الباب السابع

دراسة تفصيلية للمعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية (مسائل القيم الحدية)

Boundary Value Problems (Advanced Treatment)

مقدمة : سوف ندرس فيما يلي بالتفصيل المعادلات التفاضلية الجزئية للفيزياء الرياضية وهي:

1. معادلة الإنتشار الحراري.
2. المعادلة الموجية.
3. معادلة هلمهولتز.
4. معادلة لابلاس (كحاله خاصة من معادلة هلمهولتز).

وفي كل من تلك المعادلات سوف نقوم بالحل في المسائل الخطية (في البعد الواحد) والمستوية (في بعدين) والفراغية (في ثلاثة أبعاد)، كما سندرس الحلول باستخدام الإحداثيات الكرتيزية والقطبية الكروية والإسطوانية وندرس حالات خاصة في كل نوع من تلك الإحداثيات.

تمهيد: تكامل فورييه Fourier Integral

نفرض أن الدالة $f(x)$ معرفة في المدى $(-\infty,\infty)$ وأن تكاملها على هذه المدى يكون متقاربا بمعنى وجود قيمة لهذا التكامل $\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right]$ في هذا المدى.

ونفرض أيضاً أن الدالة $f(x)$ يمكن التعبير عنها على صورة مفكوك (أو متسلسلة) فورييه في المدى $(-l,l)$ أي أن :

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos\frac{n\pi}{l}x+b_n \sin\frac{n\pi}{l}x] \qquad (1)$$

حيث:

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt, \qquad (2)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt,$$

وبالتعويض عن المعاملات في (1) نحصل على:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}[\ (\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt)\cos\frac{n\pi}{l}x$$
$$+(\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt)\sin\frac{n\pi}{l}x]$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt \qquad (3)$$

وبمقارنة $(3),(1)$ نجد أن :

$$a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt$$

وبفرض أن $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$ يكون متقارباً فإن الحد الأول في (3) عندما $l\to\infty$ يؤول إلى الصفر، وتؤول (3) إلى :

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(t-x)dt \qquad (4)$$

وبوضع $\lambda=\frac{\pi}{l}$ فإن $\frac{1}{l}=\frac{\lambda}{\pi}$ وتصبح (4)بالصورة :

$$f(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\,f(n\lambda) \qquad (5)$$

حيث

$$f(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \qquad (6)$$

ومن تعريف التكامل كنهاية مجموع فإن العلاقة (5) تؤول إلى :

$$f(x)=\int_{0}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \qquad (7)$$

وبالتعويض عن $f(\lambda)$ من (6) في (7) نحصل على :

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$$

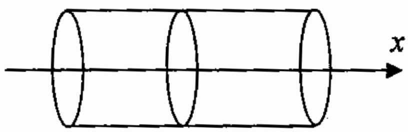
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right] d\lambda$$

هذه العلاقة تمثل التعبير عن الدالة $f(x)$ على صورة ما يعرف بتكامل فوريه (Fourier Integral)

ملحوظة: تعتبر تقنية فوريه من الطرق الهامة لحل معادلات الفيزياء الرياضية وتتكون هذه التقنية من استخدام طريقة فصل المتغيرات ثم تطبيق قاعدة التراكب، ثم إيجاد الثوابت داخل علامة المجموع بتطبيق القواعد الخاصة بتحويلات فوريه المذكورة في الباب الثالث.

مثال: معادلة الإنتشار الحراري في أسطوانة لا نهائية في الطول:

أدرس انتشار الحرارة في اسطوانة لا نهائية الطول معدنية (موصلة للحرارة) و متجانسة ومعزولة (لا يتسرب منها الإشعاع الحراري) من جميع سطحها ماعدا قاعدتيها.



المطلوب: توزيع درجات الحرارة $u(x,t)$ في أي لحظة $t > 0$ وعند أي مقطع عرضي من الاسطوانة بحيث أن محور الاسطوانة ينطبق على محور x.

رياضياً : تمثل هذه المسالة على صورة معادلة انتشار الحرارة Diffusion Equation في بعد واحد وصورتها:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t>0,-\infty<x<\infty \qquad (1)$$

حيث a ثابت يعتمد على:

1) الكثافة الحجميه للاسطوانة أي : الكتلة لوحدة الحجوم= σ

2) الحرارة النوعية لمادة الاسطوانة = C

3) معامل التوصيل الحراري لمادة الاسطوانة= λ

$$a=\frac{\lambda}{c\sigma} \qquad (2)$$

الحل المطلوب يجب أن يحقق الشرط الآتي:

عند بدء الزمن $(t=0)$: يوجد توزيع ما للحرارة صورته:

$$u(x,0)=\phi(x)$$

<u>حل المثال:</u> بطريقة فصل المتغيرات ثم تطبيق طريقة فوربيه، حيث نفرض الحل بالصورة :

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (3)$$

وهنا $u(x,t)$ تمثل دالة توزيع الحرارة على طول الاسطوانة.

بالتعويض من (3) في (1):

نكتب (1) على الصورة: $\dot{u}=au''$ ، ثم نعوض من (3):

$$X(x)\dot{T}(t)=a\,X''(x)T(t)\ , \qquad \frac{\dot{T}}{aT}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

وهنا : $\frac{\dot{T}}{aT}$ دالة في t فقط ، $\frac{X''}{X}$ دالة في x فقط ، $-\lambda^2$ ثابت.

ونحصل على المعادلتين:

$$\dot{T}+a\lambda^2\,T=0 \qquad (4)$$

$$X''+\lambda^2\,X=0 \qquad (5)$$

حل المعادلتين $(5),(4)$ يأخذ الصورة:

$$T(t)=Ce^{-a\lambda^2 t} \tag{6}$$

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \tag{7}$$

ويصبح الحل المطلوب هو:

$$u_\lambda(x,t)=(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)e^{-a\lambda^2 t} \tag{8}$$

حيث أدخلنا الثابت C في A_λ, B_λ.

وتراكب الحلول يعطي أيضاً حلا وبالتالي نحصل على :

$$\sum_\lambda u_\lambda(x,t)=u(x,t)=\sum_\lambda e^{-a\lambda^2 t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)$$

ولأن الاسطوانة لانهائية في الطول فيمكن تحويل $\sum$ إلى تكامل ونحصل على الحل التالي:

$$u(x,t)=\int_0^\infty e^{-a\lambda^2 t}(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)d\lambda \tag{9}$$

ولإيجاد الثوابت A_λ, B_λ : نطبق الشرط الابتدائي: $u(x,0)=\phi(x)$

ومن (9) :

$$\phi(x)=\int_0^\infty(A_\lambda\cos\lambda x+B_\lambda\sin\lambda x)d\lambda \tag{10}$$

تكامل فورييه Fourier Integral:

$$\phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\int_{-\infty}^\infty\phi(k)\cos\lambda(k-x)dk]d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[(\int_{-\infty}^\infty\phi(k)\cos\lambda k\,dk)\cos\lambda x+(\int_{-\infty}^\infty\phi(k)\sin\lambda k\,dk)\sin\lambda x]d\lambda \tag{11}$$

نفرض أن الدالة $\phi(x)$ المعطاة بالعلاقة (10) والتي تدل على التوزيع الحراري عند بداية الزمن يمكن التعبير عنها على صورة تكامل فورييه (المعادلة 11).

بمقارنة العلاقتين (11),(10)نحصل على :

$$A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\phi(k)\cos\lambda k\,dk \tag{12}$$

$$B_{\lambda} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(k)\sin\lambda k\, dk \tag{13}$$

وبالتعويض من (12),(13) في (9) نحصل على :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}[(\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\cos\lambda k\, dk)\cos\lambda x + (\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\sin\lambda k\, dk)\sin\lambda x]d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)(\cos\lambda k\cos\lambda x + \sin\lambda k\sin\lambda x)dk]d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}[\int_{-\infty}^{\infty}\phi(k)\cos\lambda(k-x)\, dk]d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\phi(k)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}\cos\lambda(k-x)d\lambda]dk \tag{14}$$

وهو الحل المطلوب للمسألة.

<u>مسألة</u>: تكامل بواسون للانتشار الحراري في اسطوانة لانهائية الطول:

أحسب التكامل:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}\cos\lambda(k-x)\, d\lambda$$

واثبت أنه يساوي:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{(k-x)^2}{4at}} \tag{15}$$

ويعرف هذا بتكامل بواسون Poisson Integral .

ويصبح الحل (14) بالصورة الآتية:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(k)}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(k-x)^2}{4at}}\, dk \tag{16}$$

تسمى هذه العلاقة بعلاقة بواسون Poisson Relation لانتشار الحرارة في اسطوانة معزولة من الجوانب ولانهائية الطول.

إيجاد التكامل(15):

بأخذ:

$$z=\lambda\sqrt{at} \quad , \qquad \beta=\frac{(k-x)}{\sqrt{at}}$$

$$z^2=a\lambda^2 t \rightarrow \lambda=\frac{z}{\sqrt{at}} \quad \rightarrow d\lambda=\frac{1}{\sqrt{at}}dz$$

فيصبح التكامل:

$$I=\int_0^{\infty} e^{-a\lambda^2 t}\cos\lambda(k-x)\,d\lambda \;=\frac{1}{\sqrt{at}}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz \;=\frac{1}{\sqrt{at}}I(\beta)$$

$$I(\beta)=\int_0^{\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz,$$

$$I'(\beta)=\frac{dI}{d\beta}=-\int_0^{\infty} e^{-z^2}\,z\sin\beta z\,dz$$

التكامل بالتجزيء:

$$\int u\,dv=uv|-\int v\,du$$

$$dv=-e^{-z^2}(z)\,dz, \qquad u=\sin\beta z$$

$$v=\frac{1}{2}e^{-z^2} \quad , \qquad du=\beta\cos\beta z\,dz$$

$$I'(\beta)=\frac{1}{2}e^{-z^2}\sin\beta z\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}[\frac{1}{2}e^{-z^2}\beta\cos\beta z]dz$$

$$=-\frac{\beta}{2}\int_0^{\infty} e^{-z^2}\cos\beta z\,dz=-\frac{\beta}{2}I(\beta) \tag{17}$$

بالتكامل:

$$I(\beta)=Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}$$

ولإيجاد قيمة C: نضع $\beta = 0$ فنحصل على:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C$$

وبالتعويض في (18):

$$\therefore\ I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{-\beta^2}{4}}$$

$$\therefore\ I = \int_0^\infty e^{-a\lambda^2 t} \cos\lambda(k-x)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{at}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{\beta^2}{4}}\right]$$

وبوضع قيمة $\beta = \dfrac{(k-x)}{\sqrt{at}}$ نحصل على الصورة النهائية للتكامل I بالصورة:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\frac{\pi}{t}}\ e^{-\frac{(k-x)^2}{4at}}$$

وهو المطلوب.

ملحوظة:

فى الصفحات التالية نقوم بدراسة مسائل القيم الحديه الآتية:

(١) مسائل الانتشار الحرارى (فى بعد واحد وبعدين وثلاثة أبعاد).

(٢) الحركة الموجية فى الإحداثيات الكرتيزية (فى بعد واحد وبعدين وثلاثة أبعاد).

(٣) معادلة هلمولتز (فى الإحداثيات القطبية الكروية والإحداثيات الاسطوانية).

(٤) المعادلة الموجيه (فى الإحداثيات القطبية الكروية والإحداثيات الاسطوانية).

(٥) معادلة لابلاس فى الإحداثيات الكروية (فى بعدين وثلاثة أبعاد).

(٦) معادلة لابلاس فى الإحداثيات القطبية (التوافقيات الدائرية).

أولا: مسائل الإنتشار الحرارى:

(١) الانتشار الحرارى في بعد واحد:

مثـــال (١): أوجد توزيع الحرارة [درجة الحرارة $u = T(x,t)$] على طول قضيب طوله l لانهائي في الطول ومعادلة الانتشار الحراري له هي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

تحت الشروط :

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, u(x,\infty) = 0$$

الحل: بحل المعادلة (1) بفصل المتغيرات وذلك بأخذ: $u(x,t) = X(x)T(t)$

والتعويض في (1) نجد أن حل المعادلة (1) يكون:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \tag{2}$$

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t} \tag{3}$$

مع الشروط الحدية :

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{4}$$

$$U(x,\infty) = 0 \tag{5}$$

بتطبيق الشروط الحدية على المعادلة (2) نحصل على:

$$A = 0 \tag{6}$$

$$\sin\lambda l = 0 \to \lambda l = n\pi \to \lambda = \frac{n\pi}{l} \tag{7}$$

حيث n عدد صحيح.

$$u = X.T = B\sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}t}$$

وبالجمع على كل قيم n [بإستخدام قاعدة التراكب – Superposition]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{\frac{-n^2\pi^2}{l^2}t}$$

وهو المطلوب.

مثال (2): حل المعادلة

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad (1)$$

الدالة على الانتشار الحراري على طول قضيب طوله l موضوع على محور x، مع الشروط الحدية:

$$\theta(0,t)=\theta(l,t)=0\ , \qquad t>0 \qquad (2)$$

$$\theta(x,0)=x\quad , \qquad 0<x<l \qquad (3)$$

ملحوظة: الشرط (3) يعني أن درجة الحرارة الابتدائية $(t=0)$ هي

$$\theta(x,0)=x=F(x)$$

الحل: يمكن كتابة الحل العام للمسألة بالصورة:

$$\theta(x,t)=X(x)T(t)$$

حيث

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$

$$T(t)=Ce^{-\lambda^2a^2t}$$

من الشرط (2) نجد أن :

$$A=0 \qquad (4)$$

$$\sin\lambda l=0\rightarrow\lambda=\frac{n\pi}{l} \qquad (5)$$

$$\theta=B\sin\frac{n\pi}{l}x.e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

بالجمع على كل قيم n :

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x.e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \qquad (6)$$

حيث :

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (7)$$

والتي نحصل عليها بضرب العلاقة :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

حيث: $F(x)$ دالة اختيارية تدل على الحرارة عند بداية الزمن $([t=0])$.

