل حدودها من نفس الدرجة الثانية وبالتالي تتحقق الخاصية الهندسية الآتية:ـــ

إذا وقعت نقطة ما M (مختلفة عن نقطة الأصل) على هذا السطح، فإن كـــل نقـــط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة M تقع أيضا على هذا السطح.

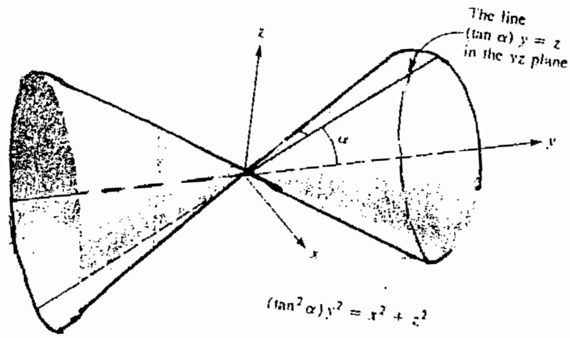
وبعبارة أخرى يمكن القول أن السطح المعرف بمعادلة متجانســـة إنمـــا يتكـــون مـــن مستقيمات مارة بنقطة واحدة هي بالذات نقطة الأصل ويسمى هذا السطح بالســـطح المخروطي ونسمي المستقيمات برواسمه ونسمى النقطة التي يمر بهـــا جميـــع رواســـم المخروط برأس المخروط ويكون لدينا مخروط مزدوج double cone كما هو مبـــين بشكل (١)



شكل (١)

ويمكن استنتاج معادلة المخروط المزدوج القائم والذي زاوية رأسه 2α كالأتي :
بدوران الخط المستقيم $L : z = y \tan \alpha$ في المستوى y z حول محور y . النقطة (x, y, z) تكون على المخروط المزدوج إذا كانت النقطة $\left(0, y, \sqrt{x^2 + z}\right)$ تقع على الخط C بمعنى أن $y \tan \alpha = \sqrt{x^2 + z^2}$ ، وبالتربيع نحصل على شكل (٢)

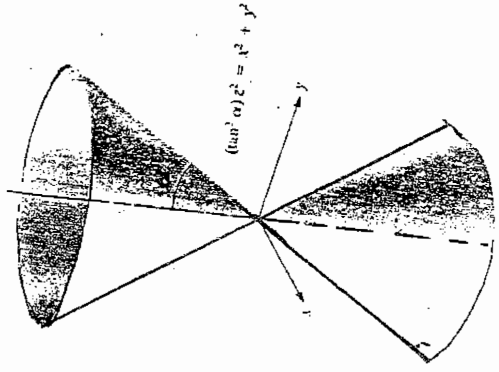
$$x^2 + z^2 - \left(\tan^2 \alpha\right) y^2 = 0$$



شكل (٢)

بالمثل المخروط الموضح بشكل (٣) له المعادلة

$$x^2 + y^2 - \left(\tan^2 \alpha\right) z^2 = 0$$



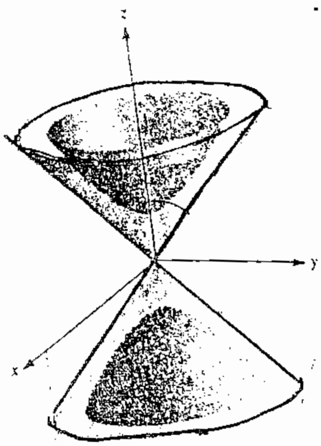
شكل (٣)

عموما المعادلة

$$x^2 + y^2 - k z^2 = 0 \quad , \quad K > 0 \qquad (1)$$

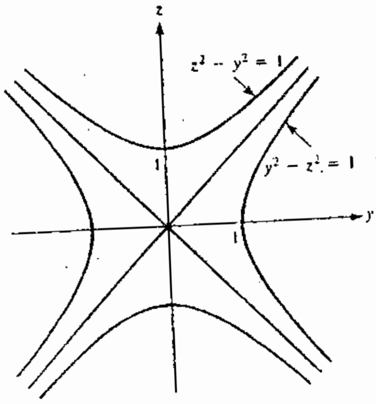
تمثل مخروط مزدوج قائم، زاوية رأسه 2α تحقق $\tan^2\alpha = k$.