في $\sin\frac{n\pi x}{l}$ والتكامل من $x=0$ إلى $x=l$.

<u>في المثال :</u> $\theta(x,t)=x=F(x)$

بالتعويض في (7)نحصل على :

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

بحساب التكامل والتعويض عنه في (6) نحصل على النتيجة الآتية:

$$\theta(x,t)=\frac{2l}{\pi}[e^{-(\frac{\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{2}e^{-(\frac{2\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{3}e^{-(\frac{3\pi a}{l})^2 t}\sin\frac{3\pi x}{l}-.........]$$

<u>**مثال (3):**</u> أوجد توزيع الحرارة $u(x,t)$ على قضيب طوله l موضوع على محور x ومعزول عزلاً تاماً ونهايتيه محفوظتان عند درجة حرارة صفر ، بينما درجة حرارته الابتدائية تعطى بالعلاقة :

$$F(x)=\begin{cases} T_0 & 0<x<\frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$$

<u>**الحل:**</u> معادلة الانتشار الحراري [مسألة القيمة الحدية] هي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

مع الشروط الحدية:

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad (2)$$

$$u(x,0)=F(x)=\begin{cases} T_0 & 0<x<\frac{l}{2} \\ 0 & \frac{l}{2}<x<l \end{cases} \qquad (3)$$

الحل المطلوب هو [كما سبق]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x.e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t} \qquad (4)$$

حيث:

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

في المثال:

$$B_n=\frac{2T_0}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{4T_0}{n\pi}\sin^2\frac{n\pi}{4} \qquad (5)$$

$$(\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2})$$

بالتعويض في (4):

$$u(x,t)=\frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^2\frac{n\pi}{4}.\sin\frac{n\pi}{l}x.e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}$$

وهو المطلوب.

<u>مثال (4):</u> حل معادلة الانتشار الحراري [في بعد واحد]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0<x<\pi, \quad t>0$$

تحت الشروط الحدية :

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0\,, \quad u(x,0)=\sin x=F(x)$$

<u>الحل:</u> الحل العام لهذه المسالة هو [الحصول عليه بالتفصيل يعطى كمسألة]:

$$u(x,t)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (1)$$

حيث: B_0 تناظر $n=0$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (2)$$

$$B_0 = \frac{A_0}{2} \qquad (3)$$

[يمكن الرجوع في هذا إلى المعلومات التي سبق ذكرها عند الحديث عن تحويل فورييه (الباب الرابع)]

<u>في المثال</u> : درجة الحرارة الابتدائية (عند $t=0$) هي: $F(x)=\sin x$

والطرفان $x=0, x=l=\pi$ معزولان حراريا $[u=0]$ وفي هذه الحالة تؤول العلاقة (1) إلى الآتي :

$$u(x,t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-(na)^2 t}\cos nx$$

حيث:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx = \begin{cases} o & (n\ odd) \\ \frac{-4}{\pi}[\frac{1}{4m^2-1}] & (2m = n\,even) \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}$$

$$B_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2}(\frac{4}{\pi}) = \frac{2}{\pi}$$

ويصبح الحل المطلوب هو:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}e^{-(2ma)^2 t}\cos 2mx$$

(2) <u>الانتشار الحراري في بعدين:</u> تمثل معادلة الانتشار الحراري بالصورة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \qquad (1)$$

<u>مثال (1):</u> انتشار الحرارة في صفيحة مستوية مستطيلة الشكل أبعادها (a,b) وأحرفها الأربعة $x=0, x=a, y=0, y=b$ عند درجة حرارة تساوي صفر، وتتعرض الصفيحة لدرجة حرارة ابتدائية (عند $t=0$) تحددها الدالة الاختيارية $F(x,y)$.

المطلوب في المثال: إيجاد الحرارة [أو التوزيع الحراري عند أي نقطة على السطح مع مرور الزمن أي : $u(x,y,t)$].

الشروط الحدية :

$$(i)\ u(0,y,t)=0$$
$$(ii)\ u(a,y,t)=0$$
$$(iii)\ u(x,0,t)=0$$
$$(iv)\ u(x,b,t)=0$$

الشرط الابتدائي :

$$(\text{v})\ u(x,y,0)=F(x,y)$$

<u>الحل</u>: باستخدام طريقة فصل المتغيرات وذلك بفرض أن:

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t) \qquad (2)$$

فمن (2) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X.Y\frac{dT}{dt}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=Y.T\frac{d^2X}{dx^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X.T\frac{d^2Y}{dy^2}$$

بالتعويض في (1):

$$\frac{1}{k^2T}\frac{dT}{dt}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (3)$$

[وذلك بعد القسمة على XYT]

بوضع :

$$\frac{1}{k^2T}\frac{dT}{dt}=-\lambda^2 \ ,\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\lambda_1^2 \ ,\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\lambda_2^2$$

بحيث أن :

$$\lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2$$

الحل العام للمعادلات الثلاثة :

$$T=Ge^{-(\lambda k)^2 t} \tag{4}$$

$$X=A\cos\lambda_1 x+B\sin\lambda_1 x \tag{5}$$

$$Y=C\cos\lambda_2 y+D\sin\lambda_2 y \tag{6}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (1)بالصورة:

$$u(x,y,t)=(A\cos\lambda_1 x+B\sin\lambda_1 x)(C\cos\lambda_2 y+D\sin\lambda_2 y)e^{-(\lambda k)^2 t} \tag{7}$$

وبتطبيق الشروط الحدية المعطاة : فمن الشرط (i) نجد أن:

$$0=u(0,y,t)=A(C\cos\lambda_2 y+D\sin\lambda_2 y)e^{-(\lambda k)^2 t}$$

ومنها :

$$A=0 \tag{8}$$

ومن الشرط (ii):

$$\sin\lambda_1 a=0\rightarrow\lambda_1 a=m\pi\ , \qquad \therefore\lambda_1=\frac{m\pi}{a} \tag{9}$$

وبالمثل من الشرطين (iv)، (iii) نحصل على:

$$C=0 \tag{10}$$

$$\lambda_2=\frac{n\pi}{b} \tag{11}$$

حيث m,n عددان صحيحان.

وبذلك تأخذ العلاقة (7) الصورة الآتية:

$$u(x,y,t)=B_{mn}e^{-\lambda_{mn}^2k^2t}\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y$$

حيث:

$$\lambda^2=\lambda_{mn}^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)$$

وبالجمع على كل القيم الممكنة لـ m,n نحصل على الحل العام بالصورة:

$$u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}\,e^{-\lambda_{mn}^2k^2t}\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (12)$$

حيث B_{mn} ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشرط الابتدائي (v)

$$F(x,y)=u(x,y,0)=\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \qquad (13)$$

وباستخدام تقنية فورييه : بضرب (13) في $\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$ والتكامل بالنسبة إلى x من 0 إلى a وبالنسبة إلى y من 0 إلى b نحصل على:

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy \qquad (14)$$

وهي العلاقة التي تعطينا الثوابت الاختيارية في المعادلة (12).

<u>**مثال (2):**</u> صفيحة مستطيلة الشكل محدودة بالخطوط :

$x=0\ ,y=0\ ,x=a\ ,y=b$

وذات توزيع حراري ابتدائي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$F(x,y)=B\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

فإذا كانت الأحرف عند درجة حرارة صفر وتعرضت الصفيحة للتسخين فأوجد التوزيع الحراري عند أي نقطة في السطح مع مرور الوقت أي الدالة $u(x,y,t)$.

<u>**الحل:**</u> من العلاقة (12) التي سبق إيجادها يكون الحل العام لهذا المثال هو :

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}B_{mn}\,e^{-\lambda_{mn}^2k^2t}\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y$$

حيث B_{mn} ثوابت اختيارية تعطى بالعلاقة (14) السابق ذكرها

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

وفي المثال:

$$F(x,y)=B\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\therefore B_{mn}=\frac{4\pi}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$$

وحيث أن:

$$\int_0^b \sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy=\begin{cases}\frac{b}{2} & (n=1)\\ 0 & (n=2,3,4,......)\end{cases}$$

$$B_{m1}=\frac{4B}{ab}\int_0^a \frac{b}{2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

وبأخذ $m=1$:

$$B_{11}=\frac{4B}{ab}[\frac{ab}{4}]=B$$

أيضاً :

$$\lambda_{11}^2=\pi^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$$

وبذلك نحصل على الحل النهائي بالصورة الآتية :

$$u(x,y,t)=B_{11}e^{-\lambda_{11}^2 k\,t}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$=Be^{-k^2\pi^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})t}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

وهو المطلوب.

(3) **معادلة الانتشار الحراري في ثلاثة أبعاد:** المعادلة تأخذ الصورة:

(1) $$\nabla^2 u=k^2\frac{\partial u}{\partial t}\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial u}{\partial t}$$

[في الإحداثيات الكرتيزية]

حيث : $u=u(x,y,z,t)$

نستخدم طريقة فصل المتغيرات وذلك بكتابة:

(2) $$u(x,y,z,t)=X(x).Y(y).Z(z).T(t)$$

ومنها :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=XYZ\frac{dT}{dt},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=YZT\frac{d^2X}{dx^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=XZT\frac{d^2Y}{dy^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=XYT\frac{d^2Z}{dz^2}$$

بالتعويض في (1) والقسمة على $XYZT$ نحصل على :

$$\frac{1}{k^2T}\frac{dT}{dt}=\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

وبأخذ :

$$\frac{1}{k^2T}\frac{dT}{dt}=-\lambda^2,\ \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\lambda_1^2\ ,\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-\lambda_2^2\ ,\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\lambda_3^2$$

حيث :

$$\lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

نحصل على الحلول الآتية :

$$X=A_1\cos\lambda_1x+B_1\sin\lambda_1x=a\cos(\lambda_1x+\varepsilon\,\lambda_1)$$

وبالمثل :

$$Y=b\cos(\lambda_2y+\varepsilon\lambda_2)$$
$$Z=c\cos(\lambda_3z+\varepsilon\,\lambda_3)$$
$$T=d\,e^{-(\lambda k)^2t}=d\,e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)k^2t}$$

ويصبح الحل العام :

$$u(x,y,z,t)=A\cos(\lambda_1x+\varepsilon\lambda_1).$$
$$\cos(\lambda_2y+\varepsilon\lambda_2).\cos(\lambda_3z+\varepsilon\lambda_3)e^{-(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)k^2t}$$

وبالجمع على قيم $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ نحصل على الحل النهائي بالصورة :

$$u(x,y,z,t)=\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3=0}^{\infty}A_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\cos(\lambda_1x+\varepsilon\lambda_1).$$
$$\cos(\lambda_2y+\varepsilon\lambda_2)\cos(\lambda_3z+\varepsilon\lambda_3)e^{-k^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t}$$

وهو المطلوب .

مسائل على معادلة الانتشار الحراري

1. أوجد حلا لمعادلة الانتشار الحراري (في بعد واحد)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < a\,, \quad t > 0$$

حيث k معامل الانتشار الحراري (ثابت) ، a طول القضيب (الموضـــوع على محور x) تحت الشروط الحدية والابتدائية :

$$u(x,0) = 0 \qquad ,0 < x < a$$

$$u_x\big|_{x=a} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \qquad ,t > 0$$

$$u(0,t) = u_0 = const. \qquad ,t > 0$$

2. أوجد حلاً لمعادلة الانتشار الحراري

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

تحت الشروط :

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u_x\big|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sigma$$

حيث σ ثابت .

النتيجة:

$$u(x,t) = \frac{2\sigma}{\pi}\int_0^\infty (1 - e^{-k\lambda^2 t})\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2}\,d\lambda$$

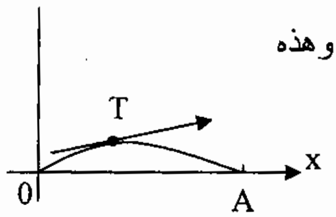
ثانيا: المعادلة الموجية – Wave Equation:

تمهيد: استخدام طريقة تقنيـــة فوريــــه (Fourier Series Technique) لحـــل المعادلة الموجية:

نفرض لدينا وتر (سلك) مهتز طوله l مثبت من طرفيه،

وأنه مشدود بقوة شد (Tension) T عند نقطة منه، وهذه

القوة تكون في اتجاه المماس.



الحركة تكون عمودية على محور x

ولذلك نقول إنها حركة مستعرضة (Transverse)

أي أن محصلة القوى الأفقية تساوي صفراً.

فإذا كانت c هي سرعة الموجة المستعرضة الناتجة عن شد الوتر فـــإن الـــصورة العامة لمعادلة هذه الموجة تكون :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث u تمثل الإزاحة الناتجة عن شد الوتر إلى أعلى .

السرعة : $\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$ ، العجلة(التسارع) : $\ddot{u}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

المعادلة (1) تمثل معادلة موجة مستعرضة (عمودية على محو x) في بعد واحد لوتر مثبت من طرفيه .

هذا النوع من المعادلات (المعادلات الموجية) تظهر في المسائل الفيزيائيـــة فـــي الحالات الآتية :

(1) حالة الاهتزازات الطولية للقضبان نتيجة ضغط قوى خارجية.

(Longitudinal vibrations of Bars)

(2) إرسال (أو بث) الإشارات الكهربية في الكابلات.

(Emission of electric signals in cables)

وتكون المعادلة الموجية في بعد واحد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

أو في بعدين :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

أو في ثلاثة أبعاد :

$$\nabla^2 u=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وقد تكون في الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ) أو الأسطوانية (ρ,ϕ,z) تماماً مثل الإحداثيات الكرتيزية (x,y,z) وسنتعرض لذلك فيما بعد.

ملاحظة : لحل المعادلة الموجية يجب تطبيق الشروط الحدية والحصول على الحل العام والذي يكون عادة باستخدام طريقة تقنية متسلسلة فورييه التي تتضح من الأمثلة الآتية :

المعادلة الموجية في الإحداثيات الكرتيزية

(1) الحركة الموجية في بعد واحد:

مثال(1) : باستخدام تقنية فورييه أوجد حلا للمعادلة الموجية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

بالشروط الآتية :

$$\text{حدية}\left\{\quad u(0,t)=0\ ,\quad u(a,t)=0\right.$$

$$\text{ابتدائية}\left\{\quad u(x,0)=0\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=1\right.$$

الحل: نفرض أن :

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

نكتب المعادلة (1) بالصورة:

$$u''=\frac{1}{c^2}\ddot{u}$$

$$X''T=\frac{1}{c^2}\ddot{T}X$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{\ddot{T}}{c^2T}=const.=-\lambda^2$$

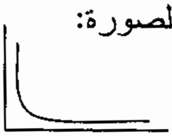
$$X''+\lambda^2X=0 \tag{2}$$

$$\ddot{T}+\lambda^2c^2T=0 \tag{3}$$

حيث الثابت يساوي 0 ، + ، −

أما القيمة الصفرية (0): تعطي حلاً تافهاً (Trivial) أي لا يعطي أي شئ.

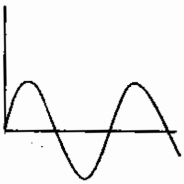
أما القيمة الموجبة (+): لا يعطي حلاً موجياً: الحل المعطي يكون بالصورة:



دالة أسية

$$X=A\cosh\lambda x+\cdots$$

أما القيمة السالبة (!): فتعطي حلاً موجياً: بالصورة:



دالة موجية

$$X=A\cos\lambda x+\cdots$$

ولذلك نختار دائماً القيمة السالبة للثابت، ونرفض القيمتين الآخرتين.

حل المعادلتين (2),(3) هو:

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \tag{4}$$

$$T=a\cos\lambda ct+b\sin\lambda ct \tag{5}$$

بتطبيق الشروط الحدية والابتدائية:

$$X(0)=0, X(a)=0$$

$$T(0)=0, \dot{T}\Big|_{t=0}=1$$

فنحصل على :

$$\boxed{A=0}$$

$$B\sin\lambda a\rightarrow\lambda a=n\pi\quad\rightarrow\quad\boxed{\lambda=\frac{n\lambda}{a}}$$

حيث n عدد صحيح.

$$\therefore X = B\sin\lambda x = B\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (6)$$

$$a=0$$

$$\therefore\ T = b\sin\lambda ct = b\sin\frac{n\pi}{a}ct \qquad (7)$$

$$\therefore u(x,t) = (B\sin\frac{n\pi}{a}x)(b\sin\frac{n\pi}{a}ct)$$

وباستخدام قاعدة التراكب وبالجمع على كل قيم n وإدخال B مع b نحصل على المتسلسلة الآتية:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{a}ct\ , \qquad (8)$$

إيجاد الثوابت b_n: باستخدام تقنية فورييه

نطبق الشرط الابتدائي :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1$$

نفاضل (8) بالنسبة إلى t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi}{a} c\sin\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}ct\ = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \lambda c\sin\lambda x.\cos\lambda ct$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \lambda c\sin\lambda x = 1 = c[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda b_n \sin\lambda x\ ] = 1$$

من تقنية فورييه فإن المتسلسلة المذكورة هي متسلسلة فورييه والمعاملات b_n تعطى بالعلاقة :

$$b_n = \frac{1}{c}[\frac{1}{\lambda}\frac{2}{a}\int_0^a \sin\lambda x\,dx = \frac{2}{c\lambda\ \ a}\frac{1}{\lambda}[-\cos\lambda x]_0^a$$

$$= \frac{2}{c\lambda^2 a}[\cos 0 - \cos\lambda a] = \frac{2}{c\lambda^2\ a}[1-\cos\lambda a]$$

حيث:

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{c(\frac{n\pi}{a})^2 a}[1-\cos(\frac{n\pi}{a})a = \frac{2a}{cn^2\pi^2}[1-\cos n\pi]$$

وتصبح المعادلة (8):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{c(n\pi)^2}[1-\cos n\pi]\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}ct$$

وهو المطلوب.

<u>**مثال(2)**</u>: أوجد حلا للمعادلة الموجية في بعد واحد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad , u=u(x,t) \tag{1}$$

بحيث يحقق الحل الشروط الحدية والإبتدائية التالية:

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \qquad ,t\geq 0 \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad ,0\leq x\leq l \tag{3}$$

$$(\frac{\partial u}{\partial t})_{t=0}=g(x) \qquad ,0\leq x\leq l \tag{4}$$

حيث الدالتان $f(x),g(x)$ دالتان معلومتان.

<u>**الحل**</u>: نوجد أولا حل المعادلة (1) بطريقة فصل المتغيرات حيث نفـرض أولاً أن الحل $u(x,t)$ يكتب بالصورة:

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{5}$$

ونعوض في (1) فنحصل على:

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}}_{\text{x دالة فى فقط}}=\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}}_{\text{t دالة فى فقط}} \tag{6}$$

$\therefore$ يمكن كتابة كل طرف = ثابت $=k$.

$$\frac{d^2X}{dx^2}=kX \tag{7}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}=kc^2T \tag{8}$$

من الشرط (2):

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0 \tag{9}$$

$$u(l,t)=X(l)T(t)=0 \tag{10}$$

وهذا يعطي:

$$X(0)=0 \quad ,X(l)=0 \tag{11}$$

ولدينا ثلاث احتمالات للثابت k :

$$k=0 \;, \quad k>0 \;, \quad k<0$$

(i) إذا كان $k=0$: من المعادلة (7)، وحل هذه المعادلة هو:

$$X(x)=Ax+B \tag{12}$$

ومن الشرط (11) نجد أن $A=0, B=0$ ومعنى ذلك أن الحل $X(x)=0$ وبالتالي فإن $u(x,t)=0$ يكون حلاً مستبعداً.

(ii) إذا كان $k<0$ سالب : وليكن $k=-\omega^2$، فتصبح المعادلة (7) :

$$\frac{d^2X}{dx^2}=-\omega^2X$$

$$X''=-\omega^2X \rightarrow X''+\omega^2X=0$$

وهي معادلة المتذبذب التوافقي البسيط

(Simple harmonic oscillator -SHO)

وحلها هو :

$$X(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x \tag{13}$$

ومن الشرط:عند $x=0$ فإن

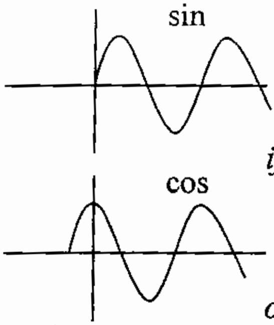
$$X(0)=0$$

$$0=A+B(0)=A\rightarrow A=0$$

ويصبح الحل بالصورة:

$$X(x)=B\sin\omega x \tag{14}$$

ومن الشرط عند $x=l$ ، فإن $X(l)=0$



$$0=B\sin\omega l$$

$$if \quad B\neq 0\rightarrow \sin\omega l=0$$

$$\omega l=\frac{n\pi}{2} \qquad ,n=even$$

$$or:\ \omega l=n\pi \qquad ,n=integer,(n=1,2,3,....)$$

$$\omega=\frac{n\pi}{l}$$

$$X(x)=B\sin\frac{n\pi}{l}x \quad , \qquad (n=1,2,3,.....) \tag{15}$$

ننتقل إلى المعادلة (8) : بأخذ $k=-\omega^2$

$$\frac{d^2T}{dt^2}=-\omega^2c^2T \tag{16}$$

وحل هذه المعادلة هو :

$$T(t)=C\cos\omega ct+D\sin\omega ct \tag{17}$$

(حيث C,D ثابتاً التكامل) وعلى هذا يصبح الحل $u(x,t)$ بالصورة :

$$\begin{aligned}u(x,t)&=X(x)T(t)=B\sin\omega x[C\cos\omega ct+D\sin\omega ct]\\&=\sin\omega x[C\cos\omega ct+D\sin\omega ct]\end{aligned} \tag{18}$$

حيث أدخلنا الثابت B في الثابتين C,D . وحيث أن n تأخذ قيماً متعددة فإن طيف (spectrum) قيم ω يسمى بالقيم الذاتية (eigenvalues)، والدوال المقابلة لكل قيمة من ω تسمى بالدوال الذاتية (eigenfunctions).

<u>فبأخذ $n=1$</u>:

$$\omega_1=\frac{\pi}{l}\rightarrow u_1(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}[C_1\cos\frac{\pi ct}{l}+D_1\sin\frac{\pi ct}{l}]$$

بأخذ $n=2$:

$$\omega_2=\frac{2\pi}{l}\to u_2(x,t)=\sin\frac{2\pi x}{l}[C_2\cos\frac{2\pi ct}{l}+D_n\sin\frac{2\pi ct}{l}]$$

وهكذا حيث $[C_1, C_2, \cdots, D_1, D_2, \cdots]$ ثوابت اختيارية.

ومن نظرية التراكب الخطي: فان أي تراكب خطي من الحل الذي حصلنا عليه يعتبر حلا للمعادلة الموجية.

$$\therefore u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+D_n\sin\frac{n\pi ct}{l}]\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (19)$$

المعادلة (19) تمثل الحل العام للمعادلة الموجية (1) والذي يحقق فقط الشرط رقم (2)، وهي على صورة متسلسلة فورييه .الثوابت C_n, D_n يمكن الحصول عليهما باستخدام الشرطين $(3),(4)$.

لإيجاد الثوابت C_n, D_n: نستخدم الشرطين $(3),(4)$:

من الشرط (3): $u(x,0)=f(x)\ ,\qquad 0\le x\le l$

من الشرط (4): $(\frac{\partial u}{\partial t})_{t=0}=g(x)\ ,\qquad 0\le x\le l$

باستخدام (19):

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (20)$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-C_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi ct}{l}+D_n\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l})\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_{t=0}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{\pi c}{l}\sum_{n=1}^{\infty}nD_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (21)$$

وباستخدام طريقة (تقنية) متسلسلة فورييه يمكن إيجاد C_n, D_n كالآتي :

بضرب طرفي (20) في $\sin\frac{m\pi x}{l}$ والتكامل من $x=0$ حتى $x=l$

$$\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

جميع الحدود في الطرف الأيمن تساوي أصفاراً ماعدا الحد الذي فيه $m=n$ وهذا يعطينا $\frac{l}{2}C_m$.

$$\therefore \int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{l}{2}C_m$$

$$\therefore C_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$$

$$\therefore C_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (22)$$

وبالمثل يمكن الحصول على المعاملات D_n بالصورة :

$$\therefore D_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (23)$$

حيث $n=1,2,........$.

بالتعويض من (22),(23) في (19) نحصل على الحل العام للمسألة المعطاة والذي يحقق الشروط الحدية كلها، وصورته:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx)\cos\frac{n\pi ct}{l}$$
$$+(\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx)\sin\frac{n\pi ct}{l}]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

وهو المطلوب.

مسائل

١) باستخدام تقنية فورييه ، أوجد الحل لمسألة القيمة الحدية لاهتزاز سلك معدني طوله l حيث :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \;, \quad u = u(x,t) \;, \quad 0 < x < l$$

مع الشروط الحدية :

$$i)\, u(x,0) = f(x) \quad , \qquad ii)\;\; u_t\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0$$

$$iii)\, u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0 \quad , \qquad t > 0$$

٢) باستخدام تقنية فورييه ، أوجد الحل للمعادلة الموجية

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx} \;, \quad u = u(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi$$

مع الشروط الحدية:

$$i)\, u(x,0) = kx \quad , \qquad ii)\;\; u_t\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\;\big|_{t=0} = 0$$

$$iii)\, u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=\pi} = 0 \quad , \qquad t > 0$$

(2) المعادلة الموجية في بعدين (Two dimensional wave Equation):

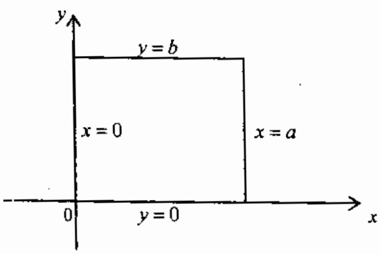
تمثل هذه المعادلة حالة تذبذب غشاء رقيق وشكل المعادلة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

عند تطبيق هذه المعادلة على حالة تذبذب غشاء رقيق يجب أخذ الفروض والشروط الآتية في الاعتبار :

1. سمك الغشاء يكون رقيق جداً بحيث يمكن إهماله.
2. الغشاء قابل للتمدد حتى يحدث التذبذب فيه.
3. وزن الغشاء يكون صغير جداً بالنسبة لقوة الشد فيه.
4. التذبذب يكون مستعرضا فقط أي أن إزاحات (أو انحرافات) الذبذبة تكون في اتجاه عمودي على المستوى الذي يقع الغشاء فيه.