مثال (١): الجسم الزائدي ذو الطية الواحدة والمخروط المزدوج والجسم الزائدي ذو الطيتين يمكن رسمهم معا متداخلين. لنرى ذلك، نعتبر، كمثال، القطاعات الزائدة $y^2 - z^2 = 1 , z^2 - y^2 = 1$ في المستوى $y\,z$ ولهما نفس الخطوط التقاربية $z = \pm y$ كما هو واضح في الشكل (٤).



شكل (٤)

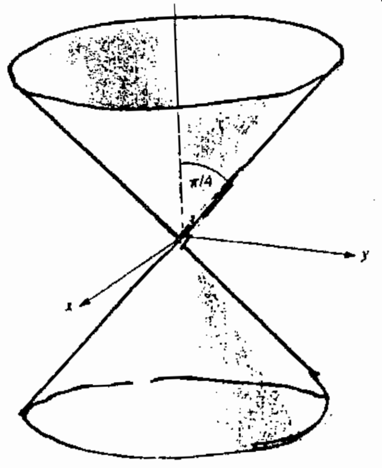
الآن بدوران المنحنيات الموجودة في شكل (٤) حول محور z. نحصل على الثلاثة سطوح المطلوبة كما هو مبين بالشكل (٥).



شكل (٥)

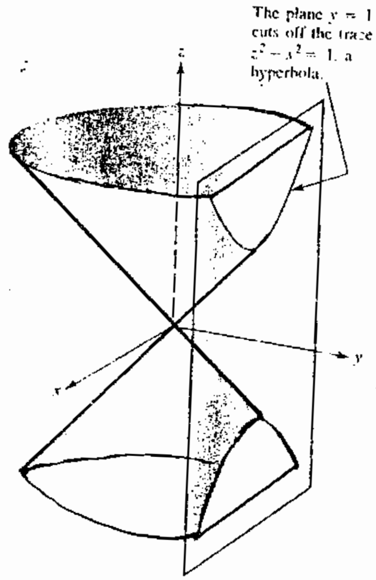
مثال (٢): أوصف السطح $z^2 = x^2 + y^2$ مع الرسم.

الحل: بوضع $k = 1$ في (1) نحصل على معادلة السطح المعطى وهي تصف مخروط مزدوج قائم دائري فيه $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ كما مبين بشكل (٦).



شكل (٦)

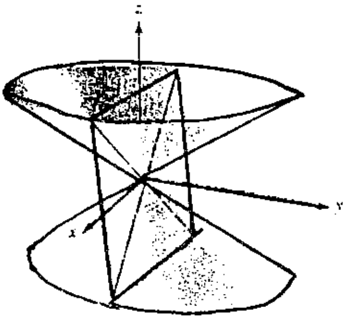
نعتبر مقاطع السطح بمستويات توازي المستوى x y وهي دوائر ومقــــاطع الســطح بمستويات توازي المستوى x z وهي قطاعات زائدية كما هو موضح بشكل (٧).



شكل (٧)

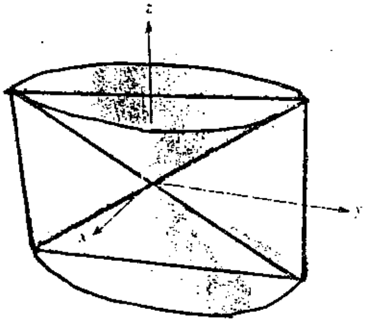
<u>مثال (٣):</u> ادرس مقاطع السطح $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$ وبين نوعه موضحا ذلك بالرسم.