مثال: نعتبر تذبذب غشاء مستطيل الشكل ومنتظم (ذو كثافة سطحية ρ ثابتة) فباعتبار أن قوة الشد فيه (لوحدة الأطوال) T مقداراً ثابتاً وأن $c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ فإن المعادلة الموجية التي تدل على الذبذبات الحادثة في الغشاء هي:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

حيث $u=u(x,y,t)$

والمطلوب : إيجاد الحل العام لهذه المعادلة تحت الشروط الحدية والابتدائية الآتية:

(1) $u=0$ عند: $x=0,\ x=a,\ \ y=0,\ \ y=b$

بمعنى أن:

(2) $u(0,y,t)=0$

(3) $u(a,y,t)=0$

(4) $u(x,0,t)=0$

$$u(x,b,t)=0 \qquad (5)$$

الإزاحة الابتدائية:

$$u(x,y,0)=F(x) \qquad (6)$$

السرعة الابتدائية :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_t(x,y,o)=g(x,y) \qquad (7)$$

الحل: نفرض الحل على الصورة:

$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$$

ونعوض في المعادلة (1) فنحصل على العلاقات الآتية:

$$\frac{X''}{X}=-\lambda_1^2 \qquad (8)$$

$$\frac{Y''}{Y}+=-\lambda_2^2 \qquad (9)$$

$$\frac{\ddot{T}}{c^2T}=-\lambda^2 \qquad (10)$$

$$\lambda^2=c^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2) \qquad (11)$$

حيث:

$$X''=\frac{d^2X}{dx^2},\ddot{T}=\frac{d^2T}{dt^2}$$

الحل العام للمعادلات $(8),(9),(10)$ (حل موجي):

$$X(x)=A_1\cos\lambda_1x+B_1\sin\lambda_1x$$

$$Y(y)=A_2\cos\lambda_2y+B_2\sin\lambda_2y$$

$$T(t)=A_3\cos c\lambda t+B_3\sin c\lambda t$$

بتطبيق الشروط الحدية $[(2),(3),(4),(5)]$ نجد أن :

$$X(0)=0 \rightarrow A_1=0$$

$$X(a)=\rightarrow \sin\lambda_1 a=0=\sin m\pi \rightarrow \lambda_1=\frac{m\pi}{a}$$

حيث m عدد صحيح.

$$\therefore X(x)=B_1 \sin\lambda_1 x=B_1 \sin\frac{m\pi}{a}x$$

$$Y(0)=0 \quad \rightarrow \quad A_2=0$$

$$Y(b)=0 \quad \rightarrow \quad \sin\lambda_2 b=0=\sin n\pi \rightarrow \quad \lambda_2=\frac{n\pi}{b}$$ حيث n عدد صحيح

$$\therefore Y(y)=B_2 \sin\lambda_2 y=B_2 \sin\frac{n\pi}{b}y$$

وبذلك نحصل على الحل العام بالصورة الآتية:

$$u(x,y,t)=A\cos c\lambda_{mn}t+B\sin c\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

حيث A,B ثوابت ، $\lambda_{mn}=\lambda$.

$$\lambda_{mn}^2=c^2[(\frac{m\pi}{a})^2+(\frac{n\pi}{b})^2]=(\frac{m\pi c}{a})^2+(\frac{n\pi c}{b})^2 \tag{13}$$

هذه القيم للكمية λ_{mn} تسمى القيم الذاتية eigenvalues أو القيم الميزة Characteristic values للغشاء المهتز Vibrating membrane.

ومن نظرية تراكب الحلول وبأخذ الثوابت A,B بالصورة A_{mn},B_{mn} للقيم المختلفة للأعداد m,n فإننا نحصل على الحل العام بالصورة:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos\lambda_{mn}ct+B_{mn}\sin\lambda_{mn}ct).\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{14}$$

ويبقى لنا إيجاد الثوابت A_{mn} ، B_{mn} .

إيجاد الثابت A_{mn} : بتطبيق الشرط (6) (الخاص بالإزاحة الابتدائية):

عند $t = 0$ فإن

$$u(x,y,0) = F(x,y)$$

$$F(x,y) = u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{15}$$

وتعرف هذه المتسلسلة بمتسلسلة فورييه الجيبيه المزدوجة للدالة $F(x,y)$.

ولإيجاد A_{mn} : نتبع تقنية فورييه وذلك بضرب الطرفين في (15) في

$$\sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

والتكامل على أبعاد المستطيل [x من $0 \leftarrow a$ ، y من $0 \leftarrow b$] فنحصل على:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a\int_0^b F(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy \tag{16}$$

لإيجاد الثابت B_{mn} : بتطبيق الشرط (7) (الخاص بالسرعة الابتدائية): عند $t = 0$

فإن

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x,y)$$

وبتفاضل (15) وإتباع تقنية فورييه نحصل على:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^a\int_0^b g(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx dy \tag{17}$$

خواص الذبذبات الناتجة: من العلاقة (13):

$$\lambda_{mn}^2 = \pi^2 c^2 [(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]$$

$$\therefore \lambda_{mn} = \pi c [(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

الزمن الدوري للذبذبات الناتجة يعطى بالعلاقة :

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda_{mn}}$$

تردد الذبذبات الناتجة يعطى بالعلاقة :

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda_{mn}}{2\pi} = \nu_{mn}$$

وباستخدام (18) :

$$\nu_{mn} = \frac{c}{2}[(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

وتعرف ν_{mn} بالترددات الذاتية وتعرف الذبذبات المعطاة بالحل (14) بالأنماط (Modes) ويعرف النمط (أو الذبذبة)الأساسي (Fundamental Mode) بأنه النمط الذي له أقل تردد ونحصل عليه بوضع $m = n = 1$ في (14).

<u>نتيجة</u> : إذا فرضنا أن السرعة الابتدائية $g(x, y) = 0$ فإنه من الشرط (7):

$$B_{mn} = 0$$

وتؤول العلاقة (14) إلى:

$$u(x,y,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\lambda_{mn} ct \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{20}$$

حيث:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b F(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dx\,dy \tag{21}$$

$$\lambda_{mn} = \pi^2 c^2 [(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2] \tag{22}$$

<u>مسألة</u>: وجد الانحراف $u(x,y,t)$ الذي يحدث لغشاء مستطيل له $a = b = 1$ باعتبار أن $c = 1$ وذلك تحت الشروط الآتية:

(i) السرعة الابتدائية للذبذبة = صفر.

(ii) الانحراف (الإزاحة) الابتدائي يعطى بالعلاقة:

$$F(x,y) = A\sin\pi x\sin 2\pi y$$

حيث A ثابت.

<u>الحل:</u> مسالة القيمة الحدية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

الشروط الحدية :

$$u=0\ \begin{cases} x=0\ , & x=1 \\ y=0\ , & y=1 \end{cases}$$

الشروط الابتدائية :

$$u(x,y,0)=F(x,y)=A\sin\pi x\ \sin 2\pi y$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y)=0$$

من نتائج المثال السابق:

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\lambda_{mn}t\sin m\pi x\sin n\pi y$$

$$\lambda_{mn}=\pi^2(m^2+n^2)$$

حيث:

$$A_{mn}=4A\int_0^1\int_0^1\sin\pi x\sin\ 2\pi y\sin m\pi x\sin n\pi y\,dxdy$$

في حالة $n=$ عدد فردي فإن $A_{mn}=0$

في حالة $n=$ عدد زوجي فإن:

$$A_{m2}=4A\int_0^1\int_0^1\sin\pi x\ \sin^2 2\pi y\sin m\pi x\,dx\,dy=2A\int_0^1\sin\pi x\sin m\pi x dx\ =0$$

لأن $\int_0^1\sin^2 2\pi y\,dy=\frac{1}{2}$ ، $n=2$.

$$A_{12} = 2A\int_0^1 \sin^2 \pi x\, dx = 2A\,[\frac{1}{2}] = A$$

وبذلك يكون الحل المطلوب بالصورة:

$$u(x,y,t) = A_{12} \cos\lambda_{12} t \sin \pi x \sin 2\pi y$$

ولكن:

$$\lambda_{12}^2 = \pi^2(1^2 + 2^2) = 5\pi^2$$

$$\therefore \lambda_{12} = \sqrt{5}\pi\ ,\ A_{12} = A$$

$$\therefore\ \ u(x,y,t) = A\cos\sqrt{5}\,\pi t \sin \pi x \sin\ 2\pi y$$

وهو المطلوب.

ملحوظة: إن المعادلة الموجية في بعدين والتي تمثل تذبذب غشاء رقيق وصورتها:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

أو $u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2}u_{tt}$ أو $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$

والتي سبق حلها في البند السابق بالتفصيل ، يطلق عليها أحياناً أسم المعادلة الموجية بصيغة لابلاس (Laplace form of wave equation).

(3) المعادلة الموجية في ثلاثة أبعاد:

مثال: أوجد حلا للمعادلة الموجية في ثلاثة أبعاد

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

مع الشروط الحدية الآتية :

$$u \neq 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ \rightarrow\ \ x = 0,\ \ x = a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \rightarrow \quad y=0, \quad y=a$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \rightarrow \quad z=0\ , \ z=a$$

<u>الحل</u>: باستخدام طريقة فصل المتغيرات وذلك بأخذ

$$u(x,y,z,t)=X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

بالتعويض في (1) والقسمة على $XYZT$ نحصل على :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=\frac{\ddot{T}}{c^2T}$$

وبذلك نحصل على العلاقات الآتية:

$$\frac{X''}{X}=-\lambda_1^2\ ,\frac{Y''}{Y}=-\lambda_2^2\ ,\quad \frac{Z''}{Z}=-\lambda_3^2\ ,\quad \frac{\ddot{T}}{c^2T}=-\lambda^2$$

حيث:

$$\lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

$$X''+\lambda_1^2X=0\ ,\qquad Y''+\lambda_2^2Y=0$$

$$Z''+\lambda_3^2Z=0\ ,\qquad \ddot{T}+\lambda^2c^2T=0$$

وهذه المعادلات ذات حلول دورية (موجية) هي:

$$X=e^{\pm i\lambda_1 x} \qquad \rightarrow X=A_1\cos(\lambda_1 x+\alpha_1)$$

$$Y=e^{\pm i\lambda_2 y} \qquad \rightarrow Y=A_2\cos(\lambda_2 y+\alpha_2)$$

$$Z=e^{\pm i\lambda_3 z} \qquad \rightarrow Z=A_3\cos(\lambda_3 z+\alpha_3)$$

$$T=e^{\pm i\lambda ct} \qquad \rightarrow T=B\cos(\lambda ct+\alpha\ )$$

وعلى هذا فيمكن كتابة الحل بالصورة:

$$u=Ce^{\pm(\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z+\lambda ct)}$$

أو بالصورة:

$$u=A\cos(\lambda_1 x+\alpha_1)\cos(\lambda_2 y+\alpha_2)\cos(\lambda_3 z+\alpha_3)\cos(\lambda ct+\alpha)$$

حيث $\lambda^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$

نلاحظ أن: $e^{\pm i\lambda x}\equiv a\cos\lambda x\pm b\sin\lambda x$

بتطبيق الشروط الحدية $x=0\rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\rightarrow b=0$

فإن الحدود التي على شكل sin تختفي و تبقى الحدود على شكل cos وبذلك نحصل على:

$$u=C\cos\lambda_1 x\cos\lambda_2 y\cos\lambda_3 z\cos\lambda ct \qquad \text{(I)}$$

و أيضا من الشرط: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\rightarrow x=y=z=a$

نجد أن

$$\sin\lambda_1 a\sin\lambda_2 a\sin\lambda_3 a\sin\lambda ct=0$$

وهذا يتحقق إذا كان :

$$\sin\lambda_1 a=0,\quad \sin\lambda_2 a=0,\quad \sin\lambda_3 a=0,\quad \sin\lambda ct=0$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$\lambda_1 a=n_1\pi,\quad \lambda_2 a=n_2\pi,\quad \lambda_3 a=n_3\pi$$

$$\therefore\lambda_1=\frac{n_1\pi}{a},\quad \lambda_2=\frac{n_2\pi}{a},\quad \lambda_3=\frac{n_3\pi}{a}$$

$$\lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}=\frac{\pi}{a}\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$$

ويصبح الحل $u(x,y,z,t)$ (I) بالصورة :

$$u=C\cos\frac{n_1\pi}{a}x\cos\frac{n_2\pi}{a}y\cos\frac{n_3\pi}{a}z\cos\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\,\frac{\pi c}{a}t$$

ومن نظرية تراكب الحالات نحصل على الحل العام بالصورة (وذلك بالجمع على كل القيم الممكنة لــ n_1, n_2, n_3)

$$u=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\sum_{n_3=3}^{\infty}C_{n_1n_2n_3}\cos\frac{n_1\pi}{a}x\cos\frac{n_2\pi}{a}y\cos\frac{n_3\pi}{a}z\cos\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}\,\frac{\pi c}{a}t$$

وهو المطلوب.

ثالثا: معادلة هلمهولتز Helmholtz Equation:

(1) حل معادلة هلمهولتز في الاحداثيات القطبية الكروية:

نكتب معادلة هلمهولتز بالصورة:

$$\boxed{\nabla^2\psi + k^2\psi = 0}$$

حيث k معامل يعتمد على خواص المادة التي تصفها هذه المعادلة.

في المعادلات القطبية الكروية (r,θ,φ) يأخذ مؤثر لابلاس الصورة الآتية:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$= \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2 \qquad (1)$$

حيث

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\nabla_{\theta,\phi}^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

وتصبح معادلة هلمهولتز بالصورة:

$$\left[(\nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2\right]\psi(r,\theta,\phi) + k^2(r)\psi(r,\theta,\phi) = 0 \qquad (2)$$

وباستخدام طريقة فصل المتغيرات نفرض الحل بالصورة:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\cdot Y(\theta,\phi)$$

بالتعويض في (2):

$$Y\nabla_r^2 R + \frac{R}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y + k^2 RY = 0$$

بالضرب في $\frac{r^2}{RY}$:

$$\underbrace{\frac{r^2}{R}\nabla_r^2 R + r^2k^2}_{\text{دالة في } r \text{ فقط}} = \underbrace{-\frac{1}{Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y}_{\text{دالة في } \theta,\phi}$$

$\therefore$ كل طرف يساوي ثابت وليكن λ.

$$\therefore \frac{r^2}{R}\nabla_r^2 R + r^2 k^2 = \lambda \tag{3}$$

$$-\frac{1}{Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y = \lambda \tag{4}$$

المعادلة(3): بالضرب في $\frac{R}{r^2}$:

$$\boxed{\nabla_r^2 R + (k^2 - \frac{\lambda}{r^2})R = 0} \quad (r \text{ تعتمد على}) \tag{5}$$

المعادلة(4): بالضرب في $-Y$:

$$\boxed{\nabla_{\theta,\phi}^2 Y + \lambda Y = 0} \quad (\theta,\phi \text{ تعتمد على}) \tag{6}$$

ومن المعادلة(6) بفصل المتغيرات: بكتابة

$$Y(\theta,\phi) = H(\theta)\cdot\Phi(\phi)$$

واستخدام صورة $\nabla_{\theta,\phi}^2$ نحصل على :

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\psi + \lambda\psi = 0$$

$$\therefore \frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial H}{\partial\theta}) + \frac{H}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \lambda H\Phi = 0$$

بكتابة

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) = \nabla_\theta^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = \nabla_\phi^2$$

$$\therefore \Phi\nabla_\theta^2 H + \frac{H}{\sin^2\theta}\nabla_\phi^2\Phi + H\Phi = 0$$

بالقسمة في $H\Phi$:

$$\frac{1}{H}\nabla_\theta^2 H + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\nabla_\phi^2\Phi + \lambda = 0$$

بالضرب في $\sin^2\theta$:

$$\underbrace{\frac{\sin^2\theta}{H}\nabla_\theta^2 H+\lambda\sin^2\theta}_{\text{دالة في } \theta \text{ فقط}}=\underbrace{-\frac{1}{\Phi}\nabla_\phi^2\Phi}_{\text{دالة في } \phi \text{ فقط}}$$

$\therefore$ كل طرف يساوي ثابت وليكن $= m^2$

$$\therefore \frac{\sin^2\theta}{H}\nabla_\theta^2 H+\lambda\sin^2\theta=m^2 \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{\Phi}\nabla_\phi^2\Phi=m^2 \qquad (8)$$

المعادلة (7) يمكن كتابتها بالصورة: بالقسمة على $\sin^2\theta$ والتعويض عن $\nabla_\theta^2 H$

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH}{d\theta})+(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta})H=0} \qquad (9)$$

المعادلة (8) يمكن كتابتها بالصورة:

$$\boxed{\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0} \qquad (10)$$

وبذلك نكون قد فصلنا المعادلة (1) (معادلة هلمهولتز) إلى ثلاث معادلات:

(1) المعادلة (5): وتعرف بالمعادلة القطرية Radial Equation.

(2) المعادلة (9): وتعرف بالمعادلة θ (θ-Equation).

(3) المعادلة (10): وتعرف بالمعادلة السمتية (Azimuthal Equation).

<u>معادلة لجندر ومعادلة لجندر المرافقة</u>: المعادلة (9) (معادلة θ) يمكن كتابتها بأخذ $\lambda=n(n+1)$ حيث n عدد موجب، وذلك بالصورة:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH}{d\theta})+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]H=0 \qquad (1)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة لجندر المرافقة Associated Legendre D. E.

الحل العام لهذه المعادلة يكون على شكل دالتين P_n^m ,Q_n^m بالصور:

$$H = AP_n^m + BQ_n^m \tag{2}$$

حيث P_n^m تعرف بكثيرة حدود (Polynomial) لجندر المرافقة من الدرجة n من النوع الأول (1^{st} Kind).

Q_n^m تعرف بكثيرة حدود لجندر المرافقة من الدرجة n من النوع الثاني (2^{nd} Kind).

وباستخدام المتغير الجديد $\mu = \cos\theta$.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\theta} = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial\mu} = -\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial\mu} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{\partial}{\partial\mu}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{d\theta} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{d}{\partial\mu}}$$

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2} = (1-\mu^2)\,\frac{d^2}{\partial\mu^2}}$$

معادلة لجندر المرافقة (1) يمكن كتابتها بالصورة الآتية:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dH}{d\mu}\right] + \left[n(n+) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]H = 0 \qquad \left|\; \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta} = -\dfrac{d}{d\mu} \\ \sin\theta = \sqrt{1-\mu^2} \end{array}\right.$$

وهي صورة أخرى لمعادلة لجندر المرافقة بدلالة $\mu = \cos\theta$.

أيضاً يمكن كتابة هذه المعادلة بالصورة:

$$\boxed{(1-\mu^2)\frac{d^2H}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dH}{d\mu} + \left[n(n+) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]H = 0}$$

وهي الصورة المعرفة لمعادلة لجندر المرافقة، وحلها العام:

$$\boxed{H = AP_n^m(\mu) + BQ_n^m(\mu)}$$

<u>حالة خاصة</u>: بوضع $m=0$ في معادلة لجندر المرافقة نحصل على:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH}{d\theta})+n(n+1)H=0$$

أو باستخدام المتغير $\cos\theta=\mu$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dH}{d\mu}\right]+n(n+1)H=0$$

$$\boxed{(1-\mu^2)\frac{d^2H}{d\mu^2}-2\mu\frac{dH}{d\mu}+n(n+1)H=0}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة لجندر .Legendre's Eqnat.

الحل العام لهذه المعادلة يكتب بالصورة: $H=AP_n(\mu)+BQ_n(\mu)$

حيث $P_n(\mu)$ تعرف بكثيرة حدود لجندر من الدرجة n من النوع الأول.

$Q_n(\mu)$ تعرف بكثيرة حدود لجندر من الدرجة n من النوع الثاني.

وتحت شروط معينة يمكن أخذ $B=0$ ويؤول الحل إلى

$$H=AP_n(\mu)=AP_n(\cos\theta)$$

<u>خواص دوال لجندر</u>:

صورة $P_n(\mu)$ ككثيرة حدود: $P_n(\mu)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$

وتعرف بمعادلة رودريج Rodrigue's formula.

ويلاحظ أن: $P_0(1)=1$

وبإعطاء n القيم $n=0,1,2,3,\cdots$ نحصل على الصورة الآتية:

$$P_0(\mu)=1$$

$$P_1(\mu)=\mu=\cos\theta$$

$$P_2(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$$

$$P_3(\mu)=\frac{1}{2}(5\mu^3-3\mu)=\frac{1}{2}(5\cos^3\theta-3\cos\theta)$$

وهكذا.

خاصية التعامد العياري Orthonormalization Property:

$$\int_{-1}^{+1} P_n\, P_m\, d\mu = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}}$$

$$\text{دلتا كرونيكر } \delta_{nm} \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

كما تحقق دوال لجندر العلاقات الآتية:

(1) $P_1 = \mu P_0$

(2) $P_1' = P_0$

(3) $\mu P_n' - P_{n-1}' = n P_0$

(4) $P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)\, P_n$

(5) $(n+1) P_{n+1} + n P_{n-1} = (2n+1) \mu P_n$

خواص دوال لجندر المرافقة:

صورتها ككثيرة حدود:

$$P_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m}$$

$$Q_n^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}$$

خاصية التعامد العياري:

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(\mu) P_n^m(\mu)\, d\mu = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{ln}$$

وأيضاً تخضع $P_n^m(\mu)$ للعلاقات الآتية:

(1) $P_n^m(1) = 0$ $(n+m)$ فردي

$$(2)\quad P_n^m(0)=\begin{cases}0 \\ (-1)^{\frac{n-m}{2}}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdots(n+m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(n+m)}\end{cases}$$ زوجي: $(n+m)$

$$(3)\quad P_n^m(-\mu)=(-1)^{n+m}P_n^m(\mu)$$

$$(4)\quad P_n^{-m}(\mu)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\mu)$$

وبإعطاء n,m بعض القيم نحصل على:

$$n=1,\ m=1:\qquad P_1^1=(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta$$

$$n=2,\ m=1:\qquad P_2^1=3\mu(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}=3\cos\theta\sin\theta$$

$$n=2,\ m=2:\qquad P_2^2=\frac{3}{2}(5\mu^2-1)(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$$

وهكذا ....

<u>دراسة معادلة R (معادلة بسل التفاضلية):</u>

$$\nabla_r^2R+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

$$\therefore\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr})+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+(k^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

بالضرب في r^2:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-\lambda)R=0\qquad(1)$$

باستخدام المتغير الجديد: $\eta=kr$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial r}=k\frac{\partial}{\partial\eta}}\qquad\boxed{\frac{d}{dr}=k\frac{d}{d\eta}}$$

بالتعويض في (1):

$$r^2k^2\frac{d^2R}{d\eta^2}+2rk\frac{dR}{d\eta}+(k^2r^2-\lambda)R=0$$

$$\therefore \eta^2\frac{d^2R}{d\eta^2}+2\eta\frac{dR}{d\eta}+(\eta^2-\lambda)R=0$$

وبالقسمة على η^2 وأخذ $\lambda=n^2$:

$$\boxed{\frac{d^2R}{d\eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{dR}{d\eta}+(1-\frac{n^2}{\eta^2})R=0}$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة بسل التفاضلية (Bessel D. E.).

حيث $R=R(\eta)=R(kr)$.

والحل العام لهذه المعادلة يكتب بالصورة: $R(\eta)=AJ_n(\eta)+BY_n(\eta)$

حيث $J_n(\eta)$ هي دالة بسل (Bessel Function) من الرتبة n ومن النوع الأول.

$Y_n(\eta)$ هي دالة بسل من الرتبة n ومن النوع الثاني.

__خواص دوال بسل:__ صورة دوال بسل ككثيرات حدود (Polynomials)

(i) $J_n(\eta)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{r!\,\Gamma(n+r+1)}(\frac{\eta}{2})^{n+2r}$ | $\eta=kr$

حيث $\Gamma(n+r+1)$ هي دالة جاما (Gamma Function).

(ii) $Y_n(\eta)=\dfrac{J_n(\eta)\cos n\pi-J_{-n}(\eta)}{\sin n\pi}$

حيث $J_{-n}(\eta)=(-1)^n J_n(\eta)$.

<u>معادلة بسل من الرتبة صفر ($n = 0$)</u>: صورتها:

$$\frac{d^2 R}{d\eta^2}+\frac{2}{\eta}\frac{dR}{d\eta}+R=0$$

والحل العام لها يكون بصورة دالة بسل من الرتبة صفر $J_0(\eta)$ وصورتها ككثيرة حدود (متسلسلة):

$$J_0(\eta)=1-\frac{\eta^2}{2^2}+\frac{\eta^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{\eta^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots$$

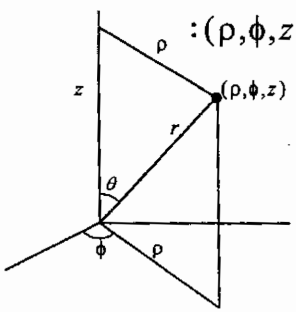
<u>بعض خواص دالة بسل $J_n(\eta)$</u>: نذكر هنا بعض تلك الخواص:

$$(1)\quad nJ_n(\eta)=\frac{\eta}{2}\left[J_{n+1}(\eta)+J_{n-1}(\eta)\right]$$

$$(2)\quad J_n'(\eta)=\frac{1}{2}\left[J_{n-1}(\eta)-J_{n+1}(\eta)\right]$$

$$(3)\quad nJ_n'(\eta)=n\,J_n(\eta)-\eta\,J_{n+1}(\eta)=-n\,J_n(\eta)+\eta\,J_{n-1}(\eta)$$

(2) <u>حل معادلة هلمهولتز في الاحداثيات الإسطوانية</u>:



صورة مؤثرة لابلاس في الإحداثيات الإسطوانية (ρ,ϕ,z):

$$\boxed{\nabla^2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

وتصبح معادلة هلمهولتز:

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)}_{\downarrow}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0$$

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$$

$$\therefore \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \qquad (1)$$

وبطريقة فصل المتغيرات: نفرض الحل بالصورة:

$$\psi(\rho,\phi,z)=R(\rho)\Phi(\phi)\,Z(z)$$

بالتعويض في (1) وبنفس الطريقة السابقة نحصل على:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho}+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2=0$$

$$\therefore \frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho}+k^2+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda^2$$

$$\therefore -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda^2 \rightarrow \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\lambda^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda^2 Z=0} \qquad (2)$$

أيضاً:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{dR}{d\rho}+k^2+\frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=\lambda^2$$

بالضرب في ρ^2:

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+k^2\rho^2+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=\rho^2\lambda^2$$

$$\therefore \frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2(k^2-\lambda^2)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=n^2$$

$$\therefore -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=n^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+n^2\Phi=0} \qquad (3)$$

<u>معادلة $R(\rho)$:</u>

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\underbrace{(k^2-\lambda^2)}_{\alpha^2}-n^2=0$$

وبوضع $k^2-\lambda^2=\alpha^2$ وبالضرب في R:

$$\therefore \quad \boxed{\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}+(\rho^2\alpha^2-n^2)R=0} \qquad (4)$$

وإذا استخدمنا المتغير $\eta=\alpha\rho$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\rho}=\alpha\frac{\partial}{\partial\eta} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}=\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

وتصبح المعادلة (4) بالصورة:

$$\eta^2\frac{d^2R}{d\eta^2}+\eta\frac{dR}{d\eta}+(\eta^2-n^2)R=0$$

وبالقسمة على η^2:

$$\frac{d^2R}{d\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{dR}{d\eta}+(1-\frac{n^2}{\eta^2})R=0 \qquad (5)$$

حيث $R=R(\eta)=R(\alpha\rho)$.