<u>الحل:</u> هذا السطح مخروط ناقص elliptical cone (من البــاب الرابــع) ومقاطعــه بالمستويات $z = k$ هي قطاعات ناقصية تزيد في المساحة كلمـــا زادت k. ومقاطعــه بالمستوى $y = 0$ هي خطوط مستقيمة $z = \pm x$. ومقاطعه بالمســتوى $x = 0$ هــي خطوط مستقيمة $z = \pm \frac{y}{\sqrt{3}}$. ونوضح ذلك في شكل (٨).



Trace in xz plane

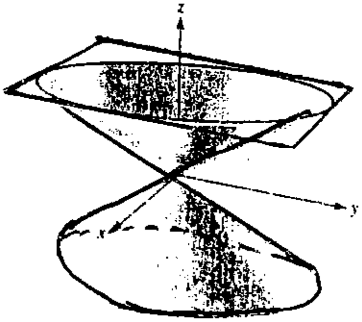
The surface $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$



Trace in yz plane

The surface $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$

شكل (٨)



Trace in plane $z = k$

The surface $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{3}$

تمارين (٧)

١ــ بين أن المستوى $\frac{x\,x_o}{a^2} - \frac{y\,y_o}{b^2} + \frac{z+z_o}{2} = 0$ المار خلال النقطة (x_o, y_o, z_o) على الجسم المكافئ الزائدي $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + z = 0$ يقطع هذا الجسم في راسمين ينتميان لعائلتين مختلفتين من رواسمة.

٢ــ أوجد رواسم الجسم المكافئ الزائدي $z = a\,x\,y$ وبين أنه مسطر بطريقتين.

٣ــ كون معادلة السطح المولد بواسطة خطوط مستقيمة توازي المستوى xy وتقطع خطين مستقيمين مختلفين (غير متقاطعين).

إرشاد : لحل تمرين (3) نتبع الآتي:ــ

اتجاه المولد عمودي على العمودي على المستوى xy أي عمودي على محور z ولذلك يمكن أخذ هذا الاتجاه في الصورة (ℓ, m, o) حيث $\ell^2 + m^2 = 1$، تكون معادلتة هي $\frac{x - x_o}{\ell} = \frac{y - y}{m} = \frac{z - z_o}{o}$. الدليل يمكن أخذه بصورة عامة كالآتي:

$$x = 0, a_{11}\,z^2 + 2\,a_{12}\,z\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,b_1\,z + 2\,b_2\,y + c = 0$$

بشرط أن مميز هذه المعادلة يساوي الصفر، أي أن $\Delta = 0$، ولكي يكون المستقيمان متوازيين يجب أن يتحقق $\delta = 0, \delta = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2$. حيث (x_o, y_o, z_o) هي نقطة تقاطع المولد مع الدليل.

٤ــ أكتب معادلات عائلات المولدات للسطوح الزائدية H وحدد أزواج الخطوط المستقيمة من عائلات الخطوط التي تمر خلال النقطة المعطاة M_o

(i) $H:\ x^2+9y^2-z^2=9,\ M_o=\left(3,\frac{1}{3},-1\right)$

(ii) $H:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,\ M_o=\left(-1,\frac{4}{3},2\right)$

٥ــ أوجد معادلة السطح المكافئ الزائدي المـــار بـــالنقطتين $M_1\equiv\left(8,3,\frac{3}{2}\right)$ ، $M_2\equiv\left(-4,3\sqrt{3},-1\right)$ إذا علم أن مقطع السطح بالمستوى $x=0$ هو قطـــع مكافئ معادلته $x=0,\ y^2=-2z$

٦ــ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك في الفراغ بحيث يكون الفرق بين بعديها عـــن النقطتين $(2,-4,1)$, $(2,4,1)$ يساوي 6 وحدات.

٧ــ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بشرط أن يكون مجموع بعديها عن النقطتـــين $(c, 0, 0)$، $(-c, 0, 0)$ مقدار ثابت.

٨ــ أوجد عائلات رواسم السطوح المسطرة الآتية

(i) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$

(ii) $9x^2-y^2=42$