المعادلة (5) هي معادلة بسل التفاضلية والحل العام لهـا يكتـب بدلالـة دالتـين $J_n(\eta), Y_n(\eta)$ (دالتي بسيل من الدرجة n ومن النوع الأول J_n والثاني Y_n).

رابعا: المعادلة الموجية في الإحداثيات القطبية الكروية والأسطوانية:

[1] حل المعادلة الموجية في الإحداثيات القطبية الكروية:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

مؤثر لابلاس في الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,ϕ)

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2$$

$$\therefore \left[\nabla_r^2 + \frac{1}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2\right]u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

وباستخدام طريقة فصل المتغيرات: نفرض الحل بالصورة:

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)\cdot T(t)$$

حيث $Y(\theta,\phi)$ تسمى الدالة التوافقية الكروية Spherical Harmonic Function

أو بإختصار التوافقية الكروية (Spherical Harmonic).

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$YT\nabla_r^2 R + \frac{RT}{r^2}\nabla_{\theta,\phi}^2\, Y = \frac{1}{c^2}RY\frac{d^2T}{dt^2}$$

بالقسمة على RYT:

$$\frac{1}{R}\nabla_r^2 R + \frac{1}{r^2 Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y = \frac{1}{c^2 T}\frac{d^2T}{dt^2} = -p^2$$

$$\therefore \frac{d^2T}{dt^2} + c^2p^2T = 0 \qquad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية حلها العام هو:

$$T = A_1\cos cpt + B_1\sin cpt = c_1e^{\pm icpt} \qquad (3)$$

أيضاً:

$$\frac{1}{R}\nabla_r^2 R + \frac{1}{r^2 Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y = -p^2$$

بالضرب في r^2:

$$\frac{r^2}{R}\nabla_r^2 R+\frac{1}{Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y=-p^2r^2$$

$$\frac{r^2}{R}\nabla_r^2 R+p^2r^2=-\frac{1}{Y}\nabla_{\theta,\phi}^2 Y=\lambda \quad \text{(ثابت)}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla_{\theta,\phi}^2 Y+\lambda Y=0} \qquad (4)$$

المعادلة (4) هي المعادلة التي تعرف التوافقية الكروية $Y(\theta,\phi)$.

أما الجزء الخاص بالدالة R فهو:

$$\frac{r^2}{R}\nabla_r^2 R+p^2r^2=\lambda$$

$$\therefore \nabla_r^2 R+(p^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})+(p^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+(p^2-\frac{\lambda}{r^2})R=0$$

وهي صورة من معادلة بسل التفاضلية وحلها هو:

$$R(pr)=AJ_\lambda(pr)+B\underbrace{Y_\lambda(pr)}$$

وفي معظم المسائل الفيزيائية فإن: الشروط الحدية تلغي وجود الجزء الثاني $(B=0)$ ونحصل على:

$$\therefore \quad \boxed{R=AJ_\lambda(pr)}$$

<u>حل المعادلة (4) (معادلة التوافقية الكروية):</u>

المعادلة (4) يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات وذلك بكتابة

$$Y(\theta,\phi)=H(\theta)\Phi(\phi)$$

كما سبق في حل معادلة هلمهولتز، وبذلك نحصل على معادلتين:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2$$

$$\therefore \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0 \qquad (5)$$

وهي معادلة حلها العام:

$$\Phi=A_2\cos m\phi+B_2\sin m\phi=c_2\,e^{\pm im\phi}$$

<u>معادلة θ:</u>

$$\frac{\sin^2\theta}{H}\nabla_\theta^2 H+\lambda\sin^2\theta-m^2=0$$

ولكن

$$\nabla_\theta^2=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) \qquad \nabla_\phi^2=\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH}{d\theta})+(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta})H=0$$

وهذه المعادلة تكافئ معادلة لجندر المرافقة وذلك بأخذ $\lambda=n(n+1)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{dH}{d\theta})+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]H=0$$

وبأخذ المتغير الجديد $\mu=\cos\theta$، فإن

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}=-\frac{d}{d\mu}$$

وتأخذ المعادلة السابقة الصورة:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dH}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]H=0$$

$$\therefore \boxed{(1-\mu^2)\frac{d^2H}{d\mu^2}-2\mu\frac{dH}{d\mu}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]H=0} \qquad (6)$$

وهي صورة معادلة لجندر المرافقة المشهورة والتي حلها العام:

$$H = A_3 P_n^m(\mu) + \underbrace{B_3 Q_n^m(\mu)}$$

في المسائل الفيزيائية يهمل الحد الثاني طبقاً لشروط المسألة الحدية، ونحصل على:

$$\therefore \boxed{H = A_3 P_n^m(\mu)}$$

من العلاقات السابقة يمكن كتابة الحل العام للمعادلة الموجيــة فــي الإحــداثيات القطبية الكروية بالصورة:

$$U = AY_{n,m}(\theta,\phi)\ J_\lambda(pr)T(t)$$

حيث $Y_{n,m}(\theta,\phi) = P_n^m(\mu)\,\Phi(\phi)$.

[2] <u>حل المعادلة الموجية في الإحداثيات الأسطوانية:</u>

شكل المعادلة الموجية في هذه الإحداثيات:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

بواسطة فصل المتغيرات: نفرض أن:

$$U = R(\rho)\Phi(\phi)\,Z(z)\,T(t)$$

وبالتعويض في (1) نحصل على (بعد القسمة على $R\Phi ZT$):

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{c^2T}\,\frac{d^2T}{dt^2} = -\lambda^2$$

وبذلك نحصل على العلاقتين:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + c^2\lambda^2 T = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\lambda^2$$

وبفصل المتغيرات في المعادلة الثانية بنفس الطريقة نحصل على العلاقات الآتية:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m^2 \quad , \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-n^2$$

$$\therefore \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+n^2Z=0 \tag{4}$$

أما معادلة R فتكون:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}=n^2-\lambda^2=-\alpha^2$$

وبكتابة $n^2-\lambda^2=-\alpha^2$ نحصل على العلاقة:

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+(\alpha^2-\frac{m^2}{\rho^2})R=0 \tag{5}$$

وهي معادلة بسل من الرتبة m والمقياس (argument) $\alpha\rho$، وحلها هو:

$$R(\alpha r)=A_1\,J_m(\alpha\rho)$$

<u>حل المعادلة (2):</u>

$$T=A_2\cos\lambda ct+B_2\sin\lambda ct$$

<u>حل المعادلة (3):</u>

$$\Phi=A_3\,\cos m\phi+B_3\sin m\phi$$

<u>حل المعادلة (4):</u>

$$Z=A_4\cos nz+B_4\sin nz$$

وبذلك نحصل على الحل العام للمعادلة الموجية في الإحداثيات الإسطوانية بالصورة:

$$u=\sum A J_m(\alpha\rho)...$$

حيث $\alpha^2=\lambda^2-n^2$.

وطبقاً لشروط حدية معينة فإن المعاملات $B=0$ $(B_2=B_3=B_4=0)$

$$\therefore u = AJ_m(\alpha\rho)\cos m\phi \cos nz \cos\lambda ct \qquad (6)$$

حالة خاصة(1): حالة التماثل المحوري axial symmetry:

في هذه الحالة u لا تعتمد على ϕ، أيضاً: $\boxed{m=0}$

ويصبح الحل (6):

$$\boxed{u=\sum AJ_0(\alpha\rho)\cos nz\cos\lambda ct}$$

حالة خاصة(2): إذا كانت u لا تعتمد على z : في هذه الحالة $\boxed{n=0}$ ، $\alpha=\lambda$

ويصبح الحل بالصورة:

$$\boxed{u=\sum AJ_0(\alpha\rho)\cos\lambda ct}$$

حيث الاعتماد هنا يكون فقط على ρ,t.

مثال: اهتزاز غشاء دائري Vibration of a Circular membrane

بكتابة المعادلة الموجية في المستوى (x,y):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

وباستخدام المعادلات البارامترية للدائرة (الغشاء الدائري):

$$x=r\cos\theta \;,\; y=r\sin\theta$$

فتتحول المعادلة (1) إلى الصورة القطبية (Polar Form)

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}}_{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2)$$

حيث $u(r,\theta,t)$ هي الإنحراف (أو الإزاحة) الحادثة في الغشاء الدائري نتيجة عملية الاهتزاز.

المعادلة (2) هي المعادلة الموجية للغشاء الدائري حيث الحدود (Boundaries) هي الدائرة ذات النصف قطر $r=a$.

الشروط الحدية و الابتدائية للمسألة:

الشرط الحدي $\{u(a,\theta,t)=0$ (3) $-\pi\le\theta\le 0,\ t>0$

الشرط الابتدائي $\{u(r,\theta,0)=f(r,\theta)$ (4) $-\pi\le\theta\le 0,\ 0\le r\le a$

الشرط الابتدائي $\left\{\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_t(r,\theta,0)=g(r,\theta)\right.$ (5)

و لإيجاد الحل: نفرض الحل بالصورة:

$$u(r,\theta,t)=R(r)H(\theta)T(t)$$

فإن المعادلة (2) تأخذ الصورة:

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2H}\frac{d^2H}{d\theta^2}=\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}=-\lambda^2$$

وبذلك نحصل على العلاقات الآتية:

$$\therefore \frac{d^2T}{dt^2}+c^2\lambda^2T=0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2H}\frac{d^2H}{d\theta^2}=-\lambda^2$$

بالضرب في r^2 وترتيب الحدود:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\lambda^2r^2=-\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\theta^2}=m^2$$

$$\frac{d^2H}{d\theta^2}+m^2H=0 \tag{7}$$

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{r}{R}\frac{dR}{dr}+\lambda^2r^2-m^2=0$$

$$\therefore \quad \frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+(\lambda^2-\frac{m^2}{r^2})R=0 \tag{8}$$

الحل العام للمعادلات السابقة:

المعادلة(6):

$$T = A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct \qquad (9)$$

المعادلة(7):

$$H = ce^{\pm im\theta} \qquad (10)$$

المعادلة(8): هي معادلة بسل التفاضلية بأخذ $\eta = \lambda r$ فتتحول المعادلة إلى:

$$\frac{d^2R}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{dR}{d\eta} + (1 - \frac{m^2}{\eta^2})R = 0 \qquad (11)$$

والحل العام لها:

$$R = DJ_m(\eta) + GY_m(\eta)$$

ومن خواص دوال بسل: عندما $r \to 0$ فإن $Y_m \to \infty$

ولكي يكون الانحراف أو (الإزاحة) في الغشاء نتيجة الاهتزاز محدوداً فإننا نحتاج إلى دالة بسل من النوع الأول فقط (مع إهمال Y_m).

ونحصل على الحل:

$$R = DJ_m(\lambda r) \qquad (12)$$

وباستخدام الشرط الحدي (3):

$$R(a) = DJ_m(\lambda a) = 0 \rightarrow \quad J_m(\lambda a) = 0 \qquad (13)$$

ويكون الحل العام المطلوب هو:

$$u(r,\theta,t) = (A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct)e^{\pm im\theta} \cdot J_m(\lambda r) \qquad (14)$$

حالة خاصة(1): حالة التماثل القطري Radial symmetry:

وهي عندما يكون الحل لا يعتمد على θ وتكون الإزاحة دالة في (r,t) فقط

$$u = u(r,t)$$

وتأخذ المعادلة الموجية الصورة الآتية:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{15}$$

ويصبح الحل (بوضع $m=0$ في (14))

$$u(r,t)=(A\cos\lambda ct+B\sin\lambda ct)J_0(\lambda r)$$

وباستخدام قاعدة التراكب (Supperposition) يمكن كتابة هذا الحل بالصورة:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\lambda_n ct+B_n\sin\lambda_n ct)\,J_0(\lambda_n r)$$

حيث $J_0(\lambda_n r)$ هي دالة بسل من الرتبة صفر.

الكميات $\lambda_1,\lambda_2,\ldots..$ هي الجذور الموجبة للمعادلة $J_0(\lambda_n a)=0$ (من الشرط الحدي).

<u>حالة خاصة(2):</u> إذا كان $t=0$ فإن الشرط الابتدائي(4) (في حالة التماثل القطري) يعطينا العلاقة الآتية:

$$u(r,0)=f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\;J_0(\lambda_n r)$$

(في حالة عدم الإعتماد على θ فإن $f(r)\leftarrow f(r,\theta)$).

المعامل A_n يعرف بعامل فورييه – بسل وصورته:

$$A_n=\frac{2}{a^2J_1^2(\lambda_n a)}\int_0^a f(r)\,J_n(\lambda_n r)\cdot r\,dr$$

<u>ملحوظة:</u> متسلسلة فورييه – بسل لها الصورة الآتية:

$$F(x)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m J_n(\lambda_{mn})$$

حيث $\lambda_{mn}=\dfrac{\alpha_{mn}}{a}$، n ثابت، $m=1,2,\ldots$

والمعاملات C_m لها الصورة:

$$C_m = \frac{1}{a^2 J_{n+1}(\alpha_{mn})} \int_0^a F(x)\, J_n(\lambda_{mn} x) \cdot x\, dx$$

ومن الشروط الابتدائية (5) يمكن الحصول على العلاقة:

$$u_t(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c\lambda_n B_n J_n(\lambda_n r) = g(r)$$

حيث B_n هي معاملات فورييه – بسل في هذه الحالة.

خامسا: معادلة لابلاس Laplace's Equation

تكتب معادلة لابلاس في صورتها العامة كالآتي:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}$$

في الإحداثيات الكارتيزية (x, y, z):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

في الإحداثيات القطبية الكروية (r, θ, ϕ):

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \qquad (2)$$

في الإحداثيات الاسطوانية (ρ, ϕ, z):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (3)$$

<u>حالة خاصة</u> : معادلة لابلاس في الإحداثيات القطبية (r, θ) (في بعدين):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (4)$$

(1) <u>حل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكارتيزية (في ثلاثة أبعاد):</u>

نفرض الحل بالصورة

$$\Phi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \qquad (5)$$

وبالتعويض في (1) نحصل على :

$$Y Z X'' + Z X Y'' + X Y Z'' = 0$$

وبالقسمة على XYZ نحصل على :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

وهذا يعني أن :

$$\frac{X''}{X}=c_1=\alpha^2\ ,\frac{Y''}{Y}=c_2=\beta^2\ ,\ \frac{Z''}{Z}=c_3=\gamma^2$$

بحيث أن :

$$c_1+c_2+c_3=0\rightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0 \qquad (6)$$

وتتحول المسألة إلى مسألة حل ثلاث معادلات تفاضلية هي :

$$X''-\alpha^2X=0\,,\ Y''-\beta^2Y=0\,,\ Z''-\gamma^2Z=0$$

وحل هذه المعادلات يمكن كتابته بالصورة :

$$X=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$$
$$Y=Ce^{\beta y}+De^{-\beta y}$$
$$Z=Ge^{\gamma z}+He^{-\gamma z}$$

و بأخذ $\alpha^2=-\lambda^2\,,\beta^2=-\mu^2$ فيكون:

من (6) $\gamma^2=-\alpha^2-\beta^2=\lambda^2+\mu^2$

و يصبح الحل العام المطلوب (بعد تطبيق قاعدة تراكب الحالات) في الصورة :

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n$$
$$=\sum_n(a_n\cos\lambda_n x+b_n\sin\lambda_n x).(c_n\cos\mu_n y+d_n\sin\mu_n y).(g_n e^{\gamma_n z}+h_n\ e^{-\gamma_n z})$$

حل معادلة لابلاس في المستوى:

مثال(1): حل معادلة لابلاس في بعدين x,y و صورتها :

$$\nabla^2_{x,y}[u(x,y)]=0 \quad , \quad 0<x<a, 0<y<b$$

وذلك على مستطيل بعديه (a,b)

مع الشروط الحدية:

$$i)\ u(0,y)=0 \ , \qquad ii)\ u(a,y)=0$$
$$iii)\ u(x,0)=0 \ , \qquad iv)\ u(x,b)=F(x)$$

حيث:

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{a} & 0<x<\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{2(a-x)}{a} & \dfrac{a}{2}<x<a \end{cases}$$

وحيث أن : $\nabla^2_{x,y}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

الحل: نفرض أن $u(x,y)=X(x)Y(y)$

فبالتعويض في المعادلة :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

نحصل على :

$$X''Y+Y''X=0$$

و بالقسمة على XY نحصل على :

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0$$

$$\therefore \frac{X''}{X}=-\mu^2 \ , \qquad -\frac{Y''}{Y}=-\mu^2$$

$$X''+\mu^2 X=0 \rightarrow X=A\cos\mu x+B\sin\mu x \qquad (1)$$

$$Y''-\mu^2 Y=0 \rightarrow Y=C\cosh\mu y+D\sinh\mu y \qquad (2)$$

بتطبيق الشروط الحدية عل (2),(1):

على(1): من الشرط الأول : $A=0$

(3) $\therefore X = B\sin\mu x$

ومن الشرط الثاني:

$$0 = B\sin\mu a \to \mu a = n\pi \to \mu = \frac{n\pi}{a}$$

على(2): من الشرط الثالث: $0 = C \to C = 0$

(4) $\therefore Y = D\sinh\mu y$

ويصبح الحل العام (بعد تطبيق قاعدة تراكب الحالات) بالصورة الآتية :

$$u(x,y) = \sum_n b_n \sinh\mu y.\sin\mu x = \sum_n b_n \sinh\frac{n\pi}{a}y\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (5)$$

و من الشرط الرابع :

$$\sum_n b_n \sinh\frac{n\pi}{a}b\ \sin\frac{n\pi}{a}x = F(x)$$

وهذه الصيغة تمثل مفكوك فورييه الجيبي حيث:

$$b_n \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}[\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi}{a}xdx]$$

$$= \frac{2}{a}[\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{2x}{a}\sin\frac{n\pi}{a}xdx + \int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{2(a-x)}{a}\sin\frac{n\pi}{a}xdx$$

وبإيجاد قيم هذه التكاملات نحصل على العلاقة الآتية:

$$\therefore b_n \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{8}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\sinh(\frac{n\pi}{\alpha}b)}$$

وبالتعويض في (5) نحصل على الحل النهائي المطلوب و صورته :

$$u(x,y)=\sum_{n}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\frac{\sinh\frac{n\pi}{a}y}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

وهو المطلوب .

<u>مثال(2)</u>: اوجد حل معادلة لابلاس في البعدين (x,y) تحت الشروط الآتية:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0\ ,\quad u(x,0)=1\ ,\quad u(x,b)=0\ ,\qquad u(a,y)=0$$

<u>الحل</u>: معادلة لابلاس في بعدين هي :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ولحل هذه المعادلة نفرض أن :

$$u=X(x)Y(y)$$

$$\therefore\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

$$\therefore X''+\lambda^2X=0\rightarrow X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x \tag{2}$$

$$Y''-\lambda^2Y=0\rightarrow Y=\cosh\lambda y+D\sinh\lambda y \tag{3}$$

أيضا فإن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'=-A\lambda\sin\lambda x+B\lambda\cos\lambda x \tag{4}$$

وبتطبيق الشروط الحدية:

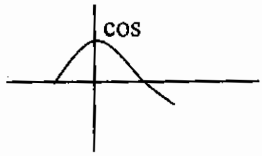
$$X'|_{x=0}=0=B\lambda\rightarrow B=0$$

$$\therefore X=A\cos\lambda x \tag{5}$$

ومن الشرط $u(a,y)=0$ نحصل على :

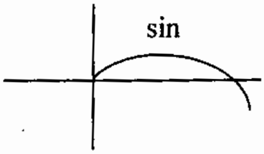
$$\therefore X(a) = A\cos\lambda a = 0$$

$$\therefore \cos\lambda a = 0 \rightarrow \lambda a = (n-\frac{1}{2})\pi$$



$$\cos\lambda a = 0$$

$$\lambda a = (n-\frac{1}{2})\pi$$



$$\sin\lambda a = 0$$

$$\lambda a = n\pi$$

$$\therefore 2\lambda a = (2n-1)\pi \rightarrow \lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2a}$$

ومن الشرط $u(x,b)=0$ نحصل على :

$$Y(b) = 0 = C\cosh\lambda b + D\sinh\lambda b$$

$$\therefore D = -C\frac{\cosh\lambda b}{\sinh\lambda b}$$

وتصبح العلاقة (3) بالصورة الآتية :

$$Y(y) = C[\cosh\lambda y - \frac{\cosh\lambda b}{\sinh\lambda b}\sinh\lambda y]$$

$$= C[\frac{\sinh\lambda b\cosh\lambda y - \cosh\lambda b\sinh\lambda y}{\sinh\lambda b}]$$

$$= C\frac{\sinh\lambda(b-y)}{\sinh\lambda b} \qquad (6)$$

من (5),(6) وباستخدام قاعدة التراكب نحصل على الحل بالصورة الآتية :

$$u(x,y) = \sum_n C_n \frac{\sinh\lambda_n(b-y)}{\sinh\lambda_n b}\cos\lambda_n x \qquad (7)$$

حيث: $\lambda_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2a}$

ولإيجاد C_n : من الشرط $u(x.0)=1$

$$u(x,0)=\sum_n C_n \frac{\sinh\lambda_n (b-0)}{\sinh\lambda_n b}\cos\lambda_n x=1$$

$$\therefore u(x,0)=\sum_n C_n \cos\lambda_n x=1$$

$$\therefore \sum_n C_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2a}x=1$$

ومن تقنية فورييه فإن:

$$C_n=\frac{2}{a}\int_0^a \cos\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\,dx$$

$$=\frac{2}{a}\frac{2a}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\Bigg|_0^a=\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

ولكن :

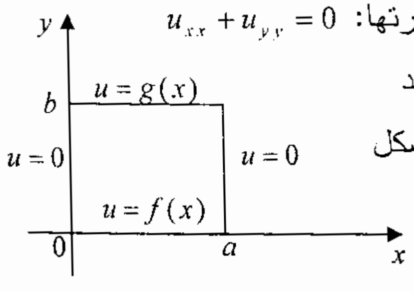
$$\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\sin(n-\frac{1}{2})\pi=(-1)^{n+1}$$

$$\therefore C_n=(-1)^{n+1}\frac{4}{(2n-1)\pi}$$

بالتعويض في (7) نحصل على النتيجة المطلوبة وهي :

$$u(x,y)=\frac{4}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\frac{\sinh(b-y)\lambda_n}{\sinh b\lambda_n}\cos\lambda_n x$$

وهو المطلوب.



مسألة : حل معادلة لابلاس في المستوى و صورتها: $u_{xx}+u_{yy}=0$ و ذلك لإيجاد الجهد (potential) $u(x,y)$ عند النقطة (x,y) من صفيحة مستوية مستطيلة الشكل إبعادها (a,b) مع الشروط الحدية الآتية:

$$(i) \quad u(0,y)=0 \quad , \qquad u(a,y)=0$$
$$(ii) \quad u(x,0)=f(x) \quad , \qquad u(x,b)=g(x)$$

ملحوظة: تمثل هذه المسألة أيضاً ما يعرف بحالة الانسياب الحراري الذي سندرسه فيما يلي:

معادلة لابلاس للانسياب الحراري المستقر:

تمثل معادلة لابلاس في الإحداثيات الكارتيزية في بعدين:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

حالة الانسياب المستقر(steady flow) للحرارة أي انسياب الحرارة بصورة مستقرة غير معتمدة على الزمن ، وذلك لان معادلة الانسياب الحراري (معادلة الانتشار لفوربيه) في بعدين لها الصورة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

و في حالة عدم الاعتماد على الزمن فإن $\frac{\partial u}{\partial t}=0$

وهي معادلة لابلاس . $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

مثال: حل معادلة لابلاس للانسياب الحراري المستقر

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

وذلك تحت الشروط الحدية الآتية :

$$(i)\ u(x,0)=f(x) \ , \qquad (ii)\ u(x,b)=g(x) \ , \ 0<x<a$$
$$(iii)\ u(0,y)=0 \ , \qquad (iv)\ u(a,y)=0 \ , \ 0<y<b$$

الحل: نكتب الحل بالصورة :

$$u=X(x)Y(y)$$

وبالقسمة على XY فإن:

$$\therefore \frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = k = -\lambda^2$$

وبذلك نحصل على المعادلتين التفاضليتين الآتيتين :

$$\therefore X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad (1)$$

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \qquad (2)$$

حل المعادلة (1) يعطي :

$$\therefore X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad (3)$$

حل المعادلة (2) يعطي :

$$\therefore Y(y) = C\cosh\lambda y + D\sinh\lambda y \qquad (4)$$

<u>وبتطبيق الشروط الحدية</u> :

من الشرط الحدي (iii)فإن :

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = 0$$

ويكون :

$X(0) = 0$ إذا $Y(y) \neq 0$ (5)

من الشرط الحدي (iv) فإن :

$$u(a,y) = X(a).Y(y) = 0$$

ويكون :

$X(a) = 0$ إذا $Y(y) \neq 0$ (6)

وبذلك فمن (5),(6) واستخدام (3) نحصل على :

$$X(0) = A = 0 \quad , \qquad X(a) = B\sin\lambda a$$

وحيث أن $B \neq 0$ فإن : $\sin\lambda a = 0$

$$\therefore \lambda a = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{a} = \lambda_n \ , \ n = 0,1,2,......$$

$$\therefore X(x) = B\sin\frac{n\pi}{a}x = X_n(x) \qquad (7)$$

ومن الحل (4) نجد أن:

$$Y(y) = C\cosh\frac{n\pi}{a}y + D\sinh\frac{n\pi}{a}y \qquad (8)$$

ويصبح الحل المطلوب بالصورة الآتية :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x).Y(y) \\ &= B\sin\frac{n\pi}{a}x[C\cosh\frac{n\pi}{a}y + D\sinh\frac{n\pi}{a}y] \\ &= \sin\frac{n\pi}{a}x[G\cosh\frac{n\pi}{a}y + H\sinh\frac{n\pi}{a}y] \end{aligned}$$

حيث : $G = BC, H = BC$.

وباستخدام مبدأ التراكب يمكن كتابة هذا الحل بصورة المتسلسلة اللانهائية كالآتي :

$$u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{a}x[G\cosh\frac{n\pi}{a}y + H\sinh\frac{n\pi}{a}y] \qquad (9)$$

ومن الشرط الحدي (i) نجد أن :

$$u\ (x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G\sin\frac{n\pi}{a}x$$

وهي متسلسلة الجيب لفورييه حيث:

$$G = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{a}dx \qquad (10)$$

ومن الشرط الحدي (ii) نجد أن:

$$\begin{aligned} u(x,b) &= g(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{a}x[G\cosh\frac{n\pi}{a}b + H\sinh\frac{n\pi}{a}b] \end{aligned}$$

وهي متسلسلة الجيب لفورييه أيضاً حيث:

$$[G\cosh\frac{n\pi}{a}b+H\sinh\frac{n\pi}{a}b]=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=M$$

حيث :

$$M=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}g(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$\therefore H=\frac{M-G\cosh\frac{n\pi}{a}b}{\sinh\frac{n\pi}{a}b} \qquad (11)$$

وبالتعويض من (11)في (9):

$$\therefore u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{a}x[G\cosh\frac{n\pi}{a}y+(\frac{M-G\cosh\frac{n\pi}{a}b}{\sinh\frac{n\pi}{a}b})\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}[G(\sinh\frac{n\pi}{a}b\cosh\frac{n\pi}{a}y-\cosh\frac{n\pi}{a}b\sinh\frac{n\pi}{a}y)+M\sinh\frac{n\pi}{a}y]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{a}x}{\sinh\frac{n\pi}{a}b}[G\sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)+M\sinh\frac{n\pi}{a}y]$$

حيث G,M لهما الصور الآتية :

$$G=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$M=\frac{2}{a}\int_{0}^{a}g(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

وهو المطلوب

<u>مسألة:</u> أوجد حل معادلة لابلاس للانسياب الحراري المستقر

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad , \quad 0<x\leq \pi \ , \ 0<y\leq \pi$$

تحت الشروط الحدية الآتية :

$(i)\ u(x,0)=x^2 \quad , \quad (ii)\ u(x,\pi)=0$

$(iii)\ u(\pi,y)=0 \quad , \quad (iv)\ u(0,y)=0$

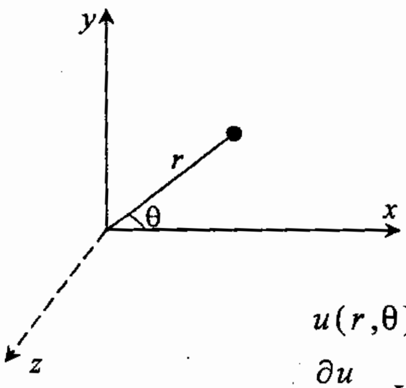
$(v)\quad u_x\Big|_{x=0}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}=0$

(2) معادلة لابلاس في الإحداثيات القطبية (r,θ)

(التوافقيات الدائرية - Circular Harmonics)

صورة معادلة لابلاس في هذه الإحداثيات هي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad (1)$$



ولإيجاد الحل لهذه المعادلة نستخدم طريقة فصل المتغيرات و ذلك بفرض أن:

$$u(r,\theta)=R(r)\ H(\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=H\frac{dR}{dr} \ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=H\frac{d^2R}{dr^2} \ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=R\frac{d^2H}{d\theta^2}$$

بالتعويض في (1) نحصل على :

$$H\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}H\frac{dR}{dr}+\frac{1}{r^2}R\frac{d^2H}{d\theta^2}=0$$

و بالقسمة على RH وبالضرب في r^2 نحصل على العلاقة الآتية :

$$\underbrace{\frac{1}{R}[r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}]}_{\text{يعتمد على } r \text{ فقط}}=\underbrace{-\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\theta^2}}_{\text{يعتمد على } \theta \text{ فقط}}=n^2$$

وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$-\frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\theta^2}=n^2 \rightarrow \frac{d^2H}{d\theta^2}+n^2H=0 \qquad (2)$$

وحلها العام هو:

$$H=A\cos n\theta+\mathbf{B}\sin n\theta \qquad (3)$$

المعادلة الثانية :

$$\frac{1}{R}[r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}]=n^2$$

$$\therefore\ r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-n^2R=0 \qquad (4)$$

وبأخذ $r=e^s$ فإن تلك المعادلة تتحول إلى المعادلة :

$$\frac{d^2R}{ds^2}-n^2R=0 \qquad (5)$$

و الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$R=Ce^{ns}+De^{-ns}$$
$$=Cr^n+Dr^{-n} \qquad (6)$$

ويصبح الحل العام للمعادلة (1) (باستخدام (3),(6)) له الصورة الآتية :

$$u_n=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_n r^n+D_n r^{-n}) \qquad (7)$$

ويعرف هذا الحل (هذه الصورة) بالتوافقية الدائرية Circular Harmonic مـن الدرجة n

<u>حالة خاصة</u> : عندما $n=0$

من (2): $\frac{d^2H}{d\theta^2}$، وهي معادلة حلها العام له الصورة :

$$H=A_0\theta+B_0 \qquad (8)$$

ومن (5) :

حيث $r=e^{s} \rightarrow s=\ln r$ ، $\frac{d^2R}{ds^2}=0$

$$\therefore R=C_0 s+D_0=C_0\ln r+D_0 \qquad (9)$$

ويصبح الحل العام في هذه الحالة:

$$u_0=(A_0\theta+B_0)(C_0\ln r+D_0) \qquad (10)$$

ويعرف هذا الحل بالتوافقية الدائرية من الدرجة صفر .

الخلاصة: من (10),(7) يمكن كتابة الحل العام معادلة لابلاس في الاحداثيات القطبية بالصورة الآتية :

$$u=A_0\ln r+\sum_{n-1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)(C_n r^{n}+D_n r^{-n})+C_0$$

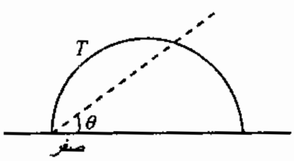
حيث A_0,A_n,B_n,C_n,D_n,C_0 هي ثوابت اختيارية.

مثال(1) : أوجد توزيع الحرارة في الحالة المستقرة الموصوفة بالمعادلة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

وذلك عند أي نقطة من صفيحة معدنية نصف كروية الشكل ذات نصف قطر $a=$ حيث يكون محيطها محفوظا عند درجة حرارة T وقاعدتها عند درجة الصفر.

الحل: مسألة القيم الحدية:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad (1)$$

حيث $u=u(r,\theta)$

الشروط الحدية:

$$(i)\ u=0 \rightarrow \theta=0 \quad , \quad 0 \le r < a$$
$$(ii)\ u \ne 0 \rightarrow [r \rightarrow 0]$$
$$(iii)\ u=T \rightarrow [r=a, 0<\theta<\pi]$$

حل المعادلة رقم (1) يأخذ الصورة العامة الآتية [كما سبق]:

$$u = A_0 \ln r + \sum_{n-1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n\, r^n + D_n\, r^{-n}) + C_0 \qquad (2)$$

من الشرط (ii): حيث u ذات قيمة محدودة عند $r=0$ فإن الحدود المشتملة على $r^{-n}, \ln r$ تتلاشي وهذا يعني أن : $A_0=0, D_n=0$ وتؤول (2) إلى:

$$u = \sum_{n-1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n + C_0 \qquad (3)$$

حيث $a_n = A_n C_n\ , b_n = B_n C_n$.

ومن الشرط (i): حيث u تساوي صفراً عندما $\theta=0$ فإن $C_0=0$

وتؤول (3) إلى:

$$u = \sum_{n-1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, r^n \qquad (4)$$

ومن الشرط (iii): $u=T$ عندما $r=a$ فإن (4) تؤول إلى :

$$T = \sum_{n-1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\, a^n \qquad (5)$$

وباستخدام تقنية فوريية حيث المعاملات a_n, b_n تأخذ الصورة :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{T}{a^n} \cos n\theta\, d\theta$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{T}{a^n} \sin n\theta\, d\theta$$

فإننا نحصل على :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{T}{a^n}\int_0^{\pi}\cos n\theta\, d\theta \quad = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{T}{a^n}\int_0^{\pi}\sin n\theta d\theta \;= \frac{2T}{\pi n a^n}\,(1-\cos n\pi)$$

وتصبح (4) بالصورة الآتية :

$$u = \frac{2T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\,(1-\cos n\pi)\frac{r^n}{n\,a^n}\,\sin n\theta$$ وهو المطلوب.

مثال(2):

(أ) أوجد حل معادلة لابلاس في القرص $0 < r < a$ إذا كان الشـــرط الحدي :

$i)\; u(a,\theta) = |\theta| \;,\quad -\pi < \theta < \pi$

$ii)\; u(a,\theta) = \theta \;,\quad -\pi < \theta < \pi$

هل هذا الشرط متحقق عند $\theta = \pm\pi$ أم لا .

(ب) أوجد قيمة حل معادلة لابلاس عند $r = 0$ في $(i),(ii)$.

الحل :

الجزء (أ) من المثال: معادلة لابلاس في القرص تكون على الصورة :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0$$

حيث $u = u(r,\theta)$، و لايجاد الحل لهذه المعادلة نستخدم طريقة فصل المتغيرات .

نضع $u = R(r)\; H(\theta)$ فنحصل على :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r H\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2} = 0$$

و بالقسمة على $\frac{R\,H}{r^2}$ نحصل على :

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\frac{\partial R}{\partial r})+\frac{1}{H}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}=0$$

$$\therefore\quad \frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\frac{\partial R}{\partial r})=-\frac{1}{H}\,\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}=const.=n^2$$

وبذلك نحصل على العلاقتين :

$$\therefore r\frac{d}{dr}(r\frac{\partial R}{\partial r})=n^2\,R \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{H}\,\frac{d^2 H}{d\theta^2}=n^2 \qquad (2)$$

العلاقة(2):

$$H''+n^2\,H=0 \rightarrow H=A\cos n\theta+B\,\sin n\theta$$

العلاقة(1):

$$r^2\,\frac{d^2\,R}{d\,r^2}+r\,\frac{d\,R}{d\,r}=n^2\,R$$

ولحل هذه المعادلة : نفرض أن $R=r^m$ وبذلك نحصل على :

$$r^2(m-1)m\,r^{m-2}+r\,m\,r^{m-1}=n^2\,r^m$$

$$\therefore r^m\,[m^2-m+m-n^2]=0 \rightarrow r^m\,[m^2-n^2]=0 \rightarrow m=\pm n$$

ويصبح الحل على الصورة :

$$R=C\,r^n+D\,r^{-n}$$

و بإهمال الحد المشتمل على r^{-n} لأنه غير محدود عند اقتراب من الصفر فإن :

$$R=C\,r^n \qquad (4)$$

و يصبح الحل العام بالصورة:

$$u(r,\theta)=R(r)H(\theta)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Cr^{n}\,(A\cos n\theta+B\sin n\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{n}\,(g_{n}\ \cos n\theta+h_{n}\sin n\theta)\quad(5)$$

حيث: $g_n=CA\quad,\quad h_n=CB$

بتطبيق الشرط الحدي (i) :

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\ a^{n}\,(g_{n}\ \cos n\theta+\ h_{n}\sin\ n\theta)=|\theta|$$

هذه المعادلة تمثل متسلسلة فورييه و على ذلك فإن معاملات فورييه تكون :

$$a^{n}\,g_{n}\ =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\ \cos n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-\theta)\cos n\theta\,d\theta+\int_{0}^{\pi}\theta\ \ \cos n\theta\,d\theta]$$

$$a^{n}h_{n}\ \ =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\theta|\ \sin\ n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0}(-\theta)\sin n\theta\,d\theta+\int_{0}^{\pi}\theta\ \ \cos n\theta\,d\theta]$$

و بما أن $|\theta|$ دالة زوجية فإن $h_n=0$، و بذلك نحصل على :

$$a^{n}\,g_{n}\ =\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\theta\ \cos n\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}[\frac{\theta}{n}\ \ \sin n\theta]_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin\ n\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\,(\frac{1}{n^{2}}\ \cos n\theta)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{2}{\pi n^{2}}(\cos n\pi-1)$$

$$g_{n}=\frac{2}{\pi n^{2}\ a^{n}}(\cos n\pi-1)\qquad(6)$$

أيضاً فإن معامل فورييه عندما $n=0$ يكون:

$$a_{0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\ d\theta=\frac{1}{\pi}[\frac{\theta^{2}}{2}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}\qquad(7)$$

بالتعويض من $(7),(6)$ في $((5))$:

$$\therefore u(r,\theta)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{r^n}{n^2\ a^2}(\cos n\pi-1)]\cos n\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n[(-1)^n\ -1]}{n^2\ a^2}\ \cos n\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n^2\ a^2}\ \cos n\theta$$

لقيم n الفردية .

بتطبيق الشرط الحدي (ii): $u(a,\theta)=\theta \quad ,-\pi<\theta<\pi$

$$u(a,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\ a^n\ (g_n\ \cos n\theta+h_n\sin\ n\theta)=\theta$$

معاملات فورييه :

$$a^n\ g_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\cos n\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{n}\sin\ n\theta\left|_{-\pi}^{\pi}\right.-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\ n\theta d\theta]$$

$$=\frac{1}{\pi}(-\ \frac{1}{n^2}\ \cos n\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{-1}{n^2\ \pi}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0 \qquad (8)$$

$$a^n\ h_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\sin\ n\theta\ d\theta=\frac{2}{\pi}[-\frac{\theta}{n}\cos n\theta\left|_0^{\pi}\right.+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos n\theta\ d\theta]$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{\theta}{n}\cos n\theta+\frac{1}{n^2}\sin\ n\theta\Big|_0^{\pi}\ ]=\frac{2}{\pi}[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi]$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi\rightarrow h_n=-\frac{2}{na^n}\cos n\pi \qquad (9)$$

و باستخدام $(9),(8)$ تصبح (5) :

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\ \ (\frac{-2}{n\ \ a^n}\ \ \cos n\pi)\ \sin n\theta$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\ \ \frac{r^n}{n\ \ a^n}\ (\cos n\pi)\ (\sin n\theta)$$

عند $\theta = \pm\pi$: فإن $u(r,\theta) = 0$ ، و بالتالي فإن الشرط المعطى غير متحقق عند $\theta = \pm\pi$.

<u>الجزء (ب) من المثال:</u> لإيجاد قيمة الحل عند $r = 0$ في $(i),(ii)$:

عند $r = 0$ فإن : $u(0,\theta) = a_0$ حيث :

$$(i)\ u(0,\theta) = a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\theta\, d\theta = \frac{2}{2\pi}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$(ii)\ u(0,\theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}[\pi^2 - \pi^2] = 0$$

وهو المطلوب .

<u>مسألة :</u> أوجد حل معادلة لابلاس في القطاع $0 < r < a$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الذي يحقق الشروط : $u(a,0) = 0\ ,\ u(a,\frac{\pi}{2}) = 0\ ,\ u(a,\theta) = 1